BURNDY
LIBRARY
Chartered in 1941

GIFT OF
BERN DIBNER

Proposizioni di Meccanica

Pagine	Paragr.	
17.	11.	1ª La risultante di due forze applicate ad un punto, qualunque sia la loro intensione e direzione, le quali vengono presentate da rette prese sopra le loro direzioni, è figurata in direzione e in intensione dalla diagonale del parallelogrammo costruito su le rette che rappresentano le componenti, il quale dicesi *parallelogrammo delle forze*.
18.	12.	2ª Siano P, P' le due componenti ed R la risultante, e date tre delle quantità P, P', R, $P\hat{}R$, $P'\hat{}R$, $P\hat{}P'$, si potranno determinare per mezzo della Trigonometria piana le altre tre, purchè fra le date v'abbia almeno un lato, ed avendo riguardo ai casi dubbj che si presentano nella soluzione dei triangoli rettilinei.
19.	13.	3ª $P : P' : R :: \text{sen}\, P'\hat{}R : \text{sen}\, P\hat{}R : \text{sen}\, P\hat{}P'$
id.	14.	4ª La risultante di due forze applicate ad un punto e che facciano fra se un'angolo minore di 180° essere non più

Pagina	Parag.		
			nulla, a meno che non siano tutte amendue le componenti.
19.	15.	5.°	$P = R\,\theta\,\widehat{RP}$, $P' = R\,\theta\,\widehat{RP'}$.
20.	16.	6.°	Due delle forze P, P', R, sono fra loro in ragion reciproca delle perpendicolari che sopra le loro direzioni si fanno cadere da un punto preso ad arbitrio su la direzione della terza.
21.	17.	7.°	Costruito un triangolo simile al triangolo delle forze, ovvero che abbia i lati rispettivamente perpendicolari ai lati del triangolo medesimo, le forze P, P', R riuscivanno proporzionali ai lati del costruito triangolo.
id.	18.	8.°	Determinare si può la risultante di quante forze si voglia applicate ad un punto.
22.	18.	9.°	Se le forze applicate ad un punto si facciano equilibrio, una di esse si può riguardare come opposta ed eguale all'azione della risultante dell'altre forze.
id.	18.	10.°	Se le forze non facciano equilibrio, si avrà questo stato applicando al punto di applicazione delle forze, una forza eguale ed opposta alla risultante di tutte le componenti.

DSI

MSS 1260 B
RB NMAH

Pagina	Parag.		
23.	19.	11.	Se tre forze siano presentate dai tre spigoli di un parallelepipedo, i quali partano dal medesimo angolo, la loro risultante verrà presentata dalla diagonale del parallelepipedo stesso; il quale nomasi parallelepipedo delle forze.
id.	20.	12.	La risultante di tre forze applicate ad un punto, non può essere nulla ai meno che nol sia ciascuna delle tre componenti.
24.	21.	13.	Determinare si possono le componenti P, P', P'' di una forza R secondo direzioni rispettivamente parallele a tre rette non esistenti sul medesimo piano, e che non siano fra loro parallele.
id.	22.	14.	Siano X, Y, Z, le componenti, ed R la risultante e si avrà

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2+2XY\cos X^\wedge Y+2XZ\cos X^\wedge Z+2YZ\cos Y^\wedge Z},$$

che riducesi ad $R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, se il parallelepipedo delle forze sia rettangolare. Si ha pure

$$\cos X^\wedge R=\frac{X}{R}=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos Y^\wedge R=\frac{Y}{R}=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos Z^\wedge R=\frac{Z}{R}=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

Pagina	Parag.	

$\theta^{\wedge} X^{\wedge} R + \theta^{\wedge} Y^{\wedge} R + \theta^{\wedge} Z^{\wedge} R = 1.$

Per queste equazioni data la risultante si determinano immediatamente le componenti; e per converso date le componenti si trova la risultante.

15. Se due siano le forze ortogonali applicate ad un punto si ha $R = \sqrt{X^{\wedge} + Y^{\wedge}}$,

$$\theta X^{\wedge} R = \frac{X}{\sqrt{X^{\wedge} + Y^{\wedge}}},$$

$$\theta Y^{\wedge} R = \frac{Y}{\sqrt{X^{\wedge} + Y^{\wedge}}},$$

$$\theta Z^{\wedge} R = \frac{Z}{\sqrt{X^{\wedge} + Y^{\wedge}}}.$$

La direzione della risultante R viene data dalla

$$(y - y_1) X = (x - x_1) Y,$$

26. 23. 16. Siano F, F', F'' --- le forze applicate ad un punto e dirette comunque nello spazio, ed X, Y, Z le somme delle componenti delle F, F', F'' -- rispettivamente parallele agli assi coordinati delle x, y, z ortogonali, e si avranno le equazioni

$$X = \Sigma F \theta F^{\wedge} X = 0,$$
$$Y = \Sigma F \theta F^{\wedge} Y = 0$$
$$Z = \Sigma F \theta F^{\wedge} Z = 0.$$

Se le forze si facciano equilibrio intorno ad un punto affatto libero, diconsi equazioni d'equilibrio

Pagina | Facci.

29. 25. 17. Se delle forze rispettivamente paralelle e proporzionali ai lati di un poligono rettilineo, a semplice o a doppia inclinazione, e che sia chiuso siano applicate ad un punto del tutto libero nello spazio si faranno equilibrio. Se il poligono non è chiuso, la retta che il chiude sarà la risultante delle forze. —

30. 27. 18. Le projezioni sui i piani (x,y), (x,z), (y,z) della risultante R delle forze X, Y, Z sono rispettivamente

$$X(y-y_1) = Y(x-x_1),$$
$$X(z-z_1) = Z(x-x_1)$$
$$Z(y-y_1) = Y(z-z_1);$$

una delle quali è necessaria conseguenza delle altre due, essendo x_1, y_1, z_1, le coordinate del punto di applicazione delle forze.

31. 28. 19. $R^2 = 2\Sigma PP' \cos P\hat{}P'$,

32. 29. 20. $R = \Sigma P \cos P\hat{}R$.

id. 30. 21. L'effetto di una forza che sollecita un corpo, non cambia, in qualunque punto della sua direzione si applichi, purchè questo punto sia uno di quelli del corpo, o se egli è fuori sia a lui invariabilmente unito.

Pagine	Parag.		
34.	32.	22.	La risultante di due forze parallele e dirette dalla medesima parte, è applicata in un punto della retta che unisce i punti di applicazione delle forze parallele, il quale la divide in due parti reciprocamente proporzionali alle componenti.
id.	32.	23.	Se le due componenti siano eguali, il punto di applicazione della risultante sarà il mezzo della retta che unisce i punti d'applicazione delle due componenti.
36.	33.	24.	Una componente sta alla risultante come la distanza dal punto d'applicazione dell'altra componente dal punto d'applicazione della risultante alla retta che unisce i punti d'applicazione delle componenti.
37.	34.	25.	Allorchè due forze parallele agiscono in direzioni contrarie, la risultante eguaglia la loro differenza ed agisce dalla medesima parte che la più grande delle due componenti.
38.	35.	26.	Due forze eguali, parallele

Pagina	Parag.	
		e di contrarie direzioni, non hanno risultante, vale a dire non possono essere equilibrate da una forza unica.
39.	36.	27. In una infinità di modi con due forze eguali, parallele e contrarie si potrà fare equilibrio a due forze eguali parallele e contrarie.
40.	38.	28. Se più forze parallele siano applicate a diversi punti invariabilmente tra se connessi, ad esempio ai punti di un corpo solido, la risultante sarà la somma delle componenti prese coi segni che indicano le direzioni; quando però tale risultante abbia luogo; avvegnacchè cessa di aver comporre le forze s'incontrino due forze eguali e contrarie. Il punto d'applicazione della risultante è al tutto indipendente dalle direzioni delle componenti parallele e dicesi <u>centro</u> delle forze parallele.
41.	39.	29. Se pongasi fisso il centro delle forze parallele, il corpo rimarrà in equilibrio, qualunque posizione esso

Pagine	Paragr.	
		prenda intorno al centro delle forze parallele. —
42.	40.	30. Una forza applicata ad un punto d'un triangolo e la cui intensione sia presentata dall'area di un triangolo, si scompone in tre altre parallele dirette dalla medesima parte, applicate agli angoli del triangolo, e le cui intensioni sono presentate dall'aree dei triangoli che hanno il vertice nel punto d'applicazione della forza e per base il lato opposto all'angolo cui è applicata la forza; i quali triangoli si formano protraendo dal punto d'applicazione della forza tre rette agli angoli del triangolo. —
45.	42.	31. Introducendo una coppia, si può trasportare da un punto all'altro dello spazio il punto di applicazione di una forza, purchè i due punti siano tra se invariabilmente connessi.

Lez. | Pag.

46. 43. 32. Le energie delle coppie, sono equivalenti anzi proporzionali alle forze delle coppie

47. 44. 33. Due coppie sono equivalenti, se le loro forze siano reciprocamente come le loro braccia.

48. 45. 34. Le energie delle coppie sono proporzionali ai momenti

49. 46. 35. Il momento misura l'energia della coppia.

50. 48. 36. Una coppia può dislocarsi sul medesimo piano, o su piani paralleli senza che il suo effetto sia cambiato, purchè il nuovo braccio di leva sia invariabilmente attaccato al primo.

57. 55. 37. Si può ottenere la risultante di quante coppie si voglia situate comunque nello spazio, purchè le loro braccia di leva siano invariabilmente fra se connessi.

58. 57. 38. Si può scomporre una coppia in due altre situate sopra piani dati di posizione, purchè questi piani e quello della coppia proposta s'incontrino secondo una stessa retta o secondo rette parallele.

Pagine	Paragr.		
60.	60.	39.	Se due coppie sieno presentate dai loro assi ed in grandezza dai lati di un parallelogrammo, esse si compongono in una sola presentata dal suo asse e in grandezza dalla diagonale del parallelogrammo.
62.	63.	40.	Tre coppie presentate dagli assi rispettivi, ed in grandezza dagli spigoli formanti un'angolo diedro di un parallelepipedo, si compongono in una sola presentata dal suo asse, e in grandezza dalla diagonale del parallelepipedo.
65,	66.	41.	Quante forze si vogliano di qualunque direzione nello spazio, applicate ad un corpo solido in un modo qualsiasi, possono sempre ridursi ad una sola forza, e ad una sola coppia, le quali in generale sono situate in piani differenti.
67.	67.	42.	Tutte le forze applicate ad un corpo solido non si possono ridurre ad una sola, a meno che la risultante delle forze trasportate

Pagina	Paragr.	
		nel medesimo punto parallele a se stesse, non abbia una direzione parallela al piano della coppia risultante; e ciò in qualunque luogo dello spazio sia locato il punto in cui si trasporta l'applicazione delle forze tutte; conviene in oltre che la prefata risultante non sia nulla.
71.	69. 43.	Tutte le forze che non hanno risultante unica applicate ad un corpo solido, ridurre si possono a due non situate nel medesimo piano, e ciò in un' infinità di modi
72.	70. 44.	Due forze situate in diversi piani non possono avere risultante unica.
73.	71. 45.	Allorchè differenti coppie situate comunque nello spazio sollecitano un corpo solido costretto a ruotare intorno ad un punto fisso, le condizioni dell' equilibrio sono assolutamente le medesime che se il corpo fosse al tutto libero. La stessa cosa ha luogo nel caso di un' asse fisso d'intorno al quale sia obbligato a ruotare il corpo, purchè le coppie applicate siano così fattamente disposte che dare non possano una coppia

Pagine	Paragrafi	
		risultante, parallelo all'asse di rotazione
75.	72.	46. Un sistema libero e invariabile, a cui siano applicate delle forze dirette comunque nello spazio, sarà in equilibrio, se trasportate le forze in un punto qualunque del sistema, o diverso, purchè a questo invariabilmente attaccato, si facciano equilibrio; e tutte le coppie introdotte siano pure tra se equilibrate.
76.	73.	47. Un sistema di forze parallele situate nel medesimo piano è in equilibrio, se sia nulla la loro somma e nulla la somma dei loro momenti relativi relativi ad un punto preso sul loro piano.
77.	74.	48. Il momento della risultante di quante forze parallele si voglia situate sul medesimo piano, e relativo ad un punto preso ad arbitrio sul piano stesso, eguaglia la somma di momenti relativi al medesimo punto, delle componenti.
78.	74.	49. Si ha $r_1 = \frac{p P + p' P' + p'' P'' + \ldots}{P + P' + P'' + \ldots} = \frac{\Sigma p P}{\Sigma P}$.
80.	77.	50. Per l'equilibrio delle forze parallele poste comunque nello spazio, sono necessarie tre condizioni: ciò sono, che la loro

Pagine | Parag.

somma sia nulla, e che ciascheduna delle somme dei momenti delle forze relativi a due piani paralleli alle loro direzioni, sia nulla da se.

85. 81. 52. Se le forze parallele siano tutte tra se eguali il loro centro è un punto di cui la posizione non dipende che dalla figura formata dai punti di applicazione delle forze stesse; e si ha $p = \frac{\Sigma x}{n}$.

86. 82. 52. Il momento della risultante di quante forze parallele si voglia situate nello spazio, relativo ad un piano eguaglia la somma de' momenti relativi al piano stesso di tutte le componenti.

id. 82. 53. Se le forze non abbiano risultante, allora ridotte a numero minore, la somma de' momenti di queste, relativi ad un piano, eguaglia la somma di' momenti delle forze tutte del sistema relativi al piano medesimo.

87. 83. 54. La distanza del centro delle forze parallele dirette comunque nello spazio, da un punto qualunque, determinasi in funzione delle mutue distanze de' loro punti di applicazione e delle distanze di così fatti punti dal prefato.

Pagina	Parag.	

si ha $D^2 = \frac{\Sigma . P d^2}{\Sigma . P} - \frac{\Sigma . P P' d^2}{(\Sigma . P)^2}$.

93. 82. 55. Le condizioni d'equilibrio per un sistema invariabile sollecitato da quante forze si ~~[illegible]~~ voglia esistenti sul medesimo piano sono

1° Che la somma delle forze scomposte parallellamente a due assi giacenti nel loro piano sia nulla rispetto a ciascheduno degli assi;

2° Che la somma dei momenti delle forze, relativi ad un punto qualunque situato sul piano delle forze, sia nulla per sè.

Così fatto punto dicesi centro dei momenti.

98. 88. 56. Se le forze abbiano risultante unica, e su di lei si prenda il centro dei momenti, la somma de' momenti a lui relativi è nulla per le forze situate nel medesimo piano.

103. 91. 57. Se gli assi coordinati siano ortogonali le tre equazioni dell'equilibrio vengono presentate dalle

$$P\theta P\hat{X} + P'\theta P'\hat{X} + P''\theta P''\hat{X} + \text{---------} \&c = \Sigma . P\theta P\hat{X} = 0.$$

$$P\theta P\hat{Y} + P'\theta P'\hat{Y} + P''\theta P''\hat{Y} + \text{---------} \&c = \Sigma . P\theta P\hat{Y} = 0.$$

Pagine Parag.

$P(y\theta P\hat{X} - x\theta P\hat{Y}) + P'(y'\theta P'\hat{X} - x'\theta P'\hat{Y}) + P''(y''\theta P''\hat{X} - x''\theta P''\hat{Y}) + \text{------} \&c = \Sigma P(y\theta P\hat{X} - x\theta P\hat{Y}) = 0.$

105. 92. 58. Se le forze abbiano una risultante unica R_1, sarà $R_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$, $\theta R_1\hat{X} = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}$, $\theta R_1\hat{Y} = \frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}$, e l'equazione della direzione della risultante R_1 sarà

$x_1 Y_1 + y_1 X_1 + G_1 = 0.$

106. 93. 59. Nel caso delle forze parallele situate o no sul medesimo piano e in quello delle forze locate sul medesimo piano, vi avrà risultante unica se $R_1 > 0$. Se poi abbiasi $R_1 = 0$, allora tutte le forze del sistema si ridurran no ad una coppia della quale si conoscerà il piano e l'energia; ed a cui si potrà fare equilibrio mediante una coppia equivalente e che agisca in senso contrario, essendo le due coppie situate sul medesimo piano ovveramente su piani paralelli.

Pagina	Paragr.

113. 95. 60. Le equazioni di equilibrio di quante si vogliano forze situate comunque nello spazio, posti gli assi coordinati ortogonali sono le infrascritte

$X_1 = \Sigma P \theta \widehat{PX} = 0,$
$Y_1 = \Sigma P \theta \widehat{PY} = 0,$
$Z_1 = \Sigma P \theta \widehat{PZ} = 0.$
$L_1 = \Sigma P(z \theta \widehat{PY} - y \theta \widehat{PZ}) = 0,$
$M = \Sigma P(x \theta \widehat{PZ} - z \theta \widehat{PX}) = 0,$
$N = \Sigma P(y \theta \widehat{PX} - x \theta \widehat{PY}) = 0.$

Alle ultime tre di queste equazioni possono venire sostituite le tre

$\Sigma p . P \theta \widehat{PX} = 0,$
$\Sigma q . P \theta \widehat{PY} = 0,$
$\Sigma r . P \theta \widehat{PZ} = 0,$ essendo p, q, r le più corte distanze della forza P dagli assi delle x, y, z.

---

119. 98. 61. Se le forze P, P', P'' --- non sieno in equilibrio, il saranno se esse abbiano una risultante R_1, e si introduca la forza $-R_1$, vale a dire le forze P, P', P'' --- $-R_1$, saranno in equilibrio; il perchè le sei equazioni

$X_1 - R_1 \theta \widehat{R_1 X} = 0$

Pagina | Parag

$Y_1 - R_1 \theta R_1\hat{}Y = 0,$

$Z_1 - R_1 \theta R_1\hat{}Z = 0$

$L_1 - R_1(z_1 \theta R_1\hat{}Y - y_1 \theta R_1\hat{}Z) = 0,$

$M - R_1(x_1 \theta R_1\hat{}Z - z_1 \theta R_1\hat{}X) = 0,$

$N - R_1(y_1 \theta R_1\hat{}X - x_1 \theta R_1\hat{}Y) = 0,$

ove x_1, y_1, z_1 sono le coordinate di un punto qualunque della risultante.

120. 98. 62. Perchè le forze P, P', P''.... abbiano una risultante unica debbe verificarsi l'equazione $LX_1 + MY_1 + NZ_1 = 0$, senza che sia $Z_1 = 0, Y_1 = 0, Z_1 = 0$

128. 108. 63. Di tutti gli assi che passano per l'origine, l'asse della coppia risultante è quello relativamente al quale la somma dei momenti è massima.

id. 64. La somma dei momenti è la stessa rispetto a tutti gli assi che fanno lo stesso angolo con l'asse del massimo momento, ovveramente che formano una superficie conica intorno a lui.

129. 65. La somma dei momenti è nulla relativamente agli assi che fanno con l'asse del massimo momento

Pagine	Paragr.	
		~~osservamenti che formano una superficie conica intorno a lui.~~
		un angolo retto, vale a dire che formano un piano perpendicolare alla direzione di lui.
140.	113.	66. Per l'equilibrio di un solido o di un sistema di punti invariabile, il quale non può rotare che intorno a un punto fisso, è necessario e sufficiente che la somma dei momenti delle forze rispetto a ciascuno dei tre assi ortogonali protratti pel punto fisso sia nulla da sè.
142.	114.	67. Per l'equilibrio delle forze parallele situate comunque nello spazio, è necessario e sufficiente che la somma dei momenti sia nulla rispetto a due assi perpendicolari a due piani protratti pel punto fisso paralleli alla direzione delle forze.
143.	114.	68. Allorchè le forze parallele sono tutte sul medesimo piano, all'equilibrio sarà

Pagina	Parag.	

necessario e bastante che la somma dei momenti sia nulla riguardo ad un asse perpendicolare al piano delle forze.

144. 116. 69. Per l'equilibrio di un solido intorno ad un'asse fisso è necessario e sufficiente che sia nulla la somma dei momenti relativi all'asse medesimo.

146. 117. 70. Se l'asse potesse solo muoversi lungo la propria direzione, oltre la precedente condizione sarebbe necessario eziandio che la somma delle componenti delle forze parallele a questa direzione fosse nulla.

id. 118. 71. Se in un solido ovveramente in un sistema invariabile siene fissi tre punti che non siano sulla stessa retta, non potrà aversi moto sotto l'azione di forze qualunque elleno siano.

id. 119. 72. Se un solido poggi sopra il piano (x, y) con un solo de' suoi punti, che sia l'origine delle coordinate, perchè vi sia equilibrio, le forze applicate al punto aver debbono

Pagina	Parag.	
		una risultante unica che passi per l'origine e spinga perpendicolarmente il punto contro il piano. Si hanno poi cinque equazioni di condizione; ciò sono $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$, $M = 0$, $N = 0$.
148	120.	75. Se il solido poggi sopra il piano (x, y) con due punti, uno de' quali sia l'origine, per l'equilibrio le forze che animano il punto, avere debbono una risultante unica che sia perpendicolare al piano in un punto della retta che unisce i due punti d'appoggio, e spingere contro il piano. Quattro saranno le equazioni di condizione $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$, $N = 0$.
151.	121.	76. Se il solido poggi sul piano (x, y) con quanti punti si voglia, la risultante dovrà essere perpendicolare al piano spingendo contro di lui, incontrandolo in un punto compreso entro il poligono formato dai punti d'appoggio del solido e che gli altri tutti contenga.

Pagina	Parag.	
154.	122.	75. Se un punto materiale sia obbligato a rimanere sopra una data superficie, la risultante delle forze tutte da cui è sollecitato riuscir debbe perpendicolare alla superficie.
155	122.	76. Sia $\varphi=0$, l'equazione della superficie, e gli angoli che la normale fa con gli assi coordinati delle x, y, z, sono rispettivamente $V\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$, $V\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$, $V\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$, essendo $$V=\frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}$$
164.	126.	77. La resistenza attuale di un punto fisso intorno a cui sia costretto un solido di muoversi, eguaglia la risultante delle forze tutte del sistema trasportate parallelamente a se stesse nel punto fisso.
167.	128.	78. Se un solido sia costretto a muoversi intorno ad un'asse fisso che si prende per uno degli assi coordinati ortogonali, per quello delle x ad esempio, si possono sempre determinare le pressioni

Pisa	Parigi	
		contro i punti fissi le quali sono perpendicolari all'asse, ma non sempre le pressioni contro i medesimi punti nella direzione dell'asse che gli unisce.
167. 129.	79.	Se tre sono i punti coi quali un solido poggi sopra un piano, si potranno determinare le pressioni sopra ciascuno dei tre punti, purchè non siano situati sulla medesima retta.
170. 131.	80.	In generale la determinazione delle resistenze sul piano, di un numero di punti maggiore di tre non può eseguirsi, e il problema rimane indeterminato.
171. 132.	81.	Tutto quello che si è detto nell' Introduzione delle projezioni dei triangoli sopra tre piani che passano pel medesimo punto, si applica alle projezioni dei momenti su tre piani che passano tutti e tre pel centro dei momenti.
175. 132.	82.	Se si presenti la perpendicolare di un piano che passi pel centro dei momenti, e la

Pagine	Paragr.	
		somma dei tre momenti, L, M e N projettati sul piano stesso, si ha
		$D = L\,\theta\,\widehat{\pi x} + M\,\theta\,\widehat{\pi y} + N\,\theta\,\widehat{\pi z}$.
173.	132.	83. Fra tutti i piani che passano pel centro de' momenti, che è pure origine delle coordinate, uno ve ne ha per cui la projezione de' momenti è un massimo e viene presentata da $\sqrt{L^2+M^2+N^2}$. Questo piano dicesi principale.
174.	132.	84. Se π' rappresenti in direzione la perpendicolare al piano della massima somma delle projezioni di momenti, la situazione di lui nello spazio viene data dalle 3 infrascritte equazioni
		$\theta\,\widehat{\pi' x} = \dfrac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$
		$\theta\,\widehat{\pi' y} = \dfrac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$
		$\theta\,\widehat{\pi' z} = \dfrac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$
174 fino 175.	132.	85. Sia π la perpendicolare ad un altro piano il quale passa pel centro di momenti, e la somma delle projezioni su questo piano sarà $\sqrt{L^2+M^2+N^2}\,.\,\theta\,\widehat{\pi'\pi}$! Laonde la somma de' momenti sarà

Pagina Paragr.

nulla per tutti i piani che pas-
sano per l'origine e sono
perpendicolari al piano princi-
pale. Si conserverà poi la
medesima per tutti i piani
che passando per l'origine
hanno la medesima inclina-
zione al piano principale.

177. 133. 86. Quando si ha $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$,
$Z_1 = 0$, il momento principale
non cambia di valore, e il
piano principale rimane
sempre parallello a se
stesso in qualunque pun-
to sia locato il centro dei
momenti.

182. 135. 87. Quando il momento princi-
pale minimo è nullo, vi
ha risultante unica delle
forze del sistema.

184. 136. 88. Se abbiasi risultante
unica, essa debbe esser
sul piano principale,
su cui pure giace il centro
de' momenti, ovunque esso
sia locato nello spazio.

199. 153. 89. Se nello spazio si prendano a
volontà dei punti, e per essi
si protraggano delle rette
rispettivamente parallele
e proporzionali ai lati di un
poligono qualunque rettilineo
chiuso a semplice o a doppia

Pagina | Parag.

inclinazione, il centro di gra-
vità di un sistema di pesi
eguali sarà lo stesso, siano i
pesi situati ove le rette han-
no principio o dove hanno
termine.

199. 154. 90. Se pesi eguali locati da
prima arbitrariamente su
le direzioni dei lati di un
poligono chiuso qualunque a
doppia ovvero a semplice
inclinazione, passino contem-
poraneamente e nei mede-
simi versi, su le prefate di-
rezioni delle lunghezze ri-
spettivamente proporziona-
li alle lunghezze dei lati
del poligono, il centro comune
di gravità resterà immobile.

199. 155. 91. Se per un punto qualun-
que dello spazio si conducano
delle rette parallele e propor-
zionali ai lati di un poligono
chiuso qualunque, a semplice
o a doppia inclinazione, il
punto sarà il centro di gra-
vità di un sistema di mas-
se eguali locate agli estremi
delle rette.

199. 156. 92. Un punto intorno al quale
delle forze dirette di una
maniera qualunque nello

Pagina	Parag.	
		spazio, si fanno equilibrio, è centro comune di gravità di masse eguali situate alle estremità delle rette, le quali partendo dal punto, rappresentano le forze in direzione e intensione.
201.	159.	93. Il centro di gravità del perimetro di un triangolo è il centro del circolo inscritto al triangolo formato dalle rette che uniscono i mezzi dei lati di lui.
205.	163.	94. Il centro di gravità dell'area di un triangolo qualunque è situato sopra una retta protratta da un qualunque dei tre angoli al mezzo del lato opposto, e precisamente ad un terzo di questa retta a partire dal lato e a due terzi a partire dall'angolo opposto.
205.	162.	95. Il centro di gravità di tre masse eguali applicate ai vertici di un triangolo coincide col centro di gravità del triangolo.
206.	163.	96. Il centro di gravità dell'area di un trapezio è su la retta che unisce i mez-

Pagina	Paragrafo	

zi dei due lati paralelli. Siano b, b' i lati paralelli del trapezio, m la lunghezza della prefata retta, d la distanza del centro di gravità dal lato b, e si avrà

$$d = \frac{1}{3} m \frac{2b'+b}{b+b'}$$

208. 164. 97. La distanza del centro di gravità della superficie della piramide senza la base è misurata dalla terza parte dell'altezza della piramide.

210. 165. 98. Supposto che la figura sia omogenea si ha

$$Vp = vx + v'x' + v''x'' + \text{---}$$

$$Vq = vy + v'y' + v''y'' + \text{---}$$

$$Vr = vz + v'z' + v''z'' + \text{---}$$

212. 167. 99. Il centro di gravità di una linea obbiettiva è determinato dalle tre equazioni infrascritte

$$p = \frac{\int x\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$q = \frac{\int y\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$r = \frac{\int z\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Pagina | Paragr.

167. 100. Se la linea sia piana la posizione del centro di gravità verrà dato dalle due equazioni

$$p=\frac{\int x\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2}},\quad q=\frac{\int y\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

169. 101. La distanza del centro di gravità di un arco di circolo dal centro di lui è quarta proporzionale dopo l'arco, il raggio e la corda.

171. 102. Il centro di gravità di un'area λ compresa fra due curve è dato dalle due equazioni

$$p=\frac{\int(y-y_1)x\,dx}{\lambda}$$

$$q=\frac{\frac{1}{2}\int(y^2-y_1^2)dx}{\lambda}$$

175. 103. Il centro di gravità di un solido generato dalla rotazione intorno ad un asse di un'area compresa fra due linee è dato dalla

$$p=\frac{\int(y^2-y_1^2)x\,dx}{\int(y^2-y_1^2)dx}$$

178. 104. Il centro di gravità della superficie del solido stesso è dato dalla

$$p'=\frac{\int xy(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\int y(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pagina	Parag.	
179.	105.	Il centro di gravità della superficie generata dalla rotazione di un'arco intorno al diametro è nel mezzo della saetta di lui.
181.	106.	Il centro di gravità della superficie di un solido qualunque è dato dalle infrascritte equazioni

$$p = \frac{\int^2 x\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\int^2\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

$$q = \frac{\int^2 y\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\int^2\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

$$r = \frac{\int^2 z\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\int^2\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

182.	107.	Il centro di gravità di un solido qualunque è dato dalle

$$p = \frac{\int^3 x\,dx\,dy\,dz}{\int^3 dx\,dy\,dz},$$

$$q = \frac{\int^3 y\,dx\,dy\,dz}{\int^3 dx\,dy\,dz},$$

$$r = \frac{\int^3 z\,dx\,dy\,dz}{\int^3 dx\,dy\,dz}.$$

Pagina	Parag.	
188.	108.	Il centro di gravità di un solido che sia in esatta simmetria intorno l'asse delle z, se dicasi Z una sezione del solido con un piano parallello al piano (x, y), il centro di gravità del solido stesso viene dato dalla $\mathfrak{C} = \frac{\int z Z dz}{\int Z dz}$. —
190.	109.	Il centro di gravità di una piramide a base qualunque è situato su la retta che unisce il vertice col centro di gravità della base, distante $\frac{1}{4}$ di questa retta dalla base, ovvero $\frac{3}{4}$ dal vertice. Questo risultamento si adatta eziandio al cono.
191.	110.	A determinare prossimamente i centri di gravità delle figure piane si ha

$$p = \frac{0y_1 + 1.4y_2 + 2.2y_3 + 3.4y_4 + 4.2y_5 + \text{---} (n-1)y_n}{y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + \text{-----} y_n} h$$

192.	111.	Alla determinazione prossima dei centri di gravità dei solidi si ha

$$p_1 = \frac{0y_1^2 + 1.4y_2^2 + 2.2.y_3^2 + 3.4y_4^2 + \text{---} + (n-1)y_n^2}{y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2 + 4y_4^2 + \text{-----} + y_n^2} h$$

Pagine | Paragr.

192. 112. $p_r = \frac{0 s_1 + 1.h s_2 + 2.2 s_3 + 3.h s_4 + \dots + (n-1) s_n}{s_1 + h s_2 + 2 s_3 + h s_4 + \dots + s_n} h$

198. 113. La porzione di superficie generata da una linea piana nella rotazione intorno ad una retta esistente nel piano di lei, eguaglia la lunghezza della generatrice moltiplicata per l'arco del circolo descritto dal centro di gravità della generatrice medesima.

199. 114. Se più linee situate sul medesimo piano ruotano intorno ad un'asse esistente sul piano stesso, la somma delle superficie generate eguaglia il prodotto della somma delle lunghezze delle linee generatrici, nell'arco di circolo descritto dal centro di gravità della loro somma.

197. 115. Il solido generato da una linea piana che ruota d'intorno ad una retta che giace nel piano di lei eguaglia il prodotto dell'area generatrice nell'arco passato dal centro di gravità di lei.

200. 116. Se un numero qualunque di linee giacenti sopra un piano ruotino intorno ad un'asse locato nel piano stesso, la somma dei solidi

Pagina	Parag.	
		generati eguaglia la somma delle aree generatrici moltiplicata per l'arco descritto dal centro di gravità della somma delle aree delle linee stesse.
201.	117.	Se un piano sul quale siano descritte più linee si muova lungo una curva piana conservandosi sempre a lei perpendicolare, la somma delle superficie o dei solidi descritti dalle linee, o dalle loro aree, moltiplicate per l'arco passato dal centro di gravità della somma delle linee o delle loro aree. —
214.	118.	Un sistema variabile di punti sarà in equilibrio se gli uni siano sollecitati verso gli altri secondo le loro mutue distanze, che entrano nella equazione di condizione fra le distanze medesime da forze proporzionali alle prime derivate delle equazioni prese rispetto alle mutue distanze stesse. —
222.	119.	Le forze necessarie

Pagina	Prop.	
		all'equilibrio di un sistema variabile di punti sono proporzionali alle derivate della equazione di condizione, fra le coordinate dei punti, prese rispetto alle coordinate medesime.
231.	120.	L'equazione $Pp + P'p' + P''p''$ ...... $= 0$, mette davanti il teorema delle velocità virtuali; le quali esser debbono indeterminatamente piccole in generale.
232.	121.	Se più forze Q, Q', Q'' &c. siano applicate al medesimo punto, si ha $Qq + Q'q' + Q''q'' +$ ...... $= 0$, la quale ha luogo eziandio per le velocità virtuali finite.
234.	122.	Il centro di gravità di un sistema di pesi tra sè legati di una maniera qualunque, è in generale alla massima o minima altezza, allorchè i pesi sono in equilibrio. Alla minima altezza l'equilibrio è stabile; alla massima istantaneo.
236.	123.	Se ad un sistema di pesi in equilibrio diasi un movimento indeterminatamente piccolo, il centro di gravità del sistema non s'innalza nè s'abbassa.

Pagina	Paragr.	
248.	124.	Per una macchina che si muova di moto uniforme si ha $uQ_1 = u_1 f$.
249.	125.	L'effetto di una macchina è presentato da $fu_1 t$.
251.	126.	Al determinare Q ponesi una delle infrascritte equazioni $Q = \mathfrak{F}(1-\frac{u}{U})$, $Q = \mathfrak{F}(1-\frac{u^2}{U^2})$, $Q = \mathfrak{F}(1-\frac{u}{U})^2$. A quest'ultima che è dovuta ad Eulero, viene data la preferenza da Prony.
252.	127.	Si ha $u = U(1-\sqrt{\frac{fp_1}{p\mathfrak{F}}})$; $u_1 = U\frac{p_1}{p}(1-\sqrt{\frac{fp_1}{p\mathfrak{F}}})$
253.	128.	$fu_1 t = U\frac{p_1}{p}(1-\sqrt{\frac{fp_1}{p\mathfrak{F}}})ft$
253.	129.	$\frac{u_1}{u} = \frac{4}{9}\frac{\mathfrak{F}}{f}$ pel massimo effetto della macchina —
	130.	Si ha pure $u = \frac{1}{3}U$, $f = \frac{4}{9}\frac{p}{p_1}\mathfrak{F}$.
	131.	Se i due capi di una corda sieno attaccati a due punti fissi, e ad un punto di lei sia congiunta un'altra corda, mediante un nodo fisso, ed alla quale sia applicata una potenza; nell'equilibrio si avrà $T = \frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $T' = \frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$
	132.	Se ad un nodo immobile m (fig. 55) siano applicate tre forze P', P'', P''' proporzionali ad mA, mB, mD, nell'equilibrio, il nodo

Pagina	Parag.

m è situato nel centro di gravità del triangolo ABD. Se m sia il centro di gravità del triangolo ABD, e le tre forze siano proporzionali ad mA, mB, mD, le forze P', P'', P''', sono in equilibrio. Se le forze sono in equilibrio e che m sia il centro di gravità del triangolo ABD, le forze saranno proporzionali ad mA, mB, mD.

133. Per un poligono chiuso, regolare e di qualunque numero di lati, si ha

$$t = \frac{r(P' + P'' + P''' + \text{---})}{M}.$$

134. Per un poligono aperto di m lati, si ha in generale

$$f^{(m)}\,\theta\, f^{(m)}\hat{X} + P^{(m+1)}\,\theta\, P^{(m+1)}\hat{X} = 0,$$

$$f^{(m)}\,\theta\, f^{(m)}\hat{Y} + P^{(m+1)}\,\theta\, P^{(m+1)}\hat{Y} = 0,$$

$$f^{(m)}\,\theta\, f^{(m)}\hat{Z} + P^{(m+1)}\,\theta\, P^{(m+1)}\hat{Z} = 0,$$

pel punto (m+1) esimo dalle quali si deducono le equazioni di ciascun punto ponendo a vece di m, 1, 2, — (m−1). Si hanno inoltre le equazioni di condizione fra i coseni degli angoli che formano le direzioni delle forze e dei lati cogli assi coordinati ortogonali.

Pagina | Parag.

135. Se il primo punto sia fisso, le equazioni a lui relative sono

$$f'\theta f'\hat{X} = P''\theta P''\hat{X} + P'''\theta P'''\hat{X}$$

$$f'\theta f'\hat{Y} = P''\theta P''\hat{Y} + P'''\theta P'''\hat{Y}$$

$$f'\theta f'\hat{Z} = P''\theta P''\hat{Z} + P'''\theta P'''\hat{Z}$$

136. Se l'ultimo punto sia fisso, per lui sarà

$$f'\theta f'\hat{X} + f^{(m)}\theta f^{(m)}\hat{X} + P''\theta P''\hat{X} + \text{-----} P^{(m)}\theta P^{(m)}\hat{X} = 0,$$

$$f'\theta f'\hat{Y} + f^{(m)}\theta f^{(m)}\hat{Y} + P''\theta P''\hat{Y} + \text{-----} P^{(m)}\theta P^{(m)}\hat{Y} = 0,$$

$$f'\theta f'\hat{Z} + f^{(m)}\theta f^{(m)}\hat{Z} + P''\theta P''\hat{Z} + \text{-----} + P^{(m)}\theta P^{(m)}\hat{Z} = 0.$$

137. Se il poligono sia chiuso pei diversi vertici sarà

$$1^\circ \begin{cases} f^{(m)}\theta f^{(m)}\hat{X} + P'\theta P'\hat{X} = f'\theta f'\hat{X}, \\ f^{(m)}\theta f^{(m)}\hat{Y} + P'\theta P'\hat{Y} = f'\theta f'\hat{Y}, \\ f^{(m)}\theta f^{(m)}\hat{Z} + P'\theta P'\hat{Z} = f'\theta f'\hat{Z}, \end{cases}$$

$$\text{estremo } m \begin{cases} f^{(m-1)}\theta f^{(m-1)}\hat{X} + P^{(m)}\theta P^{(m)}\hat{X} = f \ldots \\ f^{(m-1)}\theta f^{(m-1)}\hat{Y} + P^{(m)}\theta P^{(m)}\hat{Y} = f^{(m)}\theta \ldots \\ f^{(m-1)}\theta f^{(m-1)}\hat{Z} + P^{(m)}\theta P^{(m)}\hat{Z} = f^{(m)} \ldots \end{cases}$$

138. Siano gli estremi d'una corda immobilmente fissi, alla quale sia applicata la forza P mediante altra corda attaccata ad un anello

Pagina	Parag.	
		scorrevole lungo la prima; e nell'equilibrio la direzione della forza P dovrà dividere in due egualmente l'angolo formato dalle due porzioni di corda comprese fra l'anello e i punti fissi.
		139. Si è sciolto l'infrascritto problema: Data la lunghezza di una corda i cui capi siano attaccati a due punti fissi situati comunque rispetto all'orizzonte, trovare la posizione di un peso P attaccato alla corda col mezzo di un anello scorrevole lungo di lei.
		140. Se ad una corda i capi della quale siano uniti, si applicano delle forze P', P'' ... mediante anelli scorrevoli lungo la corda, nell'equilibrio le porzioni di corda fra un'anello e l'altro essere debbono egualmente tese, e le direzioni delle forze applicate agli angoli del poligono dividere si debbono per metà.
		141. La curva funicolare piana è presentata dalla $dy\int X'ds - dx\int Y'ds = 0$.

Pagina	Parag.	
	1	142. Detta T la tensione, sarà

$$T=\sqrt{(\int X'ds)^2+(\int Y'ds)^2},$$

$$T = C - \int(X'dx + Y'dy)$$

143. Due delle tre equazioni

$$dx\int X'ds - dx\int Y'ds = 0,$$

$$dz\int X'ds - dx\int Z'ds = 0,$$

$$dz\int Y'ds - dy\int Z'ds = 0,$$

danno la curva funicolare a doppia curvatura. —

144. La tensione T è presentata da

$$T=\sqrt{(\int X'ds)^2+(\int Y'ds)^2+(\int Z'ds)^2}$$

$$T = C - \int(X'dx + Y'dy + Z'dz).$$

145. Se le forze sollecitanti il filo siano pel medesimo piano e nelle direzioni delle normali, l'equazione della curva funicolare è

$$dy\int Ndy + dx\int Xdx = 0.$$

146. La tensione T è costante.

147. Si ha ancora $Nds + Tdq = 0$,

148. La forza normale applicata alla curva funicolare nella fatta ipotesi è sempre reciprocamente proporzionale al raggio di curvatura.

149. L'equazione della catenaria:

$$A\omega dx - A\theta\omega dy = b s dx.$$

Pagina	Parag.	

150. La minima tensione nella catenaria ha luogo nel punto infimo di lei.

151. L'equazione della lamina elastica è

$$P((y+c)\theta\gamma - x\theta\gamma) = -\frac{by''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

da cui deducesi

$$Pzz' = -\frac{b\theta\gamma u u'}{(u^2+2\theta\gamma u+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

152. All'equilibrio della leva sono necessarie le sottoscritte condizioni

= 1.° Che le due forze P, e Q sollecitanti la leva siano nel medesimo piano con l'ipomoclio.

= 2.° Che i momenti delle due forze P e Q relativi all'ipomoclio siano eguali.

= 3.° Che le due forze P e Q tendano a far ruotare la leva in sensi contrarii.

153. La pressione sopportata dall'ipomoclio è assolutamente la medesima che se le due forze P e Q vi si trasportassero a se parallele senza portare cambiamento all'intensione e direzione loro.

154. Nella leva retta le due forze P e Q parallele applicatevi, sono in ragion reciproca

Pagine	Paragr.

delle braccia di leva. —

155. Al far uso di una leva il cui peso non entri per nulla nell'equilibrio delle forze, non si avrà che a collocare di guisa che la verticale che passa pel centro di gravità della leva passi eziandio per l'ipomoclio.

156. Mediante una leva di secondo genere la minima potenza tiene in equilibrio la resistenza che $x=\sqrt{\frac{2Q}{q}}$, sia la lunghezza della leva. —

157. Per l'equilibrio sul piano inclinato esser dee

$$Pp - Qq = 0. —$$

158. La pressione sul piano inclinato è presentata da $N = P\theta\omega' + Q\theta\omega''$, ovvero da

$$N = Q\frac{\theta(\omega'+\omega'')}{\theta\omega'}.$$

Se Q sia verticale, si ha

$$N = \frac{Q\theta(\omega'-\omega)}{\theta\omega'}, \text{ e } P.BA\theta\omega' = Q.BC.$$

159. Se P sia orizzontale, sarà

$$\frac{Q}{P} = \frac{CA}{BC}. —$$

160. Se P sia parallela alla lunghezza del piano, si avrà

$$\frac{Q}{P} = \frac{BA}{BC}. —$$

161. Si ha $Q:P:N::\theta\omega':\theta\omega'':\theta\beta$

Pagine	Parag.

162. Per due punti materiali esistenti sopra due piani inclinati della medesima altezza, come nella figura (—) si ha $P \operatorname{sen} \omega' = P' \operatorname{sen} \lambda$. Se P e P' siano i pesi dei punti materiali sarà $\frac{P}{P'} = \frac{HB}{HA}$.

163. Per l'asse nella ruota si ha $P : Q :: DA : BC$. Si determinano le pressioni esercitate sopra i sostegni.

164. Tenendo conto dei raggi delle corde, si ha

$$P(r + CB) = Q(r' + DA).$$

Se abbiasi $r : r' :: BC : AD :: R : R'$, l'equazione di equilibrio si mantiene la stessa che per le corde supposte linee materiali.

165. Per le ruote dentate, si ha $P . R . R' . R'' \ldots R^{(m)} = P^{(m)} . r . r' . r'' \ldots r^{(m)}$, e $C^{(m)} = \frac{n . n' . n'' \ldots n^{(m-1)} C}{N . N' . N'' \ldots N^{(m-1)}}$.

166. Nella girella fissa nel centro si ha $N : T :: DE : CD$.

167. Per la girella mobile si ha $P : P' :: 1 : 2 \cos \omega$.

168. Per un sistema di girelle mobili come nella figura si ha $Q = 2^n \cos\omega \cos\omega' \cos\omega'' \ldots \cos\omega^{(n-1)} P$. Se $\omega = \omega' = \omega'' \ldots = \omega^{(n-1)} = 0$

Pagine — Paragr.

si ha $Q = 2^{n} P$

169. Per le taglie come nelle figure si ha $R = P(\theta\delta + \theta\delta' + \theta\delta'' \ldots)$
Se $\delta = \delta' = \delta'' = \ldots = 0$, sarà
$R = nP$, oppure
$R = (2n+1)P$.

170. Per la vite si ha $2\pi L \cdot P = hR$

171. Per la vite perpetua si ha
$2\pi L P = hQ'$.

172. Figurando più ruote dentate unite alla ruota perpetua si ha $\frac{2\pi L \cdot P}{h} \cdot R' R'' R''' \ldots$
$= P^{(m)} r' \cdot r'' \cdot r''' \ldots r^{(m)}$

173. Pel cuneo si ha $P : Q + Q' :: CB :$

174. Se il cuneo tenda ad allontanare l'uno dall'altro due solidi poggianti sopra un piano orizzontale sarà

$$Q' = \frac{\theta P}{\theta(GID' + RID)} ;$$

$$Q = \frac{\theta G}{\theta(GID' + RID)}$$. dalle quali

deduconsi varie conseguenze.

175. L'attrito si distingue in tre specie:
1.° Quella de' corpi, che strisciano sopra un piano.
2.° Quella dei corpi che ruzzolano sopra un piano.
3.° Quella di una superficie concava

Pagine	Parag.

che gira intorno ad una concava, od è convesso una concava intorno ad una convessa.

176\. Se l'inclinazione necessaria a porre in moto un corpo su di un piano inclinato sia ω, e sia f la relazione dell'attrito alla pressione si avrà

$f = \sigma\omega = \frac{A}{B}$, essendo A, l'altezza, B la base del piano inclinato.

177\. L'equazione d'equilibrio sul piano inclinato avendo riguardo all'attrito è

$$P = \frac{Q(\theta\omega'' + f\theta\omega'')}{\theta\omega' - f\theta\omega'}$$, e se Q sia un peso

$$P = \frac{Q(\theta\omega + f\theta\omega)}{\theta\omega' - f\theta\omega'}.$$

178\. Se P agirà secondo la lunghezza del piano, si ha

$P = Q(\sigma\omega + f\theta\omega)$, e se orizzontalmente

$$P = \frac{Q(\sigma\omega + f)}{1 - f\sigma\omega}.$$

179\. Per l'asse nella ruota avendo rispetto all'attrito l'equazione d'equilibrio è

Pagina | Paragrafi

$$P = \frac{r}{l} Q \frac{h + 2f\pi r}{2\pi r - fh}.$$

180. Per la leva si ha

$$Pp = Qq + \frac{rf(P^2 + 2QP\cos\theta + Q^2)}{\sqrt{1+f^2}}$$

che riducesi alla

$$Pp = Qq + \frac{rf(P+Q)}{\sqrt{1+f^2}},$$ se le forze P e Q sono parallele.

181. Ordinariamente f è piccolissimo di guisa che f^2 si può trascurare e dall'antecedente si ha

$$P = \frac{Q(q+rf)}{p-rf}.$$

182. Per tre leve si ha

$$P = Q\frac{(q+rf)(q'+r'f)(q''+r''f)}{(p-rf)(p'-r'f)(p''-r''f)}$$

se $p=p'=p''$, $q=q'=q''$, $r=r'=r''$, si ha

$$P = Q\left(\frac{q+rf}{p-rf}\right)^3.$$

In generale per n leve nelle med.e supposizioni, si ha

$$P = Q\left(\frac{q+rf}{p-rf}\right)^n.$$

183. Per le ruote dentate, sia p il braccio di leva col quale la potenza muove la ruota, a la distanza del centro della

Pagina	Paragrafi

ruote dal punto ove il dente
di lei tocca l'ala del rocchetto,
b la distanza del centro del
rocchetto da così fatto punto,
e d il raggio del cilindro
infisso al rocchetto, e l'equa-
zione d'equilibrio è

$$P = \frac{2ad}{pb}(\cos y + f \operatorname{sen} y),$$ essendo
y l'angolo che fa a con
b prolungata. ——

184. Il massimo valore di
P vien dato dalla

$$P = \frac{2ad}{pb}\sqrt{1+f^2}.$$ ——

185. Sia a l'altezza del cuneo
isoscele, e b la testa, e
detta P' la forza d'aggiu-
gnersi a P per vincere l'at-
trito, s'avrà

$$P' = \frac{2f P.a}{b - 2fa}.$$ ——

186. L'equazione d'equilibrio nel-
la girella avuto riguardo alla
rigidità delle funi, e detto
r il raggio della girella,
P' il peso che discendendo fa
innalzare il peso P, ed essen-
do a la diminuzione del brac-

Pagina Paragrafi

cio di leva col quale agisce P', ed α' l'aumento del braccio di leva col quale agisce P, l'equazione d'equilibrio è

$$P' - P = \frac{P(\alpha + \alpha')}{r - \alpha},$$ ed essendo prossim. $\alpha = 0$, si ha

$$P' - P = \frac{\alpha}{r} P.$$

187. Avendo inoltre riguardo all'attrito, ed essendo λ la totale lunghezza della corda avvolta si avrà

$$P = \frac{P'}{e^{\frac{f\lambda}{r}}}.$$

188. La formola, che rappresenta con bastante esattezza le forze necessarie a piegare una corda, è

$\frac{r_1^m}{r}(a + bP')$, ove r_1 è il diametro della corda, r diametro del cilindro cui ella s'avvolge, a, b due quantità costanti che l'esperienza determina per le corde della medesima natura, e P' il peso della corda sostenuto.

Pagine	Paragrafi	

189. Per l'equilibrio nell'asse della ruota, avendo rispetto all'attrito e alla rigidità delle corde, essendo R il raggio della ruota, r_n il raggio del cilindro, P la potenza applicata alla ruota, e Q la resistenza applicata al cilindro, si ha

$$PR = Qr + r_n f(P+Q) + r_1^m (a+bQ)$$

190. Se la ruota sia mossa da potenze eguali applicate alle estremità opposte di manovelle che traversano il cilindro, si avrà

$$PR = Q(r + r_n f) + r_1^m (a+bQ)$$

191. Supponendo una taglia a corde parallele; che siano eguali i raggi delle girelle di cui si compone la taglia, e presentati da δ; e che eguali pure siano i raggi degli assi delle girelle stesse; se dicasi K il numero delle porzioni di corda che vanno dall'una all'altra armatura, si avrà

$$P = \frac{A^K(A-1)}{A^K-1}\,Q,$$ essendo

$$A = \frac{\delta + f r_n + r_1^m b}{\delta - f r_n}.$$

Pagina | Paragrafi

191. Posto γ il coefficiente costante per cui moltiplicando la superficie, si ha la coesione che P sia il peso del prisma di terra che si appoggia ad un muro verticale con un cateto, e di cui h è la lunghezza; essendo x la lunghezza dell'altro, e Q la resistenza del muro e δ la densità della terra, per l'equilibrio si ha

$$Q = \frac{\frac{\delta h x}{2}(h - f x) - \gamma(h^2 + x^2)}{x + f h}$$

192. Il valore di x che corrisponde alla massima pressione del triangolo contro il muro è

$$x = -hf \pm h\sqrt{f^2+1}\,;$$ a cui corrisponde

$$Q = a h^2 - \gamma b h,$$ essendo

$$\frac{-\delta(f \mp \sqrt{f^2+1})(1 + f^2 \mp f\sqrt{f^2+1})}{\pm 2\sqrt{f^2+1}} = a$$

$$2\gamma(\pm\sqrt{f^2+1} + f) = b.$$

193. Posto ω l'angolo che fa l'ipotenusa del triangolo col lato h si ha

Pagina	Paragrafi

$\sigma w = -f + \sqrt{f^2+1}$. —

194\. Supposti i tagli perpendicolari alla curva interiore della volta, e che A eguagli la pressione orizzontale costante al rigoglio, e la risultante delle forze verticali eguagli il peso p. di una porzione di volta, si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A}{\int p ds} = \frac{A}{M} \quad \text{fatto}$$

$\int p ds = M$, essendo l'origine al rigoglio, e gli assi uno verticale, e l'altro orizzontale. —

195\. Posto α l'angolo che il taglio il quale termina la porzione di volta, fa con la verticale, si avrà

$M = A\sigma\alpha$, e quindi

$$dM = \frac{A\,d\alpha}{\theta^2\alpha}$$

196\. Si trova inoltre

$$\frac{A\,d\alpha}{\theta^2\alpha} = z ds + \frac{1}{2} z^2 d\alpha$$ ove z rappresenta la lunghezza del taglio. —

(197) Se R presenti il raggio d'osculo della curva interiore nel punto cui il taglio corrisponde, si ha pure

Pagina	Paragrafi

$z = -R + \sqrt{R^2 + \frac{2A}{\theta^2 a}}$, ove $2A$ è costante.

198. Se nel rigoglio $z = m$, si ottiene

$z = -R + \sqrt{R^2 + \frac{m^2 + 2Rm}{\theta^2 a}}$, e posto

$2A = C$, si ha ancora

$z = -R + \sqrt{R^2 + C\frac{ds^2}{dy^2}}$ essendo

s un'arco della curva interiore.

199. Se l'origine sia al rigoglio su la curva interiore, essendo le coordinate ortogonali, ed x, y, x_1, y_1 le coordinate del profilo della volta corrispondenti al medesimo taglio, s'hanno le due equazioni

$(y_1 - y)dy - (x - x_1)dx = 0$

$(y_1 - y)\frac{ds}{dx} = -R + \sqrt{R^2 + C\frac{ds^2}{dy^2}}$

$= -R + \sqrt{R^2 + (m^2 + 2mR)\frac{ds^2}{dy^2}}$.

200. L'equazione

$y = -\frac{Kp}{2\sqrt{p^2+1}} + \frac{C}{2K}\log(p + \sqrt{p^2+1})$

ove K è la lunghezza costante del taglio, presenta la curva interiore, cui corrisponde l'esteriore a lei parallela, essendo

Pagina | Paragrafi

$$p = \left(\frac{G'^2 - 2GG' - 4Kx^2 + 4KG'x}{2G^2} \pm \sqrt{\left(\frac{G'^2 - 2GG' - 4Kx^2 + 4KG'x}{2G^2} \right)^2 + \frac{4K^2x^2 + 4KG'x}{G^2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Avendo rispetto all' attrito si ottiene

$$N = \frac{A(\sigma\alpha \pm f)}{1 \mp f\sigma\alpha}.$$

(a) Dinamica

2)

Sezione II.ª

Capitolo XXXIII.º (a)

Delle forze

La Dinamica è la parte della Meccanica, che insegna a risolvere le quistioni relative ai moti dei sistemi de' corpi, considerando il moto particolare di ciascheduno come prodotto sì dalle azioni che gli altri corpi esercitano sopra di lui, che dalle azioni che gli altri corpi esercitano sopra di lui, che dalle azioni delle potenze qualunque, alle quali egli è sottomesso.

I dati e le incognite di così fatte quistioni riferire si possono ai sistemi delle forze, ovveramente ai sistemi dei corpi.

Così, ad esempio, allorchè un sistema dato di corpi aver debba dei moti, dai quali risultino effetti determinati, si trovano dipendentemente dalle leggi della

Dinamica le forze capaci di produrre così fatti moti; e per converso, se siasi obbligato impiegare delle date forze alla determinazione di voluti effetti, si trovano per le stesse leggi la composizione del sistema dei corpi al quale fa mestieri applicare le forze, la durata della loro azione necessaria al producimento di cotali effetti. —

La teorica delle macchine in moto è un corollario della soluzione di questi due problemi. D'altri così un sistema di corpi va soggetto a cambiamenti di forma dipendenti dalle forze che lo sollecitano, le quali forze dipendono esse medesime dalle rispettive posizioni dei corpi. Se le leggi, alle quali le loro azioni si trovano legate, sono conosciute, come eziandio lo stato del sistema in una certa epoca, la Dinamica offerisce i mezzi per conchiudere lo stato del medesimo sistema ad epoche qualunque anteriori o posteriori. —

Le forze sono proporzionali alle velocità che esse imprimono.

La forza viva di un corpo in moto è misurata dal prodotto della massa nel quadrato della velocità.

La forza morta tende a produrre continuamente il suo effetto, ma impedita da ostacoli invincibili, si rimane semplice pressione.

La forza istantanea e la continua sono di natura differente

Capitolo XXXIV.°

Del moto rettilineo

Sia S la distanza da un punto fisso di un mobile nel principio del suo moto uniforme, s lo spazio passato nel tempo t con la velocità v, e si avrà

(1) $s = vt$

(2) $s = S + vt$.

Per un'altro mobile si avrà similmente

(2') $s' = v't$,

(3) $s' = S' + v't$.

Se due mobili si muovano per la medesima curva chiusa, detto $T^{(n-2)}$ il tempo valicato dal principio del moto fino all'incontro n^{esimo}, e p il perimetro della curva, sarà

(4) $T^{(n-2)} = \frac{S' + (n-1)p}{v - v'}$,

(5.) $s = v \frac{S' + (n-1)p}{v - v'}$,

(6.) $s' = \frac{S'v + (n-1)v'p}{v - v'}$

Nel moto vario si ha

(7) $v = \frac{ds}{dt}$, e

(8) $dv = \frac{d^2s}{dt^2}$; ~~ove dt è costante, cioè t variabile indipendente.~~

~~Le due equazioni~~ —

e detta φ la forza continua che lo produce sarà

(9) $\varphi = \frac{dv}{dt}$, e

(10) $\varphi = \frac{d^2s}{dt^2}$ ove dt è costante, cioè t variabile indipendente.

Le due equazioni (8) e (10) si cambiano nelle due

(11) $dv = \frac{d^2s\,dt - ds\,d^2t}{dt^2}$,

(12) $\varphi dt = \frac{d^2s\,dt - ds\,d^2t}{dt^2}$, nelle quali prendere potrassi qualunque

que variabile indipendente.—

La natura particolare delle quistioni somministra sempre una relazione particolare fra la forza continua Q, la velocità v, e lo spazio s, che al tempo t corrispondono, o almeno fra due o tre di questi elementi, i soli variabili che possono aver luogo nella quistione.

Se abbiasi

(13) $s = F(t)$, si otterrà

(14) $\frac{ds}{dt} = F'(t)$. Reciprocamente se data sia

(15) $v = F'(t) = \frac{ds}{dt}$, s'avrebbe integrando la (13) equazione del moto.

D'ordinario la forza continua Q è data in funzione dello spazio s, passato, ovvero vamente in funzione della velocità v acquistata, o pure in funzione di s e di v nello stesso tempo.

Allora le due equazioni (9)(10) divengono equazioni differenziali di primo e di secondo ordine, delle quali è mestieri trovare gl'integrali. Allorchè

Q è costante, il moto riesce uniformemente vario.

La caduta di gravi nel vuoto mette davanti un esempio del moto uniformemente accellerato. Dalla esperienza si ha

(16.) $v = gt$, essendo g una costante, e quindi

(17.) $Q = g$. Se il valore di v dato dalla (16.) si mette nella (7.), e dipoi s'integri, ottiensi

(18.) $s = \frac{g}{2} t^2 + C$.

Se a $t=0$, corrisponda $s=0$, l'integrale determinato è

(19.) $s = \frac{g}{2} t^2$, onde

(20) $v = \sqrt{2gs}$.

Pel moto accellerato, essendo p la velocità iniziale, s'hanno le equazioni

(7) $v = \frac{ds}{dt}$

(8) $Q = \frac{dv}{dt}$, dalle quali deduconsi le infrascritte

(21.) $v = \sqrt{2Qs + p^2}$,

(22) $v = Qt + p$,

(23) $v = \frac{2s}{t} - p$,

(24) $v = \frac{s}{t} + \frac{1}{2} Qt$,

(25.) $s = \frac{v^2 - p^2}{2Q}$,

(26) $s = \frac{t}{2}(Qt + 2p)$,

$$(27)\quad s = \frac{t}{2}(v+p),$$

$$(28)\quad s = \frac{t}{2}(2v-qt),$$

$$(29)\quad t = \frac{v-\sqrt{v^2-2qs}}{q},$$

$$(30)\quad t = \frac{v-p}{q},$$

$$(31)\quad t = \frac{2s}{v+p},$$

$$(32)\quad p = v-qt,$$

$$(33)\quad p = \frac{2s}{t}-v,$$

$$(34)\quad p = \sqrt{v^2-2qs},$$

$$(35)\quad p = \frac{s}{t}-\frac{qt}{2},$$

$$(36)\quad q = \frac{v^2-p^2}{2s},$$

$$(37)\quad q = \frac{v-p}{t},$$

$$(38)\quad q = \frac{2}{t}\left(v-\frac{s}{t}\right)$$

$$(39)\quad q = \frac{2}{t}\left(\frac{s}{t}-p\right)$$

Inoltre s'hanno le proporzioni $vt : v't' :: s : s' :: v^2 : v'^2 :: t^2 : t'^2$, e $v : v' :: t : t' :: \sqrt{s} : \sqrt{s'}$. — La forza accelleratrice costante q agendo sopra un mobile pel tempo t, facendogli passare con moto uniformemente accellerato lo spazio s, gl'imprime una velocità tale che poi con essa divenuta costante, descriverebbe con moto uniforme nello stesso tempo t uno spazio doppio. —

Le forze accelleratrici costanti sono tra se come gli spazj che fanno passare ad un mobile nell'unità di tempo. —

Pel moto uniformemente ritardato si hanno le due equazioni

(40) $\varphi = \frac{dv_1}{dt_1}$, e

(41) $\varphi ds_1 = -v_1 dv_1$, dalle quali deduconsi le infrascritte

(42) $v_1 = \sqrt{p^2 - 2\varphi s_1}$,

(43) $v_1 = p - \varphi t_1$,

(44) $v_1 = \frac{2s_1}{t_1} - p$,

(45) $v_1 = \frac{s_1}{t_1} - \frac{1}{2}\varphi t_1$,

(46) $s_1 = \frac{p^2 - v_1^2}{2\varphi}$,

(47) $s_1 = \frac{t_1}{2}(2p - \varphi t_1)$,

(48) $s_1 = \frac{t_1}{2}(v_1 + p)$

(49) $s_1 = \frac{t_1}{2}(2v_1 + \varphi t_1)$,

(50) $t_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 2\varphi s_1}}{\varphi}$,

(51) $t_1 = \frac{\sqrt{v_1^2 + 2\varphi s_1} - v_1}{\varphi}$,

(52) $t_1 = \frac{p - v_1}{\varphi}$,

(53) $t_1 = \frac{2s_1}{v_1 + p}$,

(54) $p = v_1 + \varphi t_1$,

(55) $p = \frac{2s_1}{t_1} - v_1$,

(56) $p = \frac{s_1}{t_1} + \frac{1}{2} \varphi t_1$,

(57). $p = \sqrt{v_1^2 + 2 \varphi s_1}$,

(58) $\varphi = \frac{p^2 - v_1^2}{2 s_1}$,

(59) $\varphi = \frac{p - v_1}{t_1}$,

(60) $\varphi = \frac{2}{t_1}\left(\frac{s_1}{t_1} - v_1\right)$,

(61) $\varphi = \frac{2}{t_1}\left(p - \frac{s_1}{t_1}\right)$. ——

La velocità acquistata da un grave, che cade con moto uniformemente accellerato, può farlo risalire all'altezza d'onde è partito. ——

Le proprietà del moto uniformemente ritardato sono le medesime, ma in senso opposto, di quelle del moto uniformemente accellerato. ——

Se h ed l presentino rispettivamente l'altezza e la lunghezza di un piano inclinato, le equazioni del moto di un punto materiale pesante sul piano stesso, saranno

(62) $v = \frac{gh}{l} t$,

(63) $s = \frac{gh}{2l} t^2$; laonde

(64) $v = \sqrt{\frac{2ghs}{l}}$, che riducesi alla

(65) $v = \sqrt{2gh}$, allorchè $s = l$.

La velocità acquistata dal punto materiale passando l'intera lunghezza del piano inclinato, è la stessa che se fosse caduto verticalmente

dall'altezza di lui.

Tutte le corde che partendo da un medesimo punto vanno a terminare alla circonferenza di un circolo, compresovi il diametro verticale che incontra il medesimo punto, sono in egual tempo passate dai diversi mobili che partono tutti nello stesso istante dal prefato punto.

Se il punto materiale assoggettato alla gravità sia costretto a rimanere sopra una curva; posto verticale l'asse delle y, e orizzontale quello delle x, quando il mobile parta da un punto della curva per cui $y = k$ senza velocità iniziale, si ha

(66) $v^2 = 2g(y - k)$.

Allorchè poi il mobile nel punto di sua partenza sia animato da una velocità dovuta all'altezza h, ne viene

(67) $v^2 = 2g(y + h - k)$.

Nel caso che il punto materiale pesante cada senza velocità iniziale lungo una curva, egli in ciaschedun

punto ha la medesima velocità che se fosse liberamente caduto da un'eguale altezza verticale, qualunque sia la curva descritta. Se dunque varii gravi scorrano senza velocità iniziale, de' diversi piani diversamente inclinati, partendo tutti dal medesimo piano orizzontale, avranno le medesime velocità dopo aver passate sui piani, nei quali succede il rispettivo lor moto, delle porzioni che alla medesima altezza siano corrispondenti.

Pel moto sopra una curva s'hanno inoltre le due equazioni

(68) $$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y-k)}}$$

(69) $$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y+h-k)}}$$

Dalla equazione della curva

(70) $y = \varphi(x)$ trarre si può ds in funzione di y e di dy.

Supposto che un punto materiale si muova con moto rettilineo fra due centri A, B, l'attrazione de' quali agisca in

ragione reciproca dei quadrati delle distanze, e detta l la distanza fra i due centri, h la distanza da A, e che all'origine del moto $v = k$, si ha

$$(71)\quad v^2 - k^2 = 2b^2\left(\frac{1}{l-s} - \frac{1}{l-h}\right) + 2a^2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{h}\right)$$

presentando per $\frac{a^2}{s^2}$, $\frac{b^2}{(l-s)^2}$, le due attrazioni.

La distanza da A del punto ove le due attrazioni sono eguali, verrà presentata da

$$(72)\quad s' = \frac{al}{a+b}.$$

Il più piccolo valore di k, affinchè il mobile attinga il punto di eguali attrazioni, è dato dalla

$$(73)\quad k = \sqrt{\frac{2b^2}{l-h} + \frac{2a^2}{h} - \frac{2(b+a)^2}{l}}.$$

Inoltre si ha

$$(74)\quad dt = \frac{\sqrt{sl - s^2}}{\sqrt{2a^2 l + (2b^2 - 2a^2 + l C)s - s^2 C}},$$

che integrare non si fa in termini finiti.

Ma quando la quantità sotto il vincolo radicale nel denominatore è un quadrato, ne viene

$$(75)\quad C = -\frac{2(a \pm b)^2}{l}, \text{ e}$$

$$(76)\quad dt = \sqrt{\frac{l}{2}}\,\frac{\sqrt{ls - s^2}}{al - (a \pm b)s}\,ds;$$

della quale l'integrale è,

secondo che si prende il segno superiore ovvero l'inferiore;

(77) $t = \frac{-\sqrt{2l^3}}{(a+b)^2}\left\{\frac{\frac{1}{2}(a+b)x}{1+x^2} + \frac{1}{2}(a-b)\cdot A(\sigma = x) + \frac{1}{2}\sqrt{ab}\log\frac{x\sqrt{a}-\sqrt{b}}{x\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right\} + C',$

ovveramente

(78) $t = -\frac{\sqrt{2l^3}}{(a-b)^2}\left\{\frac{\frac{1}{2}(a-b)x}{1+x^2} + \frac{1}{2}(a+b)\cdot A(\sigma = x) - \sqrt{ab}\,A\left(\sigma = x\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\right\} + C'',$

dove $x = \frac{\sqrt{ls-s^2}}{s}$. Le costanti arbitrarie C', C'' si determinano per la condizione che sia $t = o$ quando $s = h$.

Pel moto di un grave, che verticalmente discenda, supponendo che la resistenza del mezzo sia proporzionale al quadrato della velocità, e posto che mv^2 presenti una così fatta resistenza, e g la forza costante di gravità, si ha

(79.) $2\sqrt{gm}\,t = \log\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{m}}{\sqrt{g}-v\sqrt{m}}$, ed anche

(80.) $v = \sqrt{\frac{g}{m}}\,\frac{1-e^{-2\sqrt{gm}\,t}}{1+e^{-2\sqrt{gm}\,t}}$. Di più

(81) $-2ms = \log\left(1-\frac{m}{g}v^2\right)$, e

(82) $s = \frac{1}{2m}\log\left(\frac{\left(1+e^{-2\sqrt{gm}\,t}\right)^2}{4e^{-2\sqrt{gm}\,t}}\right)$. *

Il moto di un corpo pesante

che cade attraverso di un mezzo omogeneo, tende continuamente a diventare uniforme. La velocità costante del suo moto finale è in ragione reciproca della radice quadrata di m.

Se il grave sia spinto da una forza istantanea dal basso all'alto, si ha

(83) $t\sqrt{mg} = A(\sigma = \sqrt{\frac{m}{g}}.a) - A(\sigma = \sqrt{\frac{m}{g}}.v)$, e

(84) $2ms = \log\frac{g + ma^2}{g + mv^2}$.

Si suppone che sia $t = 0$, $s = 0$ quando $v = a$.

Presentando per h la massima altezza cui il mobile attinge, si ha

(85) $h = \frac{1}{2m}\log(1 + a^2\frac{m}{g})$.

Per trasportare le trovate equazioni al piano inclinato, supposto che la resistenza di attrito sia proporzionale al quadrato della velocità, porre vi si debbe $g\frac{h}{l}$ in luogo di g, essendo h ed l l'altezza e la lunghezza del piano inclinato.

Allorchè il piano è orizzontale, si ha

$$(86)\quad v = \frac{a}{1+amt}\ ,\ e$$

$$(87)\quad s = \frac{1}{m}\log(1+amt).$$ La (86) metti davanti che la velocità diminuisce al crescere di t.

Capitolo XXXV.°

Del moto curvilineo di un punto materiale libero

Il moto di un punto materiale che non si fa in linea retta è necessariamente l'effetto di più forze che agiscono su di lui in direzioni differenti.

Presentando per X, Y, Z, le somme delle forze continue che agiscono sul mobile nelle rispettive direzioni di tre assi coordinati ortogonali x, y, z, le equazioni generali del moto di un punto materiale libero nello spazio sono le infrascritte.

$$(88)\quad X = \frac{d^2x}{dt^2}\ ,$$

$$(89)\quad Y = \frac{d^2y}{dt^2}\ ,$$

$$(90)\quad Z = \frac{d^2z}{dt^2}\ .$$

La velocità iniziale del punto, la direzione di lei unitamente alla posizione del mobile all'origine del moto, servono a determinare

le sei costanti arbitrarie contenute negli integrali completi di codeste tre equazioni di secondo ordine.

Allorchè si è certi che il punto muovere si debba in un piano, due sole delle prefate equazioni bastano all'uopo.

Giunto che siasi ad integrare le (88) (89) e (90), eliminando t s'ottengono due equazioni, che rappresentano due superficie, dalla intersecazione delle quali nasce la trajettoria che dal mobile verrà passata. Se il mobile non sia animato che da forze istantanee, si ha

(91) $\frac{d^2x}{dt^2}=0,$

(92) $\frac{d^2y}{dt^2}=0$

(93) $\frac{d^2z}{dt^2}=0,$ delle quali gl'integrali completi sono

(94) $x=at+a'$

(95) $y=bt+b'$

(96) $z=ct+c'$, essendo $a, a'; b, b'; c, c'$; le costanti arbitrarie

Posta l'origine delle coordinate al punto donde parte il mobile, e che il tempo t abbia il suo principio all'istante

della partenza, s'avrà

(97) $x = at$,

(98) $y = bt$

(99) $z = ct$; e quindi

(100) $x = \frac{az}{c}$,

(101) $y = \frac{bz}{c}$, che mettono davanti la trajettoria essere una retta.

Inoltre il moto del punto materiale nello spazio è uniforme.

Sia v la velocità del mobile in un punto qualunque della trajettoria, e si avrà

(102) $v = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}} = \frac{ds}{dt}$, e

(103) $\cos v^{\wedge}X = \frac{dx}{ds}$,

(104) $\cos v^{\wedge}Y = \frac{dy}{ds}$,

(105) $\cos v^{\wedge}Z = \frac{dz}{ds}$.

Laonde se d'improvviso venissero a cessare le forze che rendono curvo, e fanno variare il moto di un punto materiale nello spazio, il mobile seguirebbe a muoversi secondo la tangente della trajettoria nel punto della cessazione con una velocità eguale all'elemento della trajettoria diviso per l'elemento del tempo.

La forza continua scomposta secondo la tangente egua-
glia

glia la seconda derivata dello spazio considerato come funzione del tempo, come si è veduto pel moto rettilineo.—

Dalle equazioni (88)(89)(90), supposto che A sia la velocità corrispondente al punto (x_1, y_1, z_1) ottiensi

(106) $v^2 - A^2 = 2f(x, y, z) - 2f(x_1, y_1, z_1)$;

quando $Xdx + Ydy + Zdz$ è differenziale esatto, e $f(x, y, z)$ ne è l'integrale. Questa condizione ha sempre luogo se le forze continue sollecitanti il mobile siano dirette verso centri fissi, essendo l'intensione di ciascuna di cotesta forze una funzione della distanza del mobile dal centro cui è diretta.—

Se il mobile sia sollecitato da una forza sola diretta verso un centro fisso, le equazioni (88) (89) e (90) hanno per integrali primi

(107) $xdy - ydx = cdt$,

(108) $zdx - xdz = c'dt$,

(109) $ydz - zdy = c''dt$, e la trajettoria è una curva piana.

Ogni volta che la forza continua, che agisce sopra un mobile,

bile, è costantemente diretta verso un punto fisso, le aree descritte intorno a questo punto dal raggio vettore del mobile projettato sopra un piano che passi pel punto stesso, sono proporzionali ai tempi spesi a descriverle, e reciprocamente. Il piano di projezione può figurarsi il piano stesso, che passa per la trajettoria che è piana.

Nello stesso caso le velocità angolari sono in ragione reciproca dei quadrati dei raggi vettori. Le velocità effettive del mobile nello spazio sono reciprocamente come le perpendicolari che dal centro fisso si fanno cascare su le tangenti della trajettoria in due diverse situazioni del mobile nello spazio.

La forza continua tendente verso un centro fisso è proporzionale al raggio vettore diviso pel prodotto del raggio osculatore nel cubo della perpendicolare che dal centro fisso si fa cascare su la tangente.

Capitolo XXXVI°.

Del moto dei projetti nel vuoto e nel mezzo resistente =

Sia a la velocità di projezione, α l'angolo che la direzione di lei fa con l'asse delle x orizzontale, essendo l'asse delle y verticale, e l'origine al punto d'onde parte il projetto, e si avrà

(110) $y = \tan\alpha \, x - \frac{g}{2a^2 \cos^2\alpha} x^2$, la quale mostra la trajettoria essere una parabola. Si ha poi

(111) $v^2 = a^2 - 2gy$, che dà la velocità del projetto in ogni punto della trajettoria.

Le coordinate dell'altezza del getto sono

(112) $x = \frac{a^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$,

(113) $y = \frac{a^2 \sin^2\alpha}{2g}$. L'ampiezza del getto eguaglia $\frac{a^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Perchè il projetto arrivi al punto di cui $x = p$, $y = q$, sono le coordinate, essendo

(114) $\tan\alpha = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - 4hq - p^2}}{p}$, essendo h l'altezza dovuta alla velocità a.

Supposto che R presenti la resistenza del mezzo, la trajettoria sarà tuttavia sopra un piano, e l'equazioni del moto saranno

(115) $\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{dx}{ds}$,

(116) $\frac{d^2y}{dt^2} = -g - R\frac{dy}{ds}$.

Nella ipotesi che la resistenza sia proporzionale al quadrato della velocità, si avrà $R = m\frac{ds^2}{dt^2}$; il perchè le (115) (116) muterannosi nelle

(117) $\frac{d^2x}{dt^2} = -m\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}$,

(118) $\frac{d^2y}{dt^2} = -g - m\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}$; pongasi per semplicità

(119) $p = \frac{dy}{dx}$, e

(120) $C = \sigma\alpha\sqrt{1+\sigma^2\alpha^2} + \log(\sigma\alpha + \sqrt{1+\sigma^2\alpha^2}) + \frac{g}{\alpha^2 m\sigma\alpha^2}$, e la soluzione del problema dipenderà dalle tre infrascritte equazioni

(121) $dx = \frac{dp}{m(p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) - C)}$

(122) $dy = \frac{p\,dp}{m(p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) - C)}$

(123) $dt = \frac{-dp}{\sqrt{mg}\sqrt{C - p\sqrt{1+p^2} - \log(p+\sqrt{1+p^2})}}$

le quali per mala ventura integrare non si sanno esattamente

Mediante le (121) (122) descriver-
se si può la trajettoria per
punti. La velocità poi del
projetto in funzione di p è
data dalla

(124) $$v^2 = \frac{g(1+p^2)}{m(C - p\sqrt{1+p^2} - \log(p+\sqrt{1+p^2}))}.$$

Nell'aria il ramo discendente
ha un'assindoto verticale, al
quale nel mentre che il pro-
jetto s'accosta, il suo moto ten-
de a divenire uniforme colla

velocità $\sqrt{\frac{g}{m}}$.

Allorchè l'angolo di projezio-
ne è piccolissimo, l'equazione
della trajettoria che sta al
di sopra dell'asse orizzontale
delle x è

(125.) $$y = \sigma\alpha x - \frac{1}{8m^2h}\left(e^{2mx} - 2mx - 1\right).$$

il cui termine $\frac{1}{8m^2h}\left(e^{2mx} - 2mx - 1\right)$
mette davanti in ciaschedun
punto della trajettoria
l'altezza da cui il mobile
è disceso a cagione della gra-
vità, avendo rispetto alla re-
sistenza del mezzo. —

L'altezza del getto vien
data dalle infrascritte equa-
zioni

(126) $$x = \frac{1}{2m}\log(1+4mh\sigma\alpha)$$

(127) $$y = \frac{\sigma\alpha}{2m}\log(1+4mh\sigma\alpha) -$$
$$\frac{1}{8m^2h}(1+4mh\sigma\alpha - \log(1+4mh\sigma\alpha) - 1).$$

e l'ampiezza, dal valore di x differente dallo zero che verifica l'equazione

$$(128.)\quad e^{2mx} = 1 + 2mx + 8m^2 h \sigma dx.$$

Capitolo XXXVII.°

Del moto dei Pianeti

Supposte le tre infrascritte leggi di Keplero:

1.ª I pianeti si muovono in curve piane, e i loro raggi vettori descrivono intorno al centro del Sole delle aree proporzionali ai tempi:

2.ª Le orbite, ciò sono le trajettorie dei pianeti, sono elissi, in uno dei fochi delle quali è situato il centro del Sole:

3.ª I quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei pianeti intorno al Sole sono tra sè, come i cubi dei diametri principali maggiori delle loro orbite: se ne deduce, che la forza continua che agisce sopra ciascun pianeta, e che è applicata al suo centro di gravità, è costantemente nella direzione della retta che congiunge questo centro col centro del Sole. Costante forza continua è poi in

ragion reciproca del quadrato del raggio vettore, e la sua intensione è la stessa per tutti i pianeti all'unità di distanza.

Supposta la legge, secondo la quale agisce la forza continua, se ne deduce, che la trajettoria esser dee una linea di second'ordine, la natura della quale non dipende che dalla velocità e distanza dal Sole iniziale.

Considerando in particolare il caso dell'ellisse, sia v l'angolo che il raggio vettore fa con una retta di posizione data protratta dal fuoco, ϖ l'angolo che il diametro principale maggiore $2a$ fa con la medesima retta, r il raggio vettore, ed e l'eccentricità, e l'equazione della ellissi sarà

(129) $$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)}.$$

Sia la forza continua, che anima il pianeta, presentata da $\frac{\mu}{r^2}$ e fatto

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}=\frac{1}{n},$$ e

(130) $r=a(1-e\cos u)$ si avrà

(131) $nt=u-e\sin u+c$, equazione che dà il valore di u in

funzione di t.

Quindi dalla (131) si ottien[e] il valore di r in funzione di t; e dalla (129) il valo-re di ρ in funzione di t.

Supposta piccolissima l'e[c]centricità e, si potrà trascu-rare e^2, e si avranno le du[e] equazioni

(132) $\rho = nt + 2e\,\mathrm{sen.}\,nt$,

(133) $r = (1 - e\,\mathrm{cos.}\,nt)\,a$.

Capitolo XXXVIII.

Del moto di un punto materiale sopra una data curva

Supposta la curva continua, sia ω l'angolo di contatto, v la velocità del mobile allorchè attinge un punto qualunque della curva cui è costretto di passare, e le componenti di v secondo la tangente a questo punto, e secondo una retta alla tangente perpendicolare, saranno $v\theta\omega$, $v\phi\omega$. —

La componente $v\phi\omega$ viene distrutta dalla resistenza della curva. Essendo $v\phi\omega$ indeterminatamente piccola, figurare potrassi una forza continua, che agisca sul mobile, imprimendogli in ciascheduno punto della trajettoria di lui una velocità in direzione e grandezza eguale a $v.\phi\omega$. Notata cotal forza per Q la resistenza della curva, che distrugge la velocità $v\phi\omega$, sarà equivalente ad una forza eguale ed opposta a Q. La velocità perduta, passando da un punto all'altro della curva, è $2v\phi.\frac{\omega}{2}$, che si trascura perchè indeterminatamente piccola a petto di Q. Dovremo dunque con-

chiudere che lo sforzo che un punto in moto esercita su la curva, che è costretto a descrivere, è la risultante delle due forze Q e P, di cui la prima è dovuta alla velocità del mobile, e la seconda alle forze continue che a lui sono applicate. La resistenza che oppone la curva, è adunque una forza eguale ed opposta a questa risultante.

Sia N la forza normale da cui viene presentata la resistenza della curva, e si avranno le infrascritte equazioni

(134.) $\theta^2 \widehat{NX} + \theta^2 \widehat{NY} + \theta^2 \widehat{NZ} = 1,$

(135.) $\frac{dx}{ds}\theta \widehat{NX} + \frac{dy}{ds}\theta \widehat{NY} + \frac{dz}{ds}\theta \widehat{NZ} = 0,$

(136.) $\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\theta\widehat{NX},$

(137.) $\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\theta\widehat{NY},$

(138.) $\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\theta\widehat{NZ}.$

Mediante queste cinque equazioni eliminare potrassi N, $\theta\widehat{NX}$, $\theta\widehat{NY}$, $\theta\widehat{NZ}$, e la risultante sarà un'equazione di second'ordine contenente x, y, z, t.

La trajettoria considerata

in generale, ossia data dalla intersecazione di due superficie presentate dalle

(139) $f(x,y,z)=0$,

(140) $f_1(x,y,z)=0$,

S'hanno quindi tre equazioni per mezzo delle quali determinare si possono le coordinate del mobile in funzione del tempo.

Dalle trovate equazioni deducesi

(141) $\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = X dx + Y dy + Z dz$, e

(142) $\frac{d^2s}{dt^2} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}$.

Onde la forza continua che sollecita il mobile, scomposta secondo la tangente, eguaglia la seconda derivata dell'arco s della trajettoria considerato come funzione del tempo; la qual cosa abbiamo veduto essere eziandio allorchè il mobile è del tutto libero.

Allorchè X, Y, Z non siano nulle, poniamo essere v la velocità corrispondente alle coordinate x, y, z, ed A la velocità che alle coordinate a, b, c corrisponde, e si avrà

(143) $v^2 - A^2 = 2f_2(x,y,z) - 2f_2(a,b,c)$: la quale ci mette davanti, che

l'aumento del quadrato della velocità, passando da un punto all'altro della trajettoria, non dipende che dalle coordinate di così fatti punti, e dalla forma della funzione $f_r(x,y,z)$, e per nulla dalla natura della trajettoria.

La qual cosa si è pure dimostrata avanti rispetto ad un punto materiale libero.—

La (143) rende aperto eziandio, che se varii corpi sottoposti alle azioni delle medesime forze continue partano da un punto, di cui a, b, c siano le coordinate, con la velocità A, e si muovano sopra differenti curve, avranno tutti acquistata la medesima velocità quando attingeranno la superficie presentata dalla

(144) $f_r(x,y,z) = B$, essendo B costante.

Se il punto sia animato dalla sola gravità g, se ne deduce, che se un numero qualunque di punti materiali possino diverse curve, partendo da un medesimo punto con la stessa velocità, essi saranno animati da velocità uguali, allorchè attingeranno un dato piano orizzontale.—

Sia ρ il raggio di curvatura, e si avrà

(145) $Q = \frac{v^2}{\rho}$ che è la porzione dello sforzo che si esercita contro la

trajettoria, e che dicesi forza centrifuga, la quale di conseguenza è in ragione diretta del quadrato della velocità, e in ragione reciproca del raggio di curvatura, e tenta ad allontanare il mobile dal centro del circolo osculatore. — Le forze I e Q essendo cognite, se ne troverà la risultante, che sarà lo sforzo totale che si esercita contro la trajettoria. Se la trajettoria sia piana, e le forze, che agiscono sul mobile, siano dirette nel piano di lei, dalle equazioni del moto deducesi

$$(126.)\quad \pm N = -v^2 \frac{dx^2}{ds^2}\, d\frac{dy}{dx} + Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds};$$

e quindi si dimostra che N è uguale ed opposta alla pressione $\frac{v^2}{r} - R\theta d.$ ———

Capitolo XXXIX
Della forza centrifuga nel Circolo

Ugenio, e i primi geometri che hanno data la misura della forza centrifuga, l'hanno dedotta dalla considerazione del moto circolare. Figurasi un punto materiale attaccato ad un punto fisso mediante un filo inestensibile, e che al punto s'imprima una velocità qualunque nella direzione della lunghezza di lui, nell'ipotesi che nessuna forza continua non agisca sul mobile. Questo passerebbe un circolo, il cui centro sarebbe il prefato punto, e la lunghezza del filo ne sarebbe il raggio.

Durante il moto il filo che trattiene il mobile, sopporta nel senso di sua lunghezza una certa tensione, la quale altro non è che la forza centrifuga. Applicata al mobile una forza continua equivalente a cotesta tensione, e costantemente diretta verso il centro, si può fare astrazione dal filo, e considerare il mobile come al tutto libero.

Egli è dunque in virtù di questa forza incognita diretta

verso il centro, combinata con l'impulsione primitiva, che il mobile descrive il circolo. Il moto circolare riuscirà uniforme, e detta v la velocità impressa al mobile, t il tempo ed s lo spazio corrispondente, s'avrà

(147) $s = vt$.

Se la forza centrale in un tempo indeterminatamente piccolo agisse sola sul mobile, gli farebbe passare una retta eguale alla projezione dell'arco sul raggio.

Essendo r il raggio del circolo descritto dal mobile, ed f, la forza centrale, s'avrà

(148) $f = \frac{v^2}{r}$. Questo valore di f, è altresì il valore della forza centrifuga.

Sia h l'altezza dovuta alla velocità v, e g la gravità, e risulterà $f:g::2h:r$. Se in una particolare circostanza fosse $2h = r$, sarebbe $f = g$; ed allora il filo attaccato al punto fisso verrebbe teso dalla forza centrifuga che agisce su tutti i punti del mobile, come dal peso del mobile stesso. Nella supposizione però, che il mobile si riguardi come un punto pesante, ovveramente come un corpo di cui le dimen-

sioni siano piccolissime, e però trascurabili a petto della distanza di lui dal punto fisso. Da così fatta supposizione il valore di $\frac{f}{g}$ presenta in generale la relazione della tensione provata dal filo al peso del corpo, che si aggira alla sua estremità.

Sia T il tempo che il mobile impiega a passare la circonferenza intera del circolo che ha r per raggio, e si avrà

(149) $f = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$.

Presentata per G l'attrazione terrestre ovvero la gravità che avrebbe luogo se la terra fosse immobile si ha

(150) $g = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2}$.

Il numero 0,0339 esprime la relazione della forza centrifuga all'equatore alla forza continua costante che produrebbe nel lasso di un secondo una velocità eguale ad un metro.

Ma all'equatore i corpi gravi cadenti acquistano una velocità di 9,78 metri durante il primo secondo di loro caduta: dunque i numeri 0,0339, e 9,78 sono le relazioni della forza centrifuga e della gravità alla medesima forza. Laonde il quoto che ottiensi dal dividere uno di

questi numeri per l'altro è la relazione delle due forze.

Di questa guisa che la gravità è circa 288 tanti la forza centrifuga. Sostituito 289 a 288, si ha dunque

(151) $f = \frac{1}{17^2} \cdot G$.

Nasce quindi, che se il moto della terra intorno al proprio asse fosse 17 volte più rapido, la forza centrifuga all'equatore riescirebbe uguale alla gravità; e di conseguenza i corpi abbandonati a se stessi si rimarebbero in quiete.

Essendo la terra una sferoide schiacciata ai poli, la diminuzione della gravità dal polo all'equatore in luogo di $\frac{1}{289}$ è all'incirca $\frac{1}{170}$ della gravità media.

Capitolo XI.

Delle oscillazioni del pendolo semplice

In generale un pendolo è formato da un solido sospeso all'estremo di un filo che figurasi inestensibile e inflessibile, di cui l'altro estremo è fermato ad un'asse orizzontale intorno al quale può solo liberamente ruotare, ogni altro moto riuscendogli impossibile.

Quando la verticale protratta pel centro di gravità del solido e del filo incontra l'asse di rotazione, il pendolo è in equilibrio. Se, allontanato da così fatta posizione, s'abbandoni di poi a se stesso, egli fa da una parte e dall'altra della verticale un seguito interminato di oscillazioni, la durata delle quali è sempre la stessa, e servono a misurare il tempo. Ma a paragonare tra loro le durate delle oscillazioni di pendoli differenti, i geometri hanno immaginato un pendolo ideale, che nomasi *pendolo semplice*; il quale consiste in un punto materiale pesante sospeso all'estremità di un filo, che suppongasi senza gravità, inflessibile, inestensibile, e

attaccato con l'altra estremità ad un punto fisso. Le oscillazioni di cotesto pendolo si prendono ora ad esaminare, riserbandoci di mettere in seguito davanti come per ciascheduno pendolo composto si determina la lunghezza del pendolo semplice, che fa le oscillazioni in egual tempo.

Sia al solito g la gravità, v la velocità di un punto materiale che si muove sopra una data curva, A la velocità iniziale, e z la coordinata verticale e si avrà

(152) $v^2 = A^2 + 2gz$.

Supponiamo che la trajettoria si componga di due rami, i quali si uniscono nel punto più basso di lei, ove la loro comune tangente è orizzontale. L'ordinata z, e la velocità v aumentano mentre il mobile passa il ramo discendente, ed attingono il loro massimo al punto più basso; il quale trasandato, z e v diminuiscono. Nei punti dei due rami esistenti sulla medesima orizzontale il mobile ha la medesima velocità. S'innalzerà sul ramo ascendente finchè riesca nulla la concepita velocità

Se la velocità iniziale A sia zero, il punto di partenza sarà egualmente distante da un piano orizzontale, che il punto del massimo innalzamento. Il mobile poi impiegherà lo stesso tempo ad aggiungere la massima velocità discendendo, che alla velocità nulla ascendendo. —
Se non sia A = 0, s'innalzerà ad un'altezza maggiore di quella da cui è caduto, ed allora, se la trajettoria sia una curva chiusa, esso oscillerà intorno alla verticale, ovvero sempre si ravvolgerà senza fine intorno al perimetro della curva. Le oscillazioni che si fanno nello stesso lasso di tempo, diconsi *isocrone*.
Le mentovate proprietà di un punto materiale pesante sopra una curva, sono al tutto indipendenti dalla natura di lei, che può essere piana o a doppia curvatura. Esse però suppongono che la trajettoria sia continua. Il tempo che impiega il mobile a fare una intera oscillazione, ovvero a passare l'intero perimetro della trajettoria, vien dato dalla

(153) $dt = \frac{ds}{\sqrt{A^2+2gz}}$.

Data l'equazione della trajettoria, si otterrà s in funzione di z, o per converso; e di conseguenza la (153) s'integrerà almeno per serie. Mutata la trajettoria, se non cangi la relazione fra s e z, la legge del moto varierà punto.

Per un pendolo semplice si ha

(154) $dt = \frac{-a\,d\delta}{\sqrt{2g(h+a\theta\delta-a\theta\alpha)}}$, e

(155) $v = \sqrt{2g(h+a\theta\delta-a\theta\alpha)}$,

ove α è l'angolo iniziale che il pendolo fa con la verticale, δ è l'angolo variabile che il pendolo fa con la verticale stessa, ed a rappresenta la lunghezza del pendolo.

Posto $1-\theta\delta=x$, ed $1-\theta\alpha=\gamma$, se ne deduce

(156) $dt = \frac{a\,dx}{\sqrt{2x-x^2}\sqrt{2g(h+a\gamma-ax)}}$,

(157) $v = \sqrt{2g(h+a\gamma-ax)}$.

Il senoverso x non può mai superare 2; laonde se abbiasi $h+a\gamma > 2a$, la velocità v non potrà mai annullarsi. In questa circostanza il pendolo, invece di oscillare, ruoterà

intorno al punto di sospensione. Se poi sia $h+a\gamma < 2a$, la velocità v sarà nulla nel punto della trajettoria che ad $x = \frac{h+a\gamma}{}$ corrisponde; e il pendolo oscillerà da una parte e dall'altra della verticale.

Fingasi piccolissima l'ampiezza delle oscillazioni, e che non v'abbia velocità iniziale, e si avrà

(158) $t = \sqrt{\frac{a}{g}} \, \text{Arc}\left(\theta = \frac{\delta}{\alpha}\right)$, e

(159) $\delta = \alpha \cos t \sqrt{\frac{g}{a}}$.

Da quest'ultima equazione ne deducesi che il pendolo s'allontana da una parte e dall'altra della verticale dell'angolo α. Il tempo poi di un'intera oscillazione sarà

(160) $T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$.

Le lunghezze dei pendoli sono in ragion reciproca dei quadrati dei numeri delle oscillazioni fatte nello stesso tempo; e le durate delle oscillazioni stanno tra se come le radici quadrate delle lunghezze dei pendoli. La velocità poi nel punto più basso è la velocità dovuta all'altezza del punto di partenza.

Allorchè il pendolo muovesi nell'aria, il tempo dell'intera oscillazione è lo stesso che quando muovesi nel voto. Ma il tempo della mezza oscillazione discendente è aumentato dalla resistenza del mezzo della quantità $\frac{\alpha a m}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}$: dunque il tempo della mezza oscillazione ascendente viene diminuito della medesima quantità.

Le ampiezze poi delle successive oscillazioni vanno di continuo diminuendo fino a divenire insensibili. Ma finchè sussistono, le oscillazioni intere si fanno nel medesimo tempo.

Supposto che l'ampiezza delle oscillazioni non sia piccolissima, e nulla la velocità iniziale, si ha

(161) $$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2}\sqrt{1-\frac{x}{2a}}}.$$

L'integrale del secondo membro non si sa determinare a termini finiti. Ad ottenerlo per serie, dalla (161) deducesi la

(162) $$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{8} + \ldots\right).$$

Gl'integrali del secondo membro sono in generale presentati da $4\int \frac{-x^n dx}{\sqrt{rx-x^2}}$, e prendere si debbono da $x=r$, fino ad $x=0$. Poniamo questi integrali determinati

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{rx-x^2}} = B_0,\ \int \frac{-x\,dx}{\sqrt{rx-x^2}} = B_1,$$

$$\int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{rx-x^2}} = B_2 \text{ - - - - - - - -},$$

$$\int \frac{-x^n dx}{\sqrt{rx-x^2}} = B_n,$$ e si avrà

(163) $$T = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(B_0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}B_1 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4}B_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{8}B_3 + \text{- - - - - - - } \&c\right).$$

Il termine generale della serie che forma il secondo membro, è a cominciare dal secondo

$$\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{1.3.5.7\text{ - - - }(2n-1)}{2.4.6.8\text{ - - - }2n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n B_n.$$

Avendosi poi

(164) $$B_n = \frac{r(2n-1)}{2n}B_{n-1},$$ e $B_0 = \pi$, se ne deduce

(165) $$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{r}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{r}{2}\right)^3 + \text{- - - - - - -}\right\}$$

della qual serie il termine generale a cominciare dal secondo termine è

$$\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{1.3.5.7\text{ - - - }(2n-1)}{2.4.6\text{ - - - - }2n}\right)^2\left(\frac{r}{2}\right)^n.$$

Dalla (165) per le piccole distanze

oscillazioni, fatto $\gamma=0$ deducesi

(166) $T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

La (165) mette davanti, che la durata delle oscillazioni non è a tutto rigore indipendente dall'arco descritto dal pendolo. Nelle osservazioni, per le quali è mestieri di grande esattezza si conservano i due primi termini della (165), la quale perciò riducesi alla

(167) $T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right)$.

Il pendolo allontanato indeterminatamente poco dal perpendicolo, passa un arco indeterminatamente piccolo in un tempo finito. Quando un punto materiale pesante è costretto a restare sopra una data curva, egli può essersi in equilibrio in tutti i punti, nei quali la tangente riesce orizzontale.

Se si colloca il mobile indeterminatamente vicino ad uno di così fatti punti, esso tenderà alla posizione dell'equilibrio, ovveramente ad allontanarsene, secondo che sarà innalzato od abbassato rispetto alla posizione dell'equilibrio.

Nel primo caso l'equilibrio è stabile, e il mobile oscillerà da una parte e dall'altra del punto più basso della trajettoria. L'ampiezza delle oscillazioni riuscirà indeterminatamente piccola.

Al determinare la durata loro, osservar deesi che nell' estensione dell'arco che ciascheduna oscillazione comprende, all'arco della trajettoria sostituire si può l'arco del circolo osculatore al più basso punto della trajettoria stessa. Laonde concluder deesi che il tempo di ciascheduna intera oscillazione eguagliar dee $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, essendo a il raggio del prefato circolo osculatore

Capitolo XII°.

Del moto di un punto materiale pesante su la cicloide

Il tempo della caduta del mobile senza velocità iniziale è al tutto indipendente dall'altezza da cui cade. Laonde due punti pesanti, che senza velocità iniziale partono da diverse altezze su la cicloide, arrivano nel medesimo tempo al punto più basso di lei.

L'estremità di un filo, il quale si sviluppi da una mezza cicloide, genera una mezza cicloide. Quindi un pendolo formato da un filo, che porti all'estremità un grave, che oscillando s'adatti alla convessità d'una cicloide, farà le oscillazioni isocrone, e di conseguenza la cicloide è una curva <u>isocrona</u>.

La cicloide è pure la sola curva <u>tautocrona</u>.

Se si adatti la cicloide su la superficie di un cilindro verticale, conservando sopra di lui le lunghezze della coordinata verticale, la curva a doppia curvatura, che originasi, sarà tuttavia <u>tautocrona</u>; di guisa che

un mobile abbandonato all'azione della gravità, e costretto a muoversi su questa curva, attingerà il punto più basso nel medesimo tempo, qualunque sia il punto di sua partenza, e qualunque la projezione orizzontale della trajettoria.

Per converso, tutte le tautocrone a doppia curvatura che avere si possono, non sono che cicloidi verticali.

Se dunque la trajettoria a doppia curvatura è una tautocrona, la trajettoria piana lo sarà altresì; e di conseguenza non potrà essere che una cicloide a base orizzontale.

La cicloide è eziandio brachistocrona, ciò è un'arco di lei sarà da un mobile passato nel più breve tempo, che qualunque arco di altra linea, che abbia con la brachistocrona gli stessi limiti.

Capitolo XLII°.

Del moto di un punto materiale pesante sopra una data superficie

Sia N una forza continua ignota, la quale riesca normale alla data superficie, il cui effetto sia elidere in ciascheduno istante la pressione che le date forze sollecitanti il mobile, e la velocità di lui scomposta secondo la normale, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ esercitano su la superficie. Essa rappresenterà la resistenza della superficie, sarà eguale ed opposta alla prefata pressione, e l'equazioni del moto saranno:

(168) $\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\theta N\hat{X}$,

(169) $\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\theta N\hat{Y}$

(170) $\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\theta N\hat{Z}$.

L'equazione della superficie venga presentata dalla

(171) $L = 0$, e posto $V = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L'}{x'}\right)^2 + \left(\frac{L'}{y'}\right)^2 + \left(\frac{L'}{z'}\right)^2}}$

si avrà

(172) $\theta N\hat{X} = V\left(\frac{L'}{x'}\right)$,

(173) $\theta N\hat{Y} = V\left(\frac{L'}{y'}\right)$,

(174) $\theta N\hat{Z} = V\left(\frac{L'}{z'}\right)$.

Sostituendo i valori di questi coseni nelle (158), (169), (170), ed eliminando VN, s'otterranno due equazioni derivate di second' ordine, che unite alla (171) serviranno a determinare le coordinate del mobile in funzione del tempo.

Se il mobile si muova sopra la superficie d'una sfera del raggio a, animato da una sola forza continua, la quale sia la gravità, s'avrà:

(175) $\theta N \hat{X} = \pm \frac{x}{a}$,

(176) $\theta N \hat{Y} = \pm \frac{y}{a}$,

(177) $\theta N \hat{Z} = \pm \frac{z}{a}$; e le equazioni del moto saranno

(178) $\frac{d^2x}{dt^2} = \pm N \frac{x}{a}$,

(179) $\frac{d^2y}{dt^2} = \pm N \frac{y}{a}$,

(180) $\frac{d^2z}{dt^2} = \pm N \frac{z}{a}$.

La determinazione del moto del mobile dipende dalla integrazione delle tre infrascritte equazioni di primo ordine.

(181) $y\,dx - x\,dy = C\,dt$

(182) $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$

(183) $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + C$.

Così fatte integrazioni ottenere non si sa sotto la forma finita; ma ridurre si può la soluzione della quistione all'integrazione di funzioni

poichè sussistono le due equazioni

(184) $dt = \frac{adz}{\sqrt{(a^2-z^2)(C_1-2gz)-C^2}}$, e

(185) $d\omega = \frac{Cdt}{z^2-a^2}$, essendo ω l'angolo che la projezione del raggio vettore sul piano (x,y) fa con l'asse delle x. Questo problema comprende il moto di un pendolo semplice ad oscillazioni coniche.

Essendo v la velocità del mobile, si ha

(184) $\pm N = -\frac{v^2}{a} - \frac{gz}{a}$.

La pressione poi contro la superficie della sfera, prescindendo dal segno sarà, in ogni caso presentata da $\frac{v^2+gz}{a}$.

Se abbiasi

(185) $\int(Xdx+Ydy+Zdz) = f(x,y,z)$

sarà

(186) $v^2 - A^2 = 2f(x,y,z) - 2f(a,b,c)$,

essendo a, b, c le coordinate cui corrisponde la velocità A. Allora che la velocità è conosciuta in funzione delle coordinate x, y, z, è facile dalle (168), (169), (170) dedurne le equazioni differenziali della trajettoria, e che sono

(187) $v^2\frac{dx^2}{ds^2}d\frac{dy}{dx} = Ydx - Xdy + NV\left(\left(\frac{1}{y'}\right)dx - \left(\frac{1}{x'}\right)dy\right)$,

(188) $v^2\frac{dx^2}{ds^2} \cdot d\frac{dz}{dx} = Zdx - Xdz + NV \cdot \left(\left(\frac{1}{z'}\right)dx - \left(\frac{1}{x'}\right)dz\right)$.

Eliminando per mezzo di queste equazioni NV, la risultante unita alla (171) servirà a determinare le projezioni della trajettoria su i piani coordinati.
Sia γ il raggio d'osculo, e P la pressione contro la superficie dovuta alle sole forze X, Y, Z, e la risultante delle due forze $\frac{v^2}{\gamma}$ e P perpendicolari alla trajettoria sarà la pressione totale che questa curva sopporta.
Per un punto della trajettoria si protraggano tre assi ortogonali, di cui il primo sia su la normale della superficie nel punto stesso, il secondo tangente la trajettoria, e il terzo nel piano tangente la superficie; e siano α e β gli angoli che la forza $\frac{v^2}{\gamma}$ fa coi due primi assi, ed a, b, c gli angoli che la risultante R delle forze X, Y, Z fa con gli assi medesimi. La pressione contro la superficie sarà
$R\theta a + \frac{v^2}{\gamma}\theta\alpha$; e dovrà essere
(189) $R\theta b + \frac{v^2}{\gamma}\theta\beta = 0$.
Allorchè il mobile non è sollecitato da veruna forza continua, sarà R = 0, ed

allora il piano osculatore della trajettoria è sempre perpendicolare alla superficie data; proprietà che appartiene alla linea la più breve che sopra la superficie protrarre si possa da un punto dato ad un altro punto dato.

Il mobile adunque nelle fatte ipotesi seguirà la strada la più breve per passare da un punto all'altro della trajettoria.

Succederebbe lo stesso, se il mobile sopportasse un'attrito, ovveramente fosse sollecitato da una forza continua diretta secondo la tangente della trajettoria.

~~Succederebbe lo stesso, se il mobile sopportasse~~. Quando $Xdx + Ydy + Zdz$ è un differenziale esatto, il mobile sollecitato da quante forze continue si vogliono, si muova liberamente, o sia costretto a rimanere sopra una superficie, passerà una curva, andando da un punto dato ad un'altro punto dato, la quale renderà $\int v ds$ massimo o minimo. E' questo il principio denominato comunemente della minima azione.

Se il mobile non sia sollecitato da veruna forza continua, l'arco passato, andando dall'uno all'altro dei prefati punti, sarà un minimo, e il passerà in un tempo minimo.

Poniamo che il mobile sia sollecitato da una forza sola continua diretta verso un centro, e funzione della distanza del mobile dal centro fisso. Se dal centro si protragga una retta ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~, che prendasi per asse delle x, e sia ω l'angolo che il raggio vettore fa con questo asse, si avrà

$$(190.)\quad d\omega = \frac{b\,dr}{r\sqrt{ar^2 - 2r^2\int R\,dr - b^2}},$$

ove b e a sono due costanti arbitrarie, ed r il raggio vettore.

Se $R = \frac{\mu}{r^2}$, si trova la trajettoria essere una linea di second' ordine col centro fisso, che è eziandio origine in uno de' fochi.

Posto poi $R = \mu r$, la trajettoria riuscirà tuttavia una linea di second' ordine, ma il punto fisso origine delle coordinate sarà nel centro di lei.

II. Capitolo XLIII. Della Massa dei Corpi, ovvero di Ripetizioni.

Capitolo XLIV.

Di un principio generale di Dinamica

Figuriamo un sistema di punti materiali tra se legati, i quali sieno sollicitati da forze date in direzione e intensione. Cosi fatti punti a motivo del mutuo loro legame modificano l'azione delle forze, che loro sono immediatamente impresse; di guisa che essi in generale non si muovono con le velocità che le forze loro imprimono, nè secondo le direzioni di queste velocità. Il più riesce difficilissimo il determinare direttamente le velocità e le direzioni, che ai punti del sistema di fatto appartengono. Ma l'infrascritto teorema di D'Alembert riduce tutte le quistioni di Dinamica a semplici quistioni di equilibrio.

Siano m, m', m'' ------ quanti punti materiali si vogliono, legati fra loro, e

componenti in sistema, e siano v, v', v'' - - - -, le velocità, che le forze a loro applicate gl'imprimerebbero se fossero isolati. A cagione del mutuo legame dei punti, queste velocità rimarran no alterate in grandezza e direzione, e saranno animati da velocità u, u', u'' - - - - - - delle quali la grandezza e direzione saranno ignote.

Siano p, p', p'' - - - le velocità guadagnate o perdute dai punti materiali, in modo che u, p siano le componenti di v, u', p' le componenti di v'; u'', p'' le componenti di v'' e così di seguito. Ciò posto, vi dovrà essere equilibrio fra le quantità di moto $mp, m'p', m''p''$ - - - - Ed è questo il teorema di d'Alembert, da cui deriva di subito l'altro che si presta con agevolezza ad un gran numero di applicazioni. V'ha equilibrio nel sistema fra le quantità di moto $mv, m'v', m''v''$ - - - impresse ai punti materiali, e le quantità di moto $mu, m'u', m''u''$ - - che effettivamente hanno luogo, prendendo ciascuna di

queste in senso contrario della sua direzione.

Applicando il teorema di d'Alembert al moto delle due masse sui piani inclinati, dei quali si è trovata la condizione dell'equilibrio (Sinopsi), le equazioni del moto, della h, l'altezza comune de' due piani, ed l, l' le rispettive lunghezze, saranno

(191) $v = \frac{(ml' - m'l)h}{(m+m')ll'} gt + a$

(192) $x = \frac{(ml' - m'l)h}{(m+m')ll'} \frac{gt^2}{2} + at + b$

ove a, b sono due costanti arbitrarie, ed x esprime la distanza variabile della massa m da un punto fisso preso ad arbitrio. Il moto adunque delle due masse è analogo a quello de' corpi pesanti.

Le equazioni (191) e (192) contengono la teorica della macchina di Atwood, della quale si fa uso in fisica per mettere davanti le leggi del moto dei corpi gravi.

Se una catena omogenea, e di eguale densità in tutta la

sua estensione strisciare su i due piani considerati, detta c la lunghezza totale della catena, x la lunghezza della porzione di lei esistente sopra uno dei piani inclinati, si avrà l'equazione

(193) $dv=(xl'-cl+lx)\frac{ghdt}{cll'}$, la quale mutasi nella

(194) $\frac{d^2x}{dt^2}-p^2x+q=0$, essendo $p^2=\frac{gh(l+l')}{cll'}$, e $q=\frac{gh}{l'}$; di cui la primitiva completa è

(195) $x=\frac{q}{p^2}+ae^{pt}+be^{-pt}$, ove a, b sono costanti arbitrarie. —

Sia la massa m animata dalla velocità v applicata al cilindro del raggio r, e la massa m' animata dalla velocità v' applicata alla ruota del raggio r' nello asse della ruota, e si avrà

(196) $dv=\frac{(mr-m'r')r}{mr^2+m'r'^2}gdt$,

(197) $dv'=\frac{(m'r'-mr)r'}{mr^2+m'r'^2}gdt$.

Siano r'', r''' - - -, i raggi di altre ruote applicate al cilindro, cui è applicata la massa m, di cui la velocità di-

penderà dall' equazione

(198) $dv = \frac{(mv - m'v' - m''v'' - \ldots)^2}{mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 \ldots} gdt$

avendo però rispetto alle direzioni dei moti, che le nuove masse applicate tendono a produrre.

Siano due masse m, m' attaccate all' estremità di un filo inestensibile, e rigido, della lunghezza costante $\underline{a}$, e costretto a muoversi sopra due linee situate sul medesimo

piano.

Siano $X, Y; X_1, Y_1$ le componenti parallele ai due assi coordinati ortogonali delle forze continue tutte che agiscono sopra m, ed m', e di queste masse, $x, y; x_1, y_1$ siano le coordinate. Per condizione della questione stanno le equazioni

(199) $y = \varphi(x)$

(200) $y_1 = \varphi_1(x)$ delle due linee,

e la

(201) $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = a^2$. La

(202) $m\left(Xdt - d\frac{dx}{dt}\right)\delta x + m\left(Ydt - d\frac{dy}{dt}\right)\delta y + m'\left(X_1 dt - d\frac{dx_1}{dt}\right)\delta x_1 + m'\left(Y_1 dt - d\frac{dy_1}{dt}\right)\delta y_1 = 0$, dovrà

sussistere indipendentemente da quelle variazioni che rimangono assolutamente indetermi-nate. Le variazioni delle (199) (200) e (201), danno d'onde determinare tre delle varia-zioni δx, δx_1, δy, δy_1; per la quarta; e quindi dalla (202) se ne dedurrà una equazione di second'ordine che unita alle (199) (200) e (201) servirà a determinare x, x_1, y, y_1.

Se uno solo dei punti fosse costretto a rimanere sopra una linea la (202) darebbe luogo a due equazioni, che unite alla (201) ed all'equazione della linea su la quale si trova, servirebbero a determinare le coordinate dei due punti.

Se le due masse siano solo attaccate al filo senza più, la (202) origina tre equazioni, che unite alla (201), si ha il mezzo di determinare le coordinate delle due masse.

Finalmente, se le due masse siano interamente libere,

Sbaglio

e indipendenti l'una dall'altra, la (202) darà luogo a quattro equazioni, che sono appunto quelle del moto di un punto materiale libero, e isolato. —

Se le due linee siano due circoli di raggi r, ed r' aventi il centro all'origine delle coordinate, e che la gravità sia la sola forza continua che agisca su le due masse, l'equazione (202) originerà la

$$(203.)\quad m\left(x\,d\frac{dy}{dt} - y\,d\frac{dx}{dt}\right) + m'\left(x_1\,d\frac{dy_1}{dt} - y_1\,d\frac{dx_1}{dt}\right) - mgx\,dt - m'gx_1\,dt = 0.$$

Sia r_1 la distanza del centro di gravità dei due pesi mg, $m'g$ dall'origine delle coordinate, ed ω l'angolo che essa fa con l'asse delle y, e la (203) si muterà nella

$$(204)\quad (mr^2 + m'r'^2)\frac{d^2\omega}{dt^2} + (m+m')\,g r_1\,\mathrm{O}\,\omega = 0.$$

Capitolo XIV.

Del moto di un corpo solido intorno ad un'asse fisso.

Al corpo solido supponghiamo de' punti materiali legati fra loro in una maniera invariabile. Dividendo la velocità di ciascun punto per la distanza di lui dall'asse di rotazione, il quoziente nomasi velocità angolare. Tutti i punti del sistema nel moto di rotazione hanno in ciaschedun istante la medesima velocità angolare che supporremo restare eziandio costante passando da un istante all'altro. ——

Siano m, m', m'' .... le masse de' punti del sistema, su i quali agiscano delle forze date d'intensione e direzione, le quali imprimessero ai punti stessi, se fossero liberi, le velocità v, v', v'' ....

Sia ω la velocità angolare sconosciuta, e siano r, r', r'' &c. le distanze di m, m', m'' ... &c. dall'asse di rotazione; e le velocità che hanno luogo realmente, saranno $r\omega, r'\omega, r''\omega$ — &c. — ——

Dovrà adunque avervi equilibrio fra le quantità di moto mv, $m'v'$, $m''v''$.... prese secondo le rispettive loro direzioni, e le forze $mr\omega$, $m'r'\omega'$, $m''r''\omega$, prese in sensi contrarii alle loro direzioni. ——

Figuriamo protratti pei punti d'applicazione delle forze mv, $m'v'$, $m''v''$--- di piani perpendicolari all'asse di rotazione, e scomposta ciascheduna di così fatte forze in due, una giacente sul piano, e l'altra parallella al prefato asse. ——

Siano α, α', α''--- gli angoli, che le direzioni di v, v', v''... fanno coi figurati piani, e le componenti dirette in tali piani saranno $mv\theta\alpha$, $m'v'\theta\alpha'$, $m''v''\theta\alpha''$------

Inoltre presentiano per p, p', p'' le perpendicolari abbassate dal punto ove l'asse fisso incontra uno dei piani a lui perpendicolari, su la direzione delle forze $mv\theta\alpha$, $m'v'\theta\alpha'$, $m''v''\theta\alpha''$... projettate sul piano stesso; dovrà essere

(205) $\Sigma mvp\theta\alpha = I. = \omega\Sigma mr^2$

Se tutte le velocità v, v', v''----

siano tra se eguali, e dirette in piani perpendicolari all' asse fisso, e protraggasi per l'asse di rotazione un piano parallelo alla direzione delle velocità v, v', v'' --- &c., detta h la perpendicolare abbassata sopra di lui dal centro di gravità di $m + m' + m'' + \text{-------} = M$, s'avrà,

(206) $\omega \Sigma m r^2 = M v h$.

Se la velocità v non fosse impressa che ad una parte μ delle masse m, m', m'' --- ed f presentasse la distanza dal centro di gravità μ dal prefato piano, s'avrebbe

(207) $\omega \Sigma m r^2 = \mu v f$.

Cambiando il sistema invariabile in un corpo solido, sarà

(208) $\omega \int r^2 dm = \mu v f$.

Se abbiasi $\int yz\,dm = 0$, $\int xz\,dm = 0$, tutte le forze che si fanno equilibrio intorno all' asse fisso, giaciono sopra un piano perpendicolare all' asse di rotazione, e può darsi che esse non producono veruna percossa su l'asse; il che succederà,

quando la direzione della velocità del corpo urtante avanti l'urto sarà perpendicolare al piano che passa per l'asse di rotazione, e pel centro di gravità della intera massa M, e incontra così fatto piano in un punto, del quale la distanza è $f = \frac{e\int r^2 dm}{M r_1}$, essendo r_1 la distanza della projezione del centro di gravità della massa M sul piano suddetto ___

Capitolo XLVI.

Delle proprietà dei momenti d'inerzia, e degli assi principali

Essendo m, m', m''.... le masse di punti materiali costituenti un sistema invariabile, ed r, r', r''..., le distanze di cotesti punti da un certo asse, il momento d'inerzia rispetto all'asse medesimo è presentato da $\Sigma m r^2$; ovveramente da $\int r^2 dm$, riducendo il sistema ad un corpo solido.

Presentando per D l'asse su cui si riferiscono i momenti, posto $K = \Sigma m r^2$, $A = \Sigma m(x^2+y^2)$, $B = \Sigma m(x^2+z^2)$, $C = \Sigma m(y^2+z^2)$, $E = \Sigma mxy$, $F = \Sigma mxz$, $G = \Sigma myz$, $H = \Sigma mx^2$, $I = \Sigma my^2$, $M = \Sigma mz^2$, sarà

(209) $K = A\theta^2 \widehat{DZ} + B\theta^2 \widehat{DY} + C\theta^2 \widehat{DX} - 2E\theta \widehat{DX}\,\theta \widehat{DY} - 2F\theta \widehat{DX}\,\theta \widehat{DZ} - 2G\theta \widehat{DY}\,\theta \widehat{DZ}$, ed anche

(210) $K = H\theta^2 \widehat{DX} + I\theta^2 \widehat{DY} + M\theta^2 \widehat{DZ} - 2E\theta \widehat{DX}\,\theta \widehat{DY} - 2F\theta \widehat{DX}\,\theta \widehat{DZ} - 2G\theta \widehat{DY}\,\theta \widehat{DZ}$; A, B, C, presentano le somme dei momenti d'inerzia relativi agli assi z, y, x, rispettivamente.

Supposto un sistema qualunque

lunque di punti materiali m, m', m''
------ ecc., per un punto A preso
ad arbitrio nello spazio protratto
un numero indeterminato di
assi, e determinati i momenti
d'inerzia del sistema relativi
agli assi medesimi, se a partire
da A si noti sopra ciascuno
degli assi una porzione di lui
equivalente all'unità divisa
per la radice quadrata del
rispettivo momento d'inerzia,
le estremità di cotesse porzioni
giaceranno su la superficie
di una elissoide avente il
centro in A. Se i punti materiali
del sistema siano sul
medesimo asse, il momento
d'inerzia relativo a questo
asse sarà nullo, e la porzione
corrispondente di lui
riuscirà infinita; e di conseguente
la elissoide si cambierà
in un cilindro.

Gli assi delle x delle y e z
diconsi principali, se abbiasi
$\Sigma mxy=0$, ~~ed allora~~ $\Sigma mxz=0$,
$\Sigma myz=0$, ed allora i momenti
d'inerzia $\Sigma m(x^2+y^2)$, $\Sigma m(x^2+z^2)$
$\Sigma m(y^2+z^2)$ relativi agli assi delle
z, y, x diconsi momenti d'inerzia

principali. In generale non ha luogo, che un solo sistema di assi principali.

Supposto che gli assi principali si confondano coi diametri principali della suddetta ellissoide, il momento d'inerzia relativo al più piccolo diametro principale è massimo, e quello che corrisponde al più grande, è minimo.

Se $\Sigma m(x^2+y^2) = \Sigma m(y^2+z^2)$, vi sarà una infinità di sistemi di assi principali, comunque gli assi delle x, e delle z tra se perpendicolari siano situati in un piano, che passando pel centro della sferoide, è perpendicolare all'asse di rotazione.

Una retta qualunque che passa pel centro della sferoide, e sia egualmente inclinata all'asse de' momenti d'inerzia, questi saranno sempre tra loro eguali, in qualunque posizione si consideri la retta.

Quando $\Sigma m(x^2+y^2) = \Sigma m(x^2+z^2) = \Sigma m(y^2+z^2)$, allora la ellissoide si converte in una sfera e v'ha una infinità di sistemi di assi principali, che si taglino nel centro della sfera stessa.

Allorchè gli assi coordinati

ortogonali coincidono coi principali, le due (209)(210) si mutano nelle

(211) $K = A\theta\hat{D}\hat{Z} + B\theta\hat{D}\hat{Y} + C\theta\hat{D}\hat{X}$,

(212) $K = H\theta\hat{D}\hat{X} + L\theta\hat{D}\hat{Y} + M\theta\hat{D}\hat{Z}$. —

Sia K' il momento d'inerzia del sistema di punti materiali m, m', m'' --- relativo ad un asse parallello all'asse cui è riferito il momento K, e sia R la distanza tra i due assi; e si avrà

(213) $K' = K + R.M$, essendo $M = m + m' + m''$

Le dettate cose si possono trasportare ad un corpo solido.

Se pel centro di gravità di un corpo solido omogeneo si protraggano tre piani, ciaschiduno dei quali divida il corpo in due parti simmetriche, le intersecazioni di così fatti piani sono i tre assi principali relativi al centro di gravità del corpo. —

~~Data~~ l'equazione della superficie di un solido, e la legge secondo la quale procede nel suo interno la densità di lui, si otterrà il momento d'inerzia mediante una triplice integrazione in modo analogo all'usato per trovare il volume, ovveramente la posizione del centro di gravità di questo corpo.

Siano gli assi ortogonali spigoli di un parallelepipedo

omogeneo, e ad ottenere i momenti d'inerzia relativi agli spigoli di lui, dovrassi determinare

(214) $\int r^2 dm = \delta \int^3 (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$.

Siano a, b, c gli spigoli del parallelepipedo, ed M la sua massa, e i momenti d'inerzia relativi agli spigoli a, b, c saranno rispettivamente $\frac{M}{3}(b^2+c^2)$, $\frac{M}{3}(a^2+c^2)$, $\frac{M}{3}(a^2+b^2)$.

Se A, B, C presentano i tre diametri principali di uno ellissoide, i momenti d'inerzia a loro relativi saranno corrispondentemente

$\frac{M}{5}(B^2+C^2)$, $\frac{M}{5}(A^2+C^2)$, $\frac{M}{5}(A^2+B^2)$

Se A = C, si ha la sferoide, e i momenti principali diventano $\frac{M}{5}(B^2+A^2)$, $\frac{2M}{5} A^2$, $\frac{M}{5}(A^2+B^2)$, due dei quali s'eguagliano fra loro, come esser debbe.

Se A = B = C si ha la sfera, e ciascun de' momenti è presentato da $\frac{2M}{5} A^2 = \frac{8\pi}{15} \delta A^5$.

Il momento d'inerzia di una sfera del raggio A composta di strati omogenei concentrici, preso rispetto ad un diametro di lei, è $\frac{8\pi}{3} \int \delta A^4 dA$, preso l'integrale

da $A=0$, fino ad A eguale al raggio della sfera. —

Quando un solido è di rivoluzione, dovrassi integrare $\frac{1}{2}\pi\delta y^4 dx$, postovi il valore di y in funzione di x dato dalla linea generatrice il solido, supposta l'origine ove l'asse di rotazione taglia la linea, e messo pure invece di δ, se è variabile, il suo valore in x. Se torna più conto, si può ridurre la funzione a contenere la y e suo differenziale. —

Prendendo ad esempio la sfera omogenea, si trova come sopra $\frac{8\pi}{15}\delta A^5$.

(215) Se $y=mx+a$, sia l'equazione della retta, che rotando d'intorno ad un'asse genera un tronco di cono, il momento d'inerzia di lui rispetto all'asse sarà $\frac{1}{10}\cdot\frac{\pi\delta}{m}\left((a\alpha+b)^5-b^5\right)$, ove α è l'altezza del tronco di cono, vale a dire la porzione dell'asse di rotazione compresa fra le due basi. —

Quindi ottiensi $\frac{1}{2}\pi\delta a b^4$ pel momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse di lui della lunghezza α. —

Se l'asse di rotazione prodotto da un solo urto istantaneo sia un asse principale di M che passi per un punto fisso e pel centro di gravità di M, le forze centrifughe dei differenti punti del corpo non eserciteranno veruna pressione su l'asse di rotazione; di guisa che se esso cessasse di subito di essere fisso, il moto del corpo non sarebbe alterato, e continuerebbe come prima. Se l'asse di rotazione sia un asse principale, che non passi pel centro di gravità di M, ma per un punto fisso; basterà che il punto tale rimanga, perchè il moto non sia cambiato. Laonde, dato un punto fisso in un corpo solido di figura qualunque, esistono sempre tre assi passanti pel punto, attorno ai quali il corpo potrà ruotare uniformemente senza che gli assi siano dislogati, e come se essi fossero assolutamente immobili. Per così fatte proprietà gli assi principali nomansi eziandio assi principali di rotazione

Sia D l'asse passante per l'origine delle coordinate, a cui si riferisce il momento d'inerzia K, ω l'angolo che D fa con la sua projezione sul piano (x,y), ed ω' l'angolo che la projezione fa con l'asse delle x, e si avrà

(216) $K = H + L - (H\theta^2\omega' + L\Theta^2\omega' - M)\,\theta^2\omega$
$- 2E\theta^2\omega\,\theta\omega'\,\Theta\omega' - 2\theta\omega\,\Theta\omega\,(F\theta\omega' + G\Theta\omega')$.

Si ha inoltre

(217) $K = A + (B - A)\,\theta^2 D\hat{Y} + (C - A)\,\theta^2 D\hat{Z}$

(218) $K = B + (A - B)\,\theta^2 D\hat{X} + (C - B)\,\theta^2 D\hat{Z}$

(219) $K = C + (A - C)\,\theta^2 D\hat{X} + (B - C)\,\theta^2 D\hat{Y}$

da cui deducesi, che tra i momenti d'inerzia relativi ad assi qualunque passanti per lo stesso punto il massimo e il minimo sono principali.

Detto queste proprietà, dalla (216) deduconsi le infrascritte equazioni

(220) $\sigma\omega = \dfrac{(H - L)\theta\omega\,\Theta\omega' + E(\Theta^2\omega' - \theta^2\omega')}{G\theta\omega' - F\Theta\omega'}$,

(221) $\sigma 2\omega = \dfrac{2(F\theta\omega' - G\Theta\omega')}{H\theta^2\omega' + L\Theta^2\omega' - M + 2E\theta\omega'\Theta\omega'}$,

(222) $\big((F^2 - E^2)G + (L - M)EF\big)\sigma^3\omega' +$
$\big(F^3 - 2G^2F + E^2F + (L - 2H + M)GE -$
$(L + H)(L - M)F\big)\sigma^2\omega' + \big(G^3 - 2F^2G +$
$GE^2 + (H - 2L + M)EF - (H - M)(H - L)G\big)$
$\cdot\sigma\omega' + F(G^2 - E^2) + EG(H - M) = 0$;

equazione che ha tutte e tre le radici reali. Dipendentemente da questa ottenere si potranno i valori di w dalla (220) o dalla (221), e di conseguenza sarà data la direzione dei tre assi principali che passano per un punto; l'esistenza dei quali si è già dimostrata possibile.

Dalle dettate cose relative agli assi principali consequita: che per un punto qualunque nello spazio preso per origine delle coordinate si possono sempre far passare tre assi principali, e solo tre in generale, la direzione dei quali è data dalla (222), e da una delle due (220) (221): che così fatti assi si tagliano ad angolo retto: che il momento d'inerzia rispetto ad uno di loro è un massimo, e relativamente ad un altro, è un minimo.

Capitolo XLVII.

Del moto vario di un corpo solido intorno ad un'asse fisso.

Sia δ l'angolo che la direzione della forza continua Q, che sollecita l'elemento dm, fa in un punto m della sua trajettoria con la tangente di lei in tal punto; r la distanza di dm dall'asse di rotazione fisso, ed ω la velocità angolare del corpo; e si avrà

(223) $dt\int rQ\cos.\delta\, dm = d\omega\int r^2 dm$.

Se la sola gravità agisca sui punti del corpo, ed M rappresenti la massa del corpo, y la distanza del centro di gravità di lei dal piano (x,z), K il momento d'inerzia della massa M relativo ad un'asse parallelo all'asse delle z, e che passa pel centro di gravità di lei, e $K=\frac{k}{M}$, la (223) mutasi nella

(224) $g\,y\,dt-(K+R^2)\,d\omega=0$, ove g rappresenta al solito la gravità.

All'origine del moto il piano che passa per l'asse fisso e pel centro di gravità del corpo, faccia con un piano verticale l'angolo α, ed un angolo β in un'istante

qualunque, e la (224) cambierassi nella

(225) $\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{gR}{k+R^2}\theta\gamma = 0$, ove R presenta la distanza del centro di gravità del corpo dall'asse fisso.

L'integrale determinato di questa equazione è

(526) $\frac{d\gamma^2}{dt^2} = \frac{2gR}{k+R^2}(\theta\gamma - \theta\alpha) + \omega_1^2$, essendo ω_1 la velocità angolare del cominciamento del moto.

Se il corpo riducesi ad un punto materiale, fatto $R = l$, e detta h l'altezza dovuta alla velocità $l\omega_1$, si otterrà

(527) $\frac{d\gamma^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}(\theta\gamma - \theta\alpha) + \omega_1^2$, e

(528) $dt = \frac{l\,d\gamma}{\sqrt{2g(h + l\theta\gamma - l\theta\alpha)}}$ la quale combina con quella trovata pel moto del pendolo semplice. Il moto dunque del punto materiale è lo stesso che quello del corpo solido preso in considerazione, qualora abbiasi

(529) $l = \frac{k+R^2}{R}$.

Dipendentemente da questa equazione si calcola la lunghezza di un pendolo semplice che faccia le oscillazioni nello stesso tempo che un composto dato. Se la velocità iniziale, e l'allontanamento

primitivo dalla verticale siano piccolissimi, i due pendoli faranno delle oscillazioni isocrone la durata delle quali sarà $\pi\sqrt{\frac{R^2+k}{gR}}$. I punti appartenenti alla sezione del corpo fatta da un piano protratto per l'asse di rotazione e pel centro di gravità del corpo stesso, e situati rispetto all'asse di rotazione dalla medesima parte che il centro di gravità, sono i soli che oscillino da una parte e dall'altra della verticale, come di punti isolati. Ma la durata delle loro oscillazioni essendo la stessa che pel pendolo semplice, di cui si è determinata la lunghezza l, ne consegue, che quella tra questi punti ~~[illegible]~~ che sono alla distanza l dall'asse di rotazione sono i soli che facciano le loro oscillazioni nello stesso tempo che se fossero isolati.

Cotali punti diconsi centri di oscillazione; i quali di conseguenza saranno situati sopra una retta parallela all'asse di rotazione, da lui distante di l, la quale giace sullo stesso piano che l'asse di rotazione e il centro di gravità, dalla medesima

parte che questo centro. Se l'asse su cui sono locati i centri di oscillazione, si prenda per asse di rotazione, che dicesi anche asse di sospensione, l'asse dei centri d'oscillazione che vi corrisponde, sarà l'asse di sospensione che corrispondeva all'asse dei centri di oscillazione, che si è preso per asse di sospensione. Se pel centro di gravità del corpo si protragga un piano perpendicolare all'asse di sospensione, e sopra di lui, fatto centro nel centro di gravità, si descrivino due circoli concentrici, uno dei quali abbia per raggio k, e l'altro la distanza fra il centro di gravità e il centro d'oscillazione, il primo sarà la base di un cilindro retto la cui generatrice in ogni sua posizione è asse sincrono di sospensione. La circonferenza del secondo circolo è il luogo di tutti i corrispondenti centri di oscillazione. Questo secondo circolo sarà egualmente base di un cilindro retto, la generatrice del quale in ogni sua posizione è asse sincrono. Le durate delle oscillazioni sono le stesse per tutti gli assi paralelli fra loro, ed equidistanti dal centro di gravità. Si può

altresì cambiare la direzione di questi assi, e la loro distanza dal centro di gravità, senza che muti il valore di l. E di vero siano α, α', α'' gli angoli che la retta parallela all'asse di sospensione, e protratta pel centro di gravità, fa coi tre assi principali del corpo che si tagliano nel centro di gravità; ed A, B, C i momenti d'inerzia relativi a così fatti assi, e si avrà

$$(530)\quad l = \frac{MR^2 + A\theta\alpha + B\theta\alpha' + C\theta\alpha''}{MR};$$

il che mette davanti potersi dare ad α, α', α'', R una infinità di valori differenti, pei quali risulti sempre lo stesso valore di l. Se vogliasi determinare il valore di l, che è un minimo rispetto ad α, α', α'', R trovasi $R = \sqrt{\frac{A}{M}}$, essendo A il minimo di prefati momenti principali.

Conseguita quindi, che gli assi di sospensione, rispetto ai quali le piccole oscillazioni di un corpo si fanno nel tempo il più breve, sono paralleli all'asse principale, a cui corrisponde il minimo momento d'inerzia; e che sono da questo asse principale ad una distanza eguale alla radice quadrata del quoto che ottiensi, col dividere il minimo momento principale per la massa del corpo.

Capitolo XLVIII.

Del moto di un solido intorno ad un punto fisso.

Immaginati tre assi X, Y, Z ortogonali fissi nello spazio, ed altri tre X_1, Y_1, Z_1, parimenti ortogonali, fissi nel corpo, ma mobili con lui essendo l'origine comune nel punto di rotazione, se x, y, z; x_1, y_1, z_1, presentino le coordinate di un punto qualunque del corpo riferito al primo, ed al secondo sistema di assi coordinati, s'avrà

(531) $x = ax_1 + by_1 + cz_1$,

(532) $y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1$,

(533) $z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1$, essendo

$a = \cos X\hat{X}_1$, $b = \cos X\hat{Y}_1$, $c = \cos X\hat{Z}_1$,

$a' = \cos Y\hat{X}_1$, $b' = \cos Y\hat{Y}_1$, $c' = \cos Y\hat{Z}_1$,

$a'' = \cos Z\hat{X}_1$, $b'' = \cos Z\hat{Y}_1$, $c'' = \cos Z\hat{Z}_1$.

Pei punti del corpo, dei quali in un' istante la velocità è nulla, s'hanno le tre equazioni

(534) $x_1 da + y_1 db + z_1 dc = 0$,

(535) $x_1 da' + y_1 db' + z_1 dc' = 0$,

(536) $x_1 da'' + y_1 db'' + z_1 dc'' = 0$; dalle quali, fatto

$c\,da + c'da' + c''da'' = -q\,dt$,

$c\,db + c'db' + c''db'' = p\,dt$,

$b\,da + b'da' + b''da'' = r\,dt$, s'hanno le infrascritte equazioni

(537) $py_1 - qx_1 = 0$,

(538) $rx_1 - pz_1 = 0$,

(539) $qz_1 - ry_1 = 0$, una delle quali deriva necessariamente dalle altre due.

Così fatte equazioni presentano una retta, che passa per l'origine delle coordinate. Laonde tutti i punti del corpo, de' quali la velocità è nulla in un' istante qualunque, sono situati sopra una retta che passa pel punto fisso. Questa retta può riguardarsi come immobile nel lasso di un tempo indeterminatamente piccolo. Dunque durante cotesto tempo il corpo ruota intorno alla retta prefata, come intorno ad un' asse fisso; e però dee figurarsi il moto di rotazione di un solido intorno ad un punto fisso, come avendo luogo in ciascun istante intorno ad un' asse, che rimane immobile in un lasso di tempo indeterminatamente piccolo. In generale la posizione di questo asse cambia da un istante all'altro durante il moto; il perchè dicesi asse istantaneo di rotazione.

Se presentasi per A la direzione dell'asse istantaneo di rotazione, la posizione di lui verrà data dalle

(540) $\cos A\hat{}X_1 = \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$;

(521) $\cos . \hat{A Y_1} = \dfrac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$

(522) $\cos . \hat{A Z} = \dfrac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$.

La velocità angolare intorno all'asse istantaneo di rotazione è presentata da $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$.

Se le quantità p, q, r sono costanti, l'asse di rotazione riuscirà una retta fissa nello spazio, e la velocità angolare sarà costante; ma in generale, non per converso.

Inoltre sarà

(523) $\dfrac{dx}{dt} = a(qz_1 - ry_1) + b(rx_1 - pz_1) + c(py_1 - qx_1)$,

(524) $\dfrac{dy}{dt} = a'(qz_1 - ry_1) + b'(rx_1 - pz_1) + c'(py_1 - qx_1)$,

(525) $\dfrac{dz}{dt} = a''(qz_1 - ry_1) + b''(rx_1 - pz_1) + c''(py_1 - qx_1)$.

Siano p_1, q_1, r_1, le componenti della forza continua del punto (x, y, z) relative agli assi delle x_1, y_1, z_1, e si avrà

(526) $p_1 dt = z_1 dq - y_1 dr + (py_1 - qx_1) q dt + (pz_1 - rx_1) r dt$,

(527) $q_1 dt = x_1 dr - z_1 dp + (qz_1 - ry_1) r dt + (qx_1 - py_1) p dt$,

(528) $r_1 dt = y_1 dp - x_1 dq + (ry_1 - qz_1) q dt + (rx_1 - pz_1) p dt$.

Figurando in un istante qualunque ciascheduna delle quantità

di moto, da cui i diversi punti del mobile sono animati, scomposta in due, una parallela ad un piano protratto arbitrariamente pel centro di rotazione, e l'altra a lui perpendicolare, e si projettino sul piano le componenti a lui parallele, vi sarà un piano per cui la somma dei momenti di queste forze relativi al centro sarà un massimo.

Presentiamo per R' la direzione di una perpendicolare a così fatto piano, e si avremo le infrascritte equazioni

$$(549)\quad \theta.\widehat{R'X_1} = \frac{-Cp}{\sqrt{C^2p^2+B^2q^2+A^2r^2}},$$

$$(550)\quad \theta.\widehat{R'Y_1} = \frac{-Bq}{\sqrt{C^2p^2+B^2q^2+A^2r^2}},$$

$$(551)\quad \theta.\widehat{R'Z_1} = \frac{-Ar}{\sqrt{C^2p^2+B^2q^2+A^2r^2}},$$

$$(552)\quad \theta.\widehat{R'X} = -\frac{Cap+Bbq+Acr}{\sqrt{C^2p^2+B^2q^2+A^2r^2}},$$

$$(553)\quad \theta.\widehat{R'Y} = -\frac{Ca'p+Bb'q+Ac'r}{\sqrt{C^2p^2+B^2q^2+A^2r^2}},$$

$$(554)\quad \theta.\widehat{R'Z} = -\frac{Ca''p+Bb''q+Ac''r}{\sqrt{C^2p^2+B^2q^2+A^2r^2}}$$

ove $\sqrt{C^2p^2+B^2q^2+A^2r^2}$ presenta il momento principale.

Sia ω la mutua inclinazione dei due piani (x,y), (x_1,y_1), ed ω', ω'' gli angoli che la intersezione dei due piani fa cogli

assi dello x e dello x_1, e si avrà

(555) $\theta.X\hat{X}_1 = a = \theta.\omega\theta\omega'\theta\omega'' + \theta\omega'\theta\omega''$,

(556) $\theta X\hat{Y}_1 = b = \theta.\omega\theta\omega'\theta\omega'' - \theta\omega'\theta\omega''$,

(557) $\theta Y\hat{X}_1 = a' = \theta\omega\theta\omega'\theta\omega'' - \theta\omega'\theta\omega''$,

(558) $\theta Y\hat{Y}_1 = b' = \theta\omega\theta\omega'\theta\omega'' + \theta\omega'\theta\omega''$,

(559) $\theta X\hat{Z}_1 = c = \theta\omega\theta\omega'$,

(560) $\theta.Y\hat{Z}_1 = c' = \theta\omega\theta\omega'$.

(561) $\theta.X_1\hat{Z} = a'' = \theta\omega\theta\omega''$,

(562) $\theta.Y_1\hat{Z} = b'' = \theta\omega\theta\omega''$,

(563) $\theta Z\hat{Z}_1 = c'' = \theta\omega$

(564) $pdt = \theta\omega\theta\omega''d\omega' - \theta\omega''d\omega$

(565) $qdt = \theta.\omega''d\omega + \theta\omega\theta\omega''d\omega'$

(566) $rdt = d\omega'' - \theta\omega d\omega'$.

Capitolo XLIX.

Delle equazioni del moto rotatorio intorno ad un punto fisso.

Siano x_1, y_1, z_1, le coordinate dell'elemento dm riferite ai tre assi ortogonali fissi nel corpo, e mobili con lui. Le forze che sollecitano l'elemento, si suppongono in ogni istante scomposte secondo i tre assi medesimi, essendone X_1, Y_1, Z_1 le componenti. —

Posto

(567) $\int (y_1 Z_1 - z_1 Y_1)\,dm = N'$,

(568) $\int (z_1 X_1 - x_1 Z_1)\,dm = N''$,

(569) $\int (x_1 Y_1 - y_1 X_1)\,dm = N'''$, sarà

(570) $\int (y_1 r_1 dt - z_1 q_1 dt)\,dm = N' dt$,

(571) $\int (z_1 p_1 dt - x_1 r_1 dt)\,dm = N'' dt$,

(572) $\int (x_1 q_1 dt - y_1 p_1 dt)\,dm = N''' dt$

(573) $y_1 r_1 dt - z_1 q_1 dt = (y_1^2 + z_1^2)\,dp + rq(y_1^2 - z_1^2)\,dt - (dq - rp\,dt)\,x_1 y_1 - (dr + pq\,dt)\,x_1 z_1 + (r^2 dt - q^2 dt)\,y_1 z_1$,

(574) $z_1 p_1 dt - x_1 r_1 dt = (x_1^2 + z_1^2)\,dq + pr(z_1^2 - x_1^2)\,dt - (dp + qr\,dt)\,x_1 y_1 + (p^2 dt - r^2 dt)\,x_1 z_1 - (dr - pq\,dt)\,y_1 z_1$,

(575) $x_1 q_1 dt - y_1 p_1 dt = (x_1^2 + y_1^2)\,dr + pq(x_1^2 - y_1^2)\,dt + (q^2 dt - p^2 dt)\,x_1 y_1 - (dp - qr\,dt)\,x_1 z_1 - (dq + pr\,dt)\,y_1 z_1$.

Se gli assi suddetti sieno

assi principali del corpo, le equazioni del moto saranno

$$(576)\quad C\,dp+(A-B)\,qr\,dt=N'dt,$$
$$(577)\quad B\,dq+(C-A)\,pr\,dt=N''dt,$$
$$(578)\quad A\,dr+(B-C)\,pq\,dt=N'''dt.$$

Capitolo I.—

Del moto di un corpo libero

Siano x, y, z le coordinate del centro di gravità del corpo, ed X, Y, Z le somme delle componenti di tutte le forze, le quali sollecitano l'elemento dm, parallele agli assi coordinati ortogonali, e le equazioni del moto del centro di gravità del corpo saranno

$$(579)\quad M\frac{d^2x}{dt^2}=\int X\,dm,$$
$$(580)\quad M\frac{d^2y}{dt^2}=\int Y\,dm,$$
$$(581)\quad M\frac{d^2z}{dt^2}=\int Z\,dm.$$

Ed quindi aperto, il centro di gravità muoversi come se tutta la massa del corpo vi fosse riunita, e le forze motrici dei punti del corpo fossero allo stesso punto applicate parallelamente alle loro direzioni, e senza cambiare d'intensione.

Se le forze date che agiscono sui punti del mobile, sono attrazioni dirette verso altri punti fissi o mobili, le loro intensioni dipenderanno dalle distanze

dei primi punti ai secondi, ed X, Y, Z saranno funzioni delle coordinate di questi punti. In tal caso le (579), (580), (581), servire non possono a determinare direttamente le coordinate x_1, y_1, z_1 del centro di gravità; vale a dire determinare non si potrà il moto di questo punto indipendentemente dagli altri punti del corpo. Ma quando così fatte forze sono costanti in grandezza e direzione, faranno immediatamente conoscere il moto del centro di gravità. Se la forza unica che agisce sul corpo, sia la gravità, le prefate equazioni ci mettono davanti che il centro di gravità descrive una parabola, il cui vertice e parametro dipendono dalla posizione di lui al principio del moto, e dalla sua velocità iniziale. Sia v la velocità del centro di gravità, e si avrà

(582) $v = \frac{1}{M}\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$, essendo

$X_1 = M\frac{dx_1}{dt}$, $Y_1 = M\frac{dy_1}{dt}$, $Z_1 = M\frac{dz_1}{dt}$

la quale di conseguenza è la stessa in grandezza, e direzione, che se la massa intera del corpo vi fosse riunita, e che le forze applicate ai diversi punti

del mobile all'origine del moto fossero ivi trasportate parallelamente a loro stesse senza cambiarne l'intensione.

Se ad un corpo si applichi una forza istantanea F, si avrà

(583.) $v = \frac{F}{M}$.

La medesima forza F adunque applicata a diversi punti del corpo, e secondo differenti direzioni, communicherà sempre la medesima velocità al centro di gravità di lui. Se delle forze istantanee, delle quali le intensioni siano incognite, agiscano sopra date masse in direzione qualunque, coteste forze saranno tra sè come i prodotti delle masse nelle velocità con le quali si muoveranno i loro centri di gravità. L'urto di un corpo in moto contro un corpo in quiete è una forza che agisce istantaneamente sul secondo corpo, o almeno il tempo, durante il quale esercita la sua azione, è in generale così piccolo, che si può trascurare senza errore sensibile.

Trovate le equazioni del centro di gravità, è mestieri determinare il moto di rotazione intorno a questo punto. Il moto di rotazione

zione iniziale di un corpo talora, al proprio centro di gravità, ovvero prodotto dalle forze date che all'origine agiscono sui differenti punti del corpo; e così fatto moto sarà lo stesso, che se il centro di gravità non prendesse alcuna velocità iniziale.

Il moto stesso è prodotto all'origine, e in tutta la sua durata, dalle sole forze date che agiscono su tutti i punti del mobile. Conoscendo adunque queste forze, e le loro direzioni, in ciascheduno dei casi particolari, si formeranno le seguenti equazioni differenziali di prim'ordine, ovveramente le tre di second'ordine relative al moto di un corpo intorno ad un punto fisso, che unite alle (579), (580), (581) presenderanno tutte le equazioni necessarie per determinare il moto di traslazione, e quello di rotazione del corpo. Siano F', F', F'' --- delle forze istantanee, e v, v', v'' le velocità che imprimerebbero al corpo, se agissero sole, e si avrà

(584) $F=Mv$,

(585) $F'=Mv'$,

(586) $F''=Mv''$, ----

Se le forze F, F', F'' — — — — hanno una risultante, non vi sarà che moto di traslazione.

Quando le forze stesse riducansi ad una coppia non vi sarà che moto di rotazione.

Allorchè le forze riducansi ad una coppia, e ad una forza, esistenti in diversi piani si avrà moto di rotazione, e di traslazione.

Capitolo II.

Dell'urto dei Corpi

Siano due sfere omogenee, e non elastiche, le cui masse siano m, ed m', animate dalle velocità v, v' secondo la medesima direzione che passa pei loro centri. Detta u la velocità comune dopo l'urto s'avrà

(587) $u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$. Se poi le velocità siano in senso contrario, sarà

(588) $u = \frac{mv - m'v'}{m + m'}$.

In questo caso il moto dopo l'urto avrà luogo nella direzione di v, ovveramente di v', secondo che sarà $mv > m'v'$, e $mv < m'v'$. L'effetto dell'urto delle sfere non elastiche è di riunire in una le loro masse, la quale ha la medesima velocità che se le forze agenti sopra le sfere sollecitassero simultaneamente la massa totale. Se una delle due masse, m' ad esempio, sia in riposo avanti l'urto, e che ella sia estremamente grande rispetto ad m, s'avrà

(589) $u=\frac{mv}{m+m'}$, quantità estremamente piccola, che può aversi come nulla, senza notabile errore.
La diminuzione nella somma delle forze vive nell'urto delle due sfere equivale alla somma delle forze vive dovute alle velocità da esse perdute o guadagnate.

Siano ora le sfere perfettamente elastiche, e siano V, V' le velocità di m, e di m' dopo l'urto, e si avrà

(590) $V=\frac{(m-m')v+2m'v'}{m+m'}$,

(591) $V'=\frac{-(m-m')v'+2mv}{m+m'}$.

Se $m=m'$, risulta $V=v'$, e $V'=v$.
Se v, v' abbiano direzione contraria, risulterà

(592) $V=\frac{mv-m'(v+2v')}{m+m'}$,

(593) $V'=\frac{m(v'+2v)-m'v'}{m+m'}$. ———

Se abbiasi $v=v'$, ed $m'=\frac{1}{3}m$, si avrà $V=0$, e $V'=2v$. ———

Allorchè $m=m'$, dalle (590)(591) si ha $V=-v'$, $V'=0$. ———

Quando $v'=0$, dalle stesse equazioni deriveasi

(594) $V=\frac{(m-m')v}{m+m'}$,

(595) $V'=\frac{2mv}{m+m'}$. ———

Se la elasticità non sia perfetta, e venga presentata per $n<1$, che rappresenta la perfetta, sarà

(596) $V=\frac{mv+m'((n+1)v'-nv)}{m+m'}$,

(597) $V'=\frac{m'v'+m((n+1)v-nv')}{m+m'}$, posse

le velocità secondo la stessa dire-
zione. ——— . ———
Se fossero in contraria, por
dovrebbesi v' negativa. Si ha
poi V-V' = v'-v. ———
Nell' urto delle due sfere per-
fettamente elastiche la somma
delle forze vive è la stessa pri-
ma, e dopo l' urto. ———
L' urto delle due sfere
siano perfettamente elastiche
o siano prive affatto di elastici-
tà, non altera per nulla il cen-
tro di gravità del sistema
delle due ~~forze~~ sfere. ———
Supponiamo ora che due corpi
di forma qualunque si urtino
nello spazio. Il moto di un
corpo solido libero è determina-
to, allorchè il ciascheduno istante
si conosce:
1°. La velocità e la direzione
del suo centro di gravità.
2°. La direzione dell' asse istanta-
neo di rotazione che passa pel
centro di gravità. ———
3°. La velocità angolare di rota-
zione intorno a questo asse.
Allorchè non v' ha elasti-
cità di sorta, supposto che gli
assi fissi in ciascheduno dei
corpi ne siano gli assi princi-
pali, le infrascritte tredici

equazioni basteranno a determinare il moto di ciascheduno de' corpi dopo l'urto.

(598) $Na - M(v'x - ve) = 0,$

(599) $Nb - M(v'y - vf) = 0,$

(600) $Nc - M(v'z - vg) = 0$

(601) $N(\alpha'a - \alpha b) + A(r - u) = 0,$

(602) $N(\alpha c - \alpha''a) + B(q - m') = 0,$

(603) $N(\alpha''b - \alpha'c) + C(p - l) = 0,$

(604) $Na' - M'(V'x' - Ve') = 0,$

(605) $Nb' - M'(V'y' - Vf') = 0,$

(606) $Nc' - M'(V'z' - Vg') = 0,$

(607) $N(\alpha_2 a' - \alpha_1 b') + A'(r' - u') = 0,$

(608) $N(\alpha_1 c' - \alpha_3 a') + B'(q' - m'') = 0,$

(609) $N(\alpha_3 b' - \alpha_2 c') + C'(p' - l') = 0,$

(610) $v'ax + v'by + v'cz + p(c\alpha' - b\alpha'') + q(a\alpha'' - c\alpha) + r(b\alpha - a\alpha') + V'a'x' + V'b'y' + V'c'z' + p'(c'\alpha_2 - b'\alpha_3) + q'(a'\alpha_3 - c'\alpha_1) + r'(b'\alpha_1 - a'\alpha_2) = 0.$

Alle quali aggiungere si debbono le

(611) $2Na - M(UX - ve) = 0,$

(612) $2Nb - M(UY - vf) = 0,$

(613) $2Nc - M(UZ - vg) = 0,$

(614) $2N(\alpha'a - \alpha b) + A(R - u) = 0,$

(615) $2N(\alpha c - \alpha''a) + B(Q - m') = 0,$

(616) $2N(\alpha''b - \alpha'c) + C(P - l) = 0,$

(617) $2Na' - M'(U'X' - v_1 e') = 0,$

(618) $2Nb' - M'(U'Y' - v_1 f') = 0,$

(619) $2Nc' - M'(U'Z' - v_1 g') = 0,$

(620) $2N(\alpha_2 a' - \alpha_1 b') + A'(R' - u') = 0,$

(621) $2N(\alpha_1 c' - \alpha_3 a') + B'(Q' - m'') = 0,$

(622) $2N(\alpha_3 b' - \alpha_2 c') + C'(P' - l'') = 0.$

Siano i due corpi elastici, o no, la componente della velocità del centro di gravità di ciascuno di due corpi in direzione perpendicolare alla normale alle superficie dei due corpi nel punto di contatto si conserva la stessa prima e dopo l'urto.

Per ciascuno dei due mobili le direzioni dei loro centri di gravità avanti e dopo l'urto saranno nello stesso piano con la normale anzidetta.

Se la normale al punto di contatto passa pel centro di gravità di uno di essi M, l'urto non cambia punto il moto di rotazione di lui, siano i corpi perfettamente elastici, o non abbiano elasticità veruna. Se la normale al punto di contatto delle superficie dei due corpi passi pei centri di gravità di amendue i corpi M ed M'. Detti γ, γ gli angoli, che le velocità di M ed M' avanti l'urto fanno con le porzioni di normale nell' interno dei corpi, si avrà

(623) $N = \frac{MM'(v\theta\gamma + v'\theta\gamma')}{M' + M}$, quantità che riuscir dee positiva. Allorchè trovasi negativa, converrà conchiudere che non v'ha percossa fra i due corpi. ———

Presentato con β l'angolo, che la direzione della velocità del corpo M dopo l'urto fa con la normale suddetta, nella ipotesi che v'abbia elasticità, si ha

(624) $v\theta\beta = \frac{Mv\theta\gamma - M'v'\theta\gamma'}{M + M'}$.

I centri di gravità dei due corpi M ed M' avranno dopo l'urto delle velocità eguali e dirette nel medesimo senso secondo la normale. ———

Se poi i due corpi siano perfettamente elastici, sarà

(625) $u\theta\beta = \frac{(M - M')v\theta\gamma - 2M'v'\theta\gamma'}{M + M'}$

Se M = M', ciascun centro di gravità trovasi dopo l'urto avere secondo la normale la velocità, mutata direzione che l'altro aveva avanti l'urto. Allorchè i due centri di gravità si muovono sulla normale, s'attinge a due risultamenti analoghi a quelli trovati per due sfere al principio del presente capitolo.

Se l'asse di rotazione del corp[o]
M coincida avanti l'urto con un[o]
degli assi principali, che passa[no]
pel suo centro di gravità, c[ome]
l'asse delle z ad esempio, e
l'altro corpo M' sia una
sfera omogenea, sarà

(626) $N = \frac{AMM'(V\cos\delta' - v\cos\delta + u(\alpha' a - \alpha b \ldots}{AM' + AM + (\alpha' a - \alpha b)^2 MM'}$

essendo δ e δ' gli angoli, che da[nno le]
rette protratte pel punto di con[-]
tatto, parallele alle direzioni
delle velocità v e V', fanno con
la direzione della porzion[e]
di normale nell'interno di
M dalla stessa parte. —

Quando i corpi non sono ela-
stici, si ha

(627) $v = \frac{u(AM' + AM) + MM'(V\cos\delta' - v\cos\delta)(ab \ldots}{AM' + AM + MM'(\alpha' a - \alpha b)^2}$

Si determinerebbe in modo analo-
go R pei corpi perfettamente ela-
stici. —

Finora si è supposto che i due
corpi M ed M' siano al tutto li-
beri, ma se siano trattenuti da
uno o da due punti fissi, la
determinazione dei loro moti
dopo l'urto dipenderà dai mede-
simi principii e non vi sarà di[f-]
ferenza che nel numero delle
equazioni che considerare si
debbono. —

(3.)

Se il punto fisso non sia il centro di gravità di M, non si avrà

(628) $\int x_1 dm = 0$,

(629) $\int y_1 dm = 0$,

(630) $\int z_1 dm = 0$.

Si potranno però prendere i tre assi coordinati ortogonali che passano per questo punto, di modo che coincidano coi tre assi principali passanti pel punto fisso, ed allora sarà

(631) $\int x_1 y_1 dm = 0$,

(632) $\int x_1 z_1 dm = 0$,

(633) $\int y_1 z_1 dm = 0$.

Capitolo L.III.

Delle proprietà generali del moto di un sistema di corpi.

Siano m, m', m''.... le masse di punti materiali componenti il sistema; p, p', p''..... le velocità perdute ad un'epoca qualunque del moto in virtù del mutuo loro legame; x, y, z le coordinate di m, relative ad assi ortogonali; ed α, β, γ gli angoli che la direzione di p fa con gli assi stessi, e si avranno le sei equazioni infrascritte fra le quantità di moto perdute mp, $m'p'$, $m''p''$, ——, ciò sono

(634) $\Sigma mp \cos\alpha = 0,$

(635) $\Sigma mp \cos\beta = 0,$

(636) $\Sigma mp \cos\gamma = 0,$

(637) $\Sigma mp(z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0,$

(638) $\Sigma mp(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0,$

(639) $\Sigma mp(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0.$

Supponendo che tutte le forze continue agenti sul sistema si riducano a tre X, Y, Z parallele agli assi coordinati, da queste equazioni deduconsi le seguenti

(640) $\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma m X,$

(641) $\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma m Y,$

(642) $\Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma m Z,$

(643) $\Sigma m(z d^2y - y d^2z) = \Sigma m(zY - yZ) dt^2,$

(644) $\Sigma m(x d^2z - z d^2x) = \Sigma m(xZ - zX) dt^2,$

(645) $\Sigma m(y d^2x - x d^2y) = \Sigma m(yX - xY) dt^2.$

I secondi membri di quest' ultime sei equazioni sono nulli, se le forze continue sollecitanti il sistema siano tali, che si facciano equilibrio nell' ipotesi che il sistema stesso sia di forma invariabile.

Nel formare queste equazioni non deesi punto aver rispetto alla mutua attrazione dei corpi del sistema, supposta l'azione eguale alla reazione fra due punti eguali di massa.

Il centro di gravità di un sistema di corpi, il quale non abbia verun punto fisso, si muove nello spazio, come se le masse di tutti i corpi vi fossero riunite, e che le forze continue fossero a cotal punto applicate parallelamente alle loro direzioni senza cambiarne le intensioni.

Allorchè il sistema contiene di punti

di punti costretti a moversi sopra linee e superficie, fra le forze continue del sistema computare si debbono le resistenze, che così fatte linee o superficie oppongono al moto. Il moto del centro di gravità sarà rettilineo e uniforme ogni volta che la mutua attrazione dei corpi del sistema sia la sola forza che li solleciti. Il moto del centro di gravità si conserverà sempre lo stesso malgrado le azioni reciproche de' punti del sistema, provenienti dal loro legame, o dalla scambievole loro attrazione, ovveramente da molle interposte; di guisa che in un sistema di corpi, non trattenuto da verun punto fisso, non può venire alterato il moto del centro di gravità di lui dalla sola azione delle parti componenti il sistema. —

Questo risultamento mette davanti il principio generale della conservazione del moto del centro di gravità. La

velocità e direzione del centro di gravità non viene cambiata per l'urto scambievole di due o più corpi del sistema. —

Nel moto di un sistema di punti materiali legati tra se in un modo qualunque, e soggetti alla loro mutua attrazione, i quali non siano sollecitati da veruna forza esterna, se ve n'abbia alcun fisso, la somma delle aree descritte intorno ad un punto qualunque della projezione di un punto del sistema sopra un piano, è proporzionale al tempo speso a descriverle. —

E' questo il principio generale della conservazione delle aree. —

Allorchè esiste un punto fisso nel sistema, il principio delle aree non si verifica che per così fatto punto, ma resta tuttavia arbitraria la posizione del piano di projezione che passa per questo punto. Se due punti del sistema siano fissi, il

principio delle aree avrà solo luogo prendendo il centro delle aree su la retta che unisce i due punti fissi, e il piano di projezione perpendicolare a questa retta. Nel caso di un punto fisso, i punti materiali componenti il sistema possono essere sollecitati da una forza continua diretta verso questo punto, senza che il teorema delle aree cessi rispetto al punto fisso.

Siano l, l', l'' gli angoli che la perpendicolare innalzata sul piano di projezione della massima somma delle aree fa con gli assi delle z, y, x, e la projezione di questo piano verrà determinata dalle

(646) $\cos l = \frac{c}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}}$,

(647) $\cos l' = \frac{c'}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}}$

(648) $\cos l'' = \frac{c''}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}}$, ove c, c', c'' sono costanti; il perchè il piano dicesi invariabile.

Vi hanno poi le equazioni

(649) $c = \Sigma m\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)$,

(650) $c' = \Sigma m\left(x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right)$,

(631) $c'' = \Sigma_i m\left(z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt}\right)$.

Siano C, C', C'' ciò che diventano c, c', c'' quando si trasporta l'origine delle coordinate in un punto di cui α, β, γ siano le coordinate, M la somma delle masse componenti il sistema, ed x_1, y_1, z_1 le coordinate del centro di gravità di M, e sarà

(632) $C = c + M\left(\alpha\frac{dy_1}{dt} - \beta\frac{dx_1}{dt}\right)$,

(633) $C' = c' + M\left(\gamma\frac{d_1x}{dt} - \alpha\frac{dz_1}{dt}\right)$,

(634) $C'' = c'' + M\left(\beta\frac{d_1z}{dt} - \gamma\frac{d_1y}{dt}\right)$.

Se le quantità, che moltiplicano M in queste equazioni sono nulle, s'avrà $C = c$, $C' = c'$, $C'' = c''$ e i piani invariabili relativi ai due punti saranno paralleli.

Inoltre i piani invariabili relativi a tutti i punti di una medesima parallela alla retta che descrive il centro di gravità, sono tra se paralleli, e la direzione del piano invariabile non cambia passando da una parallela all'altra.

Il piano invariabile relativo al centro di gravità conserva sempre la stessa direzione, quantunque il centro di gravità sia dislocato.

Il piano è trasportato col centro di gravità nel moto del sistema. ma durante il moto egli rimane sempre parallelo a se stesso.

Il piano invariabile può determinarsi in ciascuno istante col mezzo delle velocità relative dei punti del sistema intorno al centro di gravità, e senza conoscerne le velocità assolute nello spazio. ———

Il teorema delle aree non cessa punto, se i corpi del sistema s'urtino scambievolmente. Ma l'urto di corpi estranei al sistema cangerà in generale il valore delle aree, e di conseguenza la direzione del piano invariabile.

L'equazione generale delle velocità virtuali è

(655). $\Sigma(m p \sigma \alpha \delta x + m p \sigma \beta \delta y + m p \sigma \gamma \delta z) = 0$, la quale ha luogo egualmente allorchè i mobili m, m', m'' —. vanno soggetti a cambiamenti subitanei nella loro velocità. vale a dire quando le velocità perdute p, p', p'' sono indeterminatamente piccole.

Ella sussiste per tutti i

Dislocamenti

dislocamenti che possono farsi subire al sistema senza rompere la condizioni che legano fra se i mobili. —

Sia

(656) $F(t, x, y, z, x', y', z', ----) = 0$,

una delle Equazioni di condizione accompagnanti la quistione; e si avrà

(657) $T dt + F'(x)dx + F'(y)dy + F'(z)dz + F'(x')dx' + ----- = 0.$ —

Quando $Tdt = 0$, si ha $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$, $\delta x' = dx'$, ----

In questa supposizione la (655) mutasi nella

(658) $\Sigma(mp\theta\alpha dx + mp\theta\beta dy + mp\theta\gamma dz) = 0$.

da cui derivasi la

(659) $\Sigma m\left(\frac{dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma m(X dx + Y dy + Z dz)$, e di conseguenza

(660) $d.\Sigma m v^2 = 2\Sigma m(X dx + Y dy + Z dz)$.

Se $\Sigma m(X dx + Y dy + Z dz)$ sia differenziale esatto, posto

(661) $\Sigma m(X dx + Y dy + Z dz) = dQ(x, y, z, x', y', z' ---)$ integrando si avrà

(662) $\Sigma m v^2 = C + 2Q(x, y, z, x', y', z' ----)$

Questa equazione presenta il principio della conservazione delle forze vive.

Siano v, e V le velocità di un avanti o dopo un urto improvviso, ed u la velocità perduta, e si avrà

(663) $\Sigma m v^2 - \Sigma m V^2 = \Sigma m u^2$; $\Sigma m v^2$ è

un massimo e un minimo nello stesso tempo che lo è Q e di conseguenza $\Sigma m v^2$ sarà massimo quando il sistema passa per una posizione di equilibrio stabile, e sarà minimo allorchè passa per una posizione d'equilibrio vacillante[1]

Sia m, la massa di uno dei punti del sistema; v la sua velocità, e ds l'elemento della sua direzione, e sarà $\int \Sigma m v ds$, preso fra dati limiti, massimo ovveramente minimo che è il principio generale della minima o massima azione[1].

Ma

(664) $\int \Sigma m v ds = \int \Sigma m v^2 dt$: dunque il principio della minima o massima azione appellar si può il principio della minima od massima ~~azione~~ somma delle forze vive.

Allorchè i mobili non sono sollecitati da veruna forza continua si ha

(665) $\int \Sigma m v ds = Ps$. e

(666) $\int \Sigma m v^2 dt = Qt$.

Nota = Nel compilare la Meccanica dei solidi, oltre il Journal del'Ecole Polytechnique, les Annales de Math: par Gergonne, la Società Italiana, le Memorie delle Accademie di Francia, Torino e Milano sonosi consultati gli infra scritti Autori. —— . ——

Archimede, Galilei, Borelli, Viviani, Newton, Riccati, i Bernoulli, Eulero, Bossut, d'Alembert, Bezout, Garnier, Poinsot, Carnot, Lagrange, Laplace, Prony, Cauchy, Biot, Francœur, Poisson, Coulomb, Girard, Hachette, Mayniel, Lanz et Betancourt, Berard, Borguis, Duan, Mascheroni, Navier, Venturoli. ——

Fine della Meccanica

4.)

Sezione Prima
Statica

Capitolo I°
Preliminari della Statica

§. 1°. La Meccanica dal Greco Mechanomai eccitare, muovere, è la scienza sì dell' equilibrio, che del movimento dei corpi sì solidi che fluidi. —

Ma siccome che le proprietà dei fluidi molto differiscono da quelle dei solidi noi partiremo la Meccanica in meccanica dei Solidi e Meccanica dei fluidi. — Questa dicesi anche Idraulica derivata da hydros acqua ed aulos movimento. Quella dell' equilibrio dicesi statica derivata da stauro. —

E quella parte che tratta del movimento dei Corpi Dinamica da Dynamis forza potenza; L' Idraulica si divide in due parti, in Idrostatica cioè ed in Idrodinamica. La prima tratta dell' equilibrio dei fluidi e la seconda del movimento. —

2)

S.° 2.° L'impossibilità in cui sono i corpi di cambiare da se lo stato di moto di quiete senza una cagione particolare che agisca sopra di loro, è una proprietà dei corpi detta forza d'inerzia.

Questa forza, è un risultamento dell'esperienze dell'osservaz.e dell'analogia, sull'esistenza della quale non può cadere dubbio alcuno; di fatti noi vediamo i corpi perseverare di più nel movimento quanto più si tolgono gli ostacoli.

L'analogia ci porta dunque a concludere che se si potessero levare tutti gli ostacoli il corpo non cesserebbe di moversi.

L'inerzia poi è precisamente rimarchevole nei corpi Celesti. Essi si movono fin adesso nella stessa maniera senza che la più accurata osservazione abbia potuto vedere variazioni.

Un corpo si dice in quiete

relativamente ad altri corpi che sono fissi.

Se il corpo cambia successivamente la sua posizione relativamente ad altri corpi circostanti diremo che il corpo è in movimento.

Ogni causa che tende a far variare lo stato di un corpo la diremo forza o potenza.

§. 3°. La natura delle forze è affatto sconosciuta, e non possiamo valutarle che per mezzo dei suoi effetti per cui una forza dicesi doppia, tripla .... di un'altra forza, quando gli effetti che produce sono doppi tripli &c. di quelli dell'altra.

Per misurarle si prende una forza per unità di misura, e che può esprimersi in numeri e linee da cui può rappresentarsi.

Per conoscere se due forze sono eguali poste ad uno stesso punto agenti in direzioni opposte si equilibrano.

Scoperto che due forze siano uguali, applicate ad un pun-

(4.)

to ed in modo che abbiano la stessa direzione il punto sarà tirato da una forza dop-pia, così se 3 tripla ec. Così quando si dice che una forza è n.pla di un'altra s'intende che è composta di n forze eguali a questa ed agenti in direzione di essa. Ordinariamente si rapp.a la forza sulla direzione della linea che rapp.a la forza.

Se le due forze agiscono in senso contrario si dovranno esprimere le forze con linee opposte o con segni positivi o negativi.

Se le forze fossero nello spazio non vi sarà di bisogno di ciò mentre saranno date col mezzo dei coseni degli angoli che le direzioni fanno coi piani.

§. 2.° Qualunque sia la natura di una forza essa avrà una direzione ed una intensione di ciò ci accorgiamo fin da fanciulli, mentre sappiamo che qualunque grave cade verso il centro. Si avrà dunque per evidente che una

(5.)

forza agisce su di un punto con una direzione e con una certa impulsione —

= N.° 5.° Allorchè più forze agiscono su diversi punti di un solido potremo supporre che sieno applicate a tanti punti legati fra loro invariabilmente, e così trovare quale movimento e quale direzione ha il sistema nello spazio, fissi essendo o variabili, e ciò è l'oggetto della Meccanica, essendo sollecitato da forze date in intensità e direzione. —

Per converso, se si volesse che il sistema si movesse secondo una data direzione si dovrebbe trovare le forze. Per agevolare la via di questo problema si da principio considerando le forze che si debbono applicare finchè si abbia la quiete o movimento nullo. —

Risoluto questo si agevola l'altro. — Questo è il subbietto della Statica, oltre di che mostreremo che tutte le quistioni di Dinamica si riducono a quelle di Statica

Lezione 19. (6)

La 20. Ripetizione

§. 6.° Nella Statica non è punto necessario conoscere gli effetti attuali delle forze sulla materia, vale a dire il conoscere i diversi movimenti che le forze sono capaci di imprimere avuto riguardo alla loro direz.e ed intensione, ma è suff.e considerare le forze come semplici grandezze omogenee e di cons.e comparabili tra se ed assegnare le relazioni che devono esistere fra di loro affinchè esse si possano scambievolmente distruggere. Quando si fa passaggio della teorica dell' equilibrio a quella del moto sono necessarj altri principj per calcolare le forze, avvegnachè non calcolandosi che gli effetti è necessario conoscere le relazioni ad essi, se una forza doppia produce una velocità doppia o se applicata ad un corpo minore ne produca una velocità 2 tanti minori. Che le verità statiche sussistono senza e voli forze proporzionali ai loro effetti sensibili, avvegnachè così fatte verità nascono dall' azione di più forze che non ottengono il loro effetto ma mutuamente si distruggono, di guisa che lo stato di equilibrio di corpi si può considerare

7)

qual caso particolare dello stato di moto nel quale la misura della forza si ricava dai loro effetti, e gli effetti stessi sono scambi. —

§. 7. A tutto rigore un corpo in equilibrio è nello stato medesimo che se è in quiete, avvegnachè l'effetto della forza essendo sempre annullato ovveramente annullandosi in ciascun istante se le forze di continuo si riproducono, ogni corpo in equilibrio è suscettivo di muoversi in virtù di una data forza assolutamente come se fosse stato in quiete da sè. Nulladimeno si può distinguere l'equilibrio dalla quiete in ciò che nella quiete il corpo non è sollecitato da veruna forza, e nell'equilibrio è sollecitato da forze i cui effetti si elidono. —

Questa distinzione che a tutto rigore sembra inutile diventa sensibile negli equilibri che ci vengono posti davanti dalla natura, e di vero presso che verun corpo non è in equilibrio, e quando lo è in effetto si frappone esso un contrasto fra le forze che lo sollecitano che il fanno un poco oscillare e il portano ad una posizione unica che di poi abbandona.

8)

Nella soluz.e matematica delle quistioni, riguardare si debbono i corpi in equilibrio come se fossero in quiete e reciprocamente, se un corpo sta in quiete per l'azioni di forze che si elidano lo sarà pure per l'applicazione di forze che si elidano

§ 8.° La statica non ha per fondamento che l'inerzia e l'impenetrabilità della materia

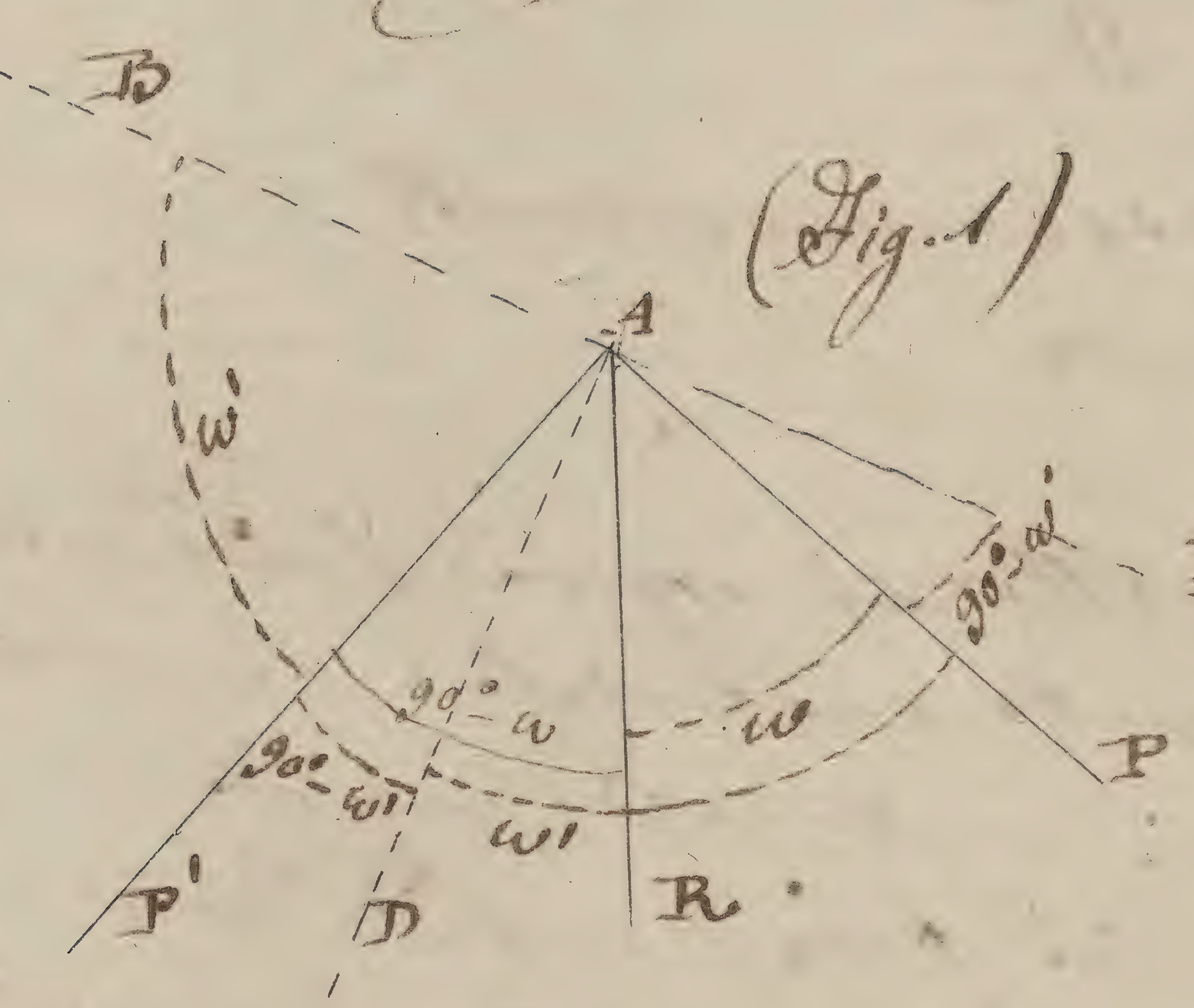
Capitolo II.

Della composizione delle forze concorrenti in un punto

§. 9. Allorchè sopra il medesimo punto materiale che si tende come matematico (punto), agiscono più forze secondo direzioni qualunque, se sotto l'azione di queste forze il corpo si move, esso si moverà con una velocità e con una direzione, dunque è lo stesso che considerare il corpo animato da una forza sola che dicesi risultante, purchè il suo effetto sia lo stesso di quello che risulta dall'azione delle altre forze che diconsi componenti. —

Se le componenti abbiano per direzione la medesima retta ed agiscono nella medesima direzione, è evidente che la risultante sarà la loro somma, e se le forze tirano in direzioni diametralmente opposte sarà il punto spinto dalla parte in cui la somma di esse è maggiore, e se la somma da una parte eguaglia quella dell'altra il punto sarà in equilibrio.

§. 10. Cerchiamo le relazioni che hanno luogo fra le componenti e la risultante qua-



(Fig. 1)

lungo fra le direzioni. —

Supponiamo primieramente che 2 sieno le forze P, P', applicate ad un punto materiale e le loro direzioni siano ad angolo retto. Sia R la loro risultante; chiamiamo ω, l'angolo che fa la sua direzione con la direz.^e di una componente con P per es. e però

$\hat{PR} = \omega$ (fig. 1)

Se l'azione di una delle due forze fosse nulla, il punto materiale prenderebbe la direzione dell'altra forza, e così per l'altra, dunque quando nè l'una nè l'altra è zero la direzione della risultante dovrà essere entro l'angolo che formano le componenti, e nel nostro caso entro l'angolo retto. Due rette che s'incontrano sono sullo stesso piano, e però su questo sarà la risultante; l'angolo che la risultante fa con P' sarà 90°-ω e però

$R\hat{P}' = 90° - \omega$. —

L'angolo ω dipende dalle relazioni che hanno fra loro le componenti, dunque esso resterà invariato se questa relazione non si muti, se dunque a vece di P e P' prenderemo mP, e mP', l'angolo ω non

11

cambierà, e le forze multiple introdotte non produrranno altro che maggiore intensità nella risultante che sarà m.R. Dunque la relazione delle forze dalla risultante non potrà essere che funzione di ω, e però si conclude che $\frac{P}{R}$, e $\frac{P'}{R}$ sono funzioni dell'angolo che ciascheduna componente fa colla risultante. Ma l'angolo che fa $P^\wedge R$ è ω, dunque si potrà porre

$\frac{P}{R} = \varphi(\omega)$, così

$\frac{P'}{R} = \varphi(90^\circ - \omega)$: è facile avvedersi che debbe aversi la stessa funzione, poichè quello che si verifica per una componente si verifica per l'altra ed è indiff.e il rappo. con ω l'angolo che fa $P^\wedge R$ o $P'^\wedge R$.

Si avranno dunque le equazioni

(1) $P = R\varphi(\omega)$,

(2) $P' = R\varphi(90^\circ - \omega)$, per mezzo delle quali si determina la forma della φ che ci è incognita. Se perciò porremo $P' = 0$, si ha $P = R$, ed $\omega = 0$; se $P = 0$, $P' = R$, ed $\omega = 90^\circ$, in corrispondenza avremo sostituendo

(3) $\varphi(0) = 1$,

ed avremo la

(4) $\varphi(90°) = 0$, dalla (1). – Sia il punto A nella (fig 1) cui sieno applicate le AP, AP′ che fanno in A l'angolo retto si avrà

$P\hat{P}' = 90°$ dal punto A si protraggano le AD, AB′ di guisa che sia l'angolo

$AD\hat{}AB' = 90°$; di più che AD cada entro l'angolo $P'\hat{R}$

Supponiamo che sia $\omega' = AD\hat{P}$, e si avrà $AD\hat{P}' = 90° - \omega' = AB'\hat{P}$, laonde se si figuri che P sia la risultante di due forze che agiscono nelle direzioni AB′, AD, le componenti di P saranno

$P\,\varphi(\omega')$

$P\,\varphi(90° - \omega')$. Prendiamo una forza in direzione opposta a quella che agisce nella direzione AB′, cioè verso B, allora se la P′ si consideri la risultante di due forze agenti secondo AB, AD, la forza che agisce verso B si dovrà prendere negativamente, e però saranno espresse da

$-P'\,\varphi(\omega')$

$+P'\,\varphi(90 - \omega')$, Chiamiamo V, U la somma delle componenti nelle direzioni di

AD, AB', che saranno date dalle equazioni

(5) $V = P\varphi(\omega') + P'\varphi(90^\circ - \omega')$

(6) $U = P\varphi(90^\circ - \omega') - P'\varphi(\omega')$; ma la R equivale alle due P, P', dunque le componenti di R secondo le direzioni AD, AB' esser debbono V ed U; ma si è dimostrato che $R\varphi(\omega' - \omega)$ e $R\varphi(90^\circ - (\omega' - \omega))$ sono (dipend.° figura) le componenti di R ~~dette V, U sulle P~~.

Dunque dovremo concludere le

(7) $V = R\varphi(\omega' - \omega)$

(8) $U = R\varphi(90^\circ - (\omega' - \omega))$. Eguagliando questi valori a quelli delle (5) (6) avremo le due

(9) $R.\varphi(\omega' - \omega) = P\varphi(\omega') + P'\varphi(90^\circ - \omega')$

(10) $R\varphi(90^\circ - (\omega' - \omega)) = P\varphi(90^\circ - \omega') - P'\varphi(\omega')$ ovvero avremo le

(11) $\varphi(\omega' - \omega) = \frac{P}{R}\varphi(\omega') + \frac{P'}{R}\varphi(90^\circ - \omega')$

(12) $\varphi(90^\circ - (\omega' - \omega)) = \frac{P}{R}\varphi(90^\circ - \omega') - \frac{P'}{R}\varphi(\omega')$: ma $\frac{P}{R} = \varphi(\omega)$ e $\frac{P'}{R} = \varphi(90^\circ - \omega)$ per le (1)(2), dunque avremo le

(13) $\varphi(\omega' - \omega) = \varphi(\omega)\varphi(\omega') + \varphi(90^\circ - \omega)\varphi(90^\circ - \omega')$,

(14) $\varphi(90^\circ - (\omega' - \omega)) = \varphi(\omega)\varphi(90^\circ - \omega') - \varphi(90^\circ - \omega)\varphi(\omega')$.

Ora ω' è arbitrario: queste due equazioni si debbono verificare adunque indipend.° da ω; e però ancora se $\omega = \omega'$; il che

è permesso, e perciò posto si
hanno le

(15) $\varphi(0) = \varphi(\omega)^2 + \varphi(90^\circ - \omega)^2$

(16) $\varphi(90^\circ) = 0$. A cagione della (3)
la (15) diventa

(17) $1 = \varphi(\omega)^2 + \varphi(90^\circ - \omega)^2$, e per la
~~(4)~~ la (17) diventa posti i valori $\varphi(\omega)$, $\varphi(90^\circ - \omega)$ la

$1 = \dfrac{P^2}{R^2} + \dfrac{P'^2}{R^2}$, d'onde

$R^2 = P^2 + P'^2$ dalla quale

(18) $R = \sqrt{P^2 + P'^2}$, il che vuolsi
davanti essere l'intensione
della risultante nella fatta
supposizione la diagonale del
rettangolo fatto dalle componenti.

Lezione 21.

Nella (14) poniamo a vece di $90^\circ - \omega$
ω', e nasce la

(19) $\varphi(\omega + \omega') = \varphi(\omega)\varphi(\omega') - \varphi(90^\circ - \omega')\varphi(90^\circ - \omega)$
poniamo nella (13) $\omega' + h$, e $\omega + h$ a
vece di ω' e di ω, il 1.° membro
resta invariato, e così il 1.° membro della (19) ponendo $\omega' + h$
e $\omega + h$, a vece di ω' e ω. —
Da ciò ne viene che facendo
la stessa sostituzione nei
secondi membri essi debbono
rimanere invariabili, dunque
fatta questa sostituzione e
sviluppando tutti i termini
che contengono h debbono
essere ciascuno eguale a zero

indipendentemente dai valori di ω'. Ma il termine che contiene ω' è la derivata, dunque queste derivate esser debbono zero, e però le derivate dei secondi membri della (13) e (19) relative ad ω, ω' esser debbono zero, e però avremo le equazioni

(20) $\varphi'(\omega)\varphi(\omega') + \varphi'(\omega')\varphi(\omega) - \varphi'(90^\circ-\omega)\cdot\varphi(90^\circ-\omega') - \varphi'(90^\circ-\omega')\varphi(90^\circ-\omega) = 0$

(21) $\varphi'(\omega)\varphi(\omega') - \varphi'(\omega')\varphi(\omega) + \varphi'(90^\circ-\omega)\varphi(90^\circ-\omega') - \varphi'(90^\circ-\omega')\varphi(90^\circ-\omega) = 0$

Sommando queste due equazioni si ha la

(22) $\varphi'(\omega)\varphi(\omega') - \varphi'(90^\circ-\omega')\varphi(90^\circ-\omega) = 0$

dalla quale si ricava la

(23) $\dfrac{\varphi'(\omega)}{\varphi(90^\circ-\omega)} = \dfrac{\varphi'(90^\circ-\omega')}{\varphi(\omega')}$, ma ω' è arbitrario dunque si può porre il 2.° membro $= C$, e si avrà

(24) $\dfrac{\varphi'(90^\circ-\omega')}{\varphi(\omega')} = C$, e però si avrà

(24) $\dfrac{\varphi'(\omega)}{\varphi(90^\circ-\omega)} = C$. Dalla (17.) si ha

(25) $\varphi(90^\circ-\omega) = \sqrt{1-\varphi(\omega)^2}$, per cui la (24) si cambia nella

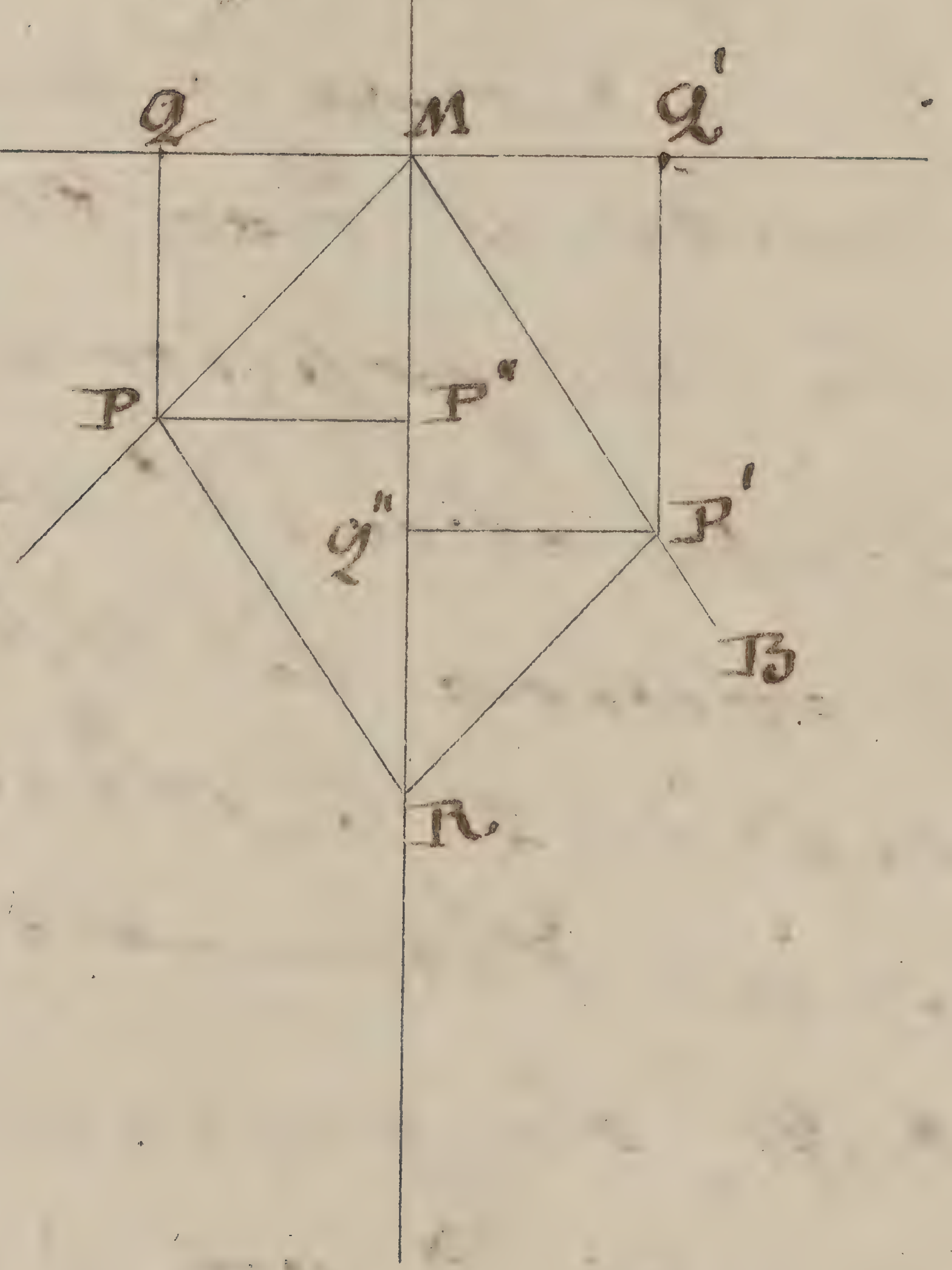
(26) $\dfrac{\varphi'(\omega)}{\sqrt{1-\varphi(\omega)^2}} = C$, e però integrando

(27) $A(0 = \varphi(\omega)) = C\omega + C_1$ da cui $\varphi(\varphi(\omega)) = A0 = C\omega + C_1$), e però

(28) $\varphi(\omega) = \theta(c\omega + c_1)$, da cui conviene determinare c e c_1. —
Ma $\varphi(0) = 1$, $\varphi(90°) = 0$,
dunque avremo sostituendo
$1 = \theta c_1$,
$0 = \theta(90°c + c_1)$
La prima di queste ci dice che $c_1 = 90°$ per cui l'altra diventa
$0 = \theta(90°c + 90°)$, da cui
$c = -1$, $c_1 = 90°$. Sostituendo nella (28) si avrà l'integrale determinato che sarà
(29) $\varphi(\omega) = \theta(90° - \omega) = \vartheta\omega = \frac{P}{R}$ dipend. dalla (1), eguale inoltre $\frac{P}{\sqrt{P^2+P'^2}}$; ma ω, è l'angolo che fa $P^{\wedge}R$, dunque il coseno dell'angolo che fa la componente P con la risultante R è lo stesso che il coseno dell'angolo che fa la diagonale del rettangolo i cui lati sono le componenti P, P' con la componente P.
Dunque si dovrà conchiudere che la diagonale del rettangolo esprime in direzione ed in intensione la risultante delle forze rappresentate dai lati del rettangolo stesso —

(17)

(fig. 2.)



§. 11. Ora dimostriamo che qualunque siano le che le componenti fanno fra loro, la diagonale rappa. la risultante in intensione e direzione.

Si osservi la (fig. 2).
Al punto M siano applicate le MP, MP' rappe. in direzione ed intensità. Si compia il parallelogrammo MPRP'. Nel punto M ove sono applicate le due forze, si protragga QQ' perpendo. alla MR diagonale di qto. parallelogrammo, e dai punti P, P' si guidino le perpendi. PQ, P'Q' alla QQ', e le PQ'', P'P'' alla MR.

Di qta guisa si hanno i due rettangoli PQMP'', e i due MQ''P'Q'. ~~i retti~~ triangoli MPR, MP'R sono eguali, e però PP'' = P'Q', e però QM = MQ', e quindi la risultante delle MQ, MP'' sarà MP, e delle MQ', MQ'' la MP'.
Dunque le MP, MP' vengono surrogate dalle MQ, MP'', MQ', MQ''; ma MQ ed MQ' sono opposte ed eguali, e perciò si elidono, dunque rimangono le MQ'' ed MP'' cospiranti e perciò devonsi sommare;

(18.)

Dunque le MP, MP' sono equivalenti alla somma PM + Mq'' ma MP'' = Rq'', dunque le due forze MP, MP' equivalgono a Mq'' + Rq'' = MR cioè alla risultante. Come ec.

= §. 12. Mediante il dimostrato teorema la composizione di 2 forze applicate al med.° punto in una, ovvero la risoluzione di 1 forza in 2 si riduce a trovare un triangolo.

Infatti, supponiamo che MP (fig. 2) RP' ed MR è la risultante. In questo triangolo MP'R si ha MRP' = PMR = $P\hat{}R$. l'angolo RMP' = $P'\hat{R}$, e MP'R = 180° − ($P\hat{}R$ + $P'\hat{}R$) = 180° − $P\hat{P'}$. Dunque nel Δ.° RMP' si ha la risultante, le due componenti e gli angoli che fanno 2 a 2 le forze: dunque si è ridotto il problema alla risoluzione di un Δ.° e però si ha P, P', $P\hat{}R$, $P'\hat{}R$, R e 180° − $P\hat{}P'$. Ma la trigonometria c'insegna a determinare tre elementi quando sieno cogniti gli altri 3, purchè fra questi vi sia un lato, dunque date 3 delle suddette quantità si hanno le altre 3 avendo riguardo ai

così dubbj ——

§.13. Da un triangolo, i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti; dunque si avrà

$P : P' : R :: \emptyset.\widehat{P'R} : \emptyset.\widehat{PR} : \emptyset(180°-\widehat{PP'})$,

ma $\emptyset(180°-\widehat{P'P}) = \emptyset\widehat{P'P}$, dunque

$P : P' : R :: \emptyset\widehat{P'R} : \emptyset\widehat{PR} : \emptyset\widehat{PP'}$

Il che mette davanti essere ciascuna forza P, P', R proporzionale al seno che formano le altre due forze ——

§.14. Dal parallelogrammo delle forze si mostra che la risultante di due forze che facciano un'angolo minore di 180° non può mai esser nulla, a meno che non siano nulle una delle due forze. Perchè se le due forze non sono per diritto si può formare un triangolo. Se le due forze fanno un'angolo di 180° la risultante sarà o zero se eguali le due forze, o la loro diff.za ——

§.15. Se abbiasi l'angolo $\widehat{PP'} = 90°$, sarà

$P : P' : R :: \emptyset\widehat{P'R} : \emptyset\widehat{PR} : 1.$

e quindi

$P : R :: \emptyset\widehat{P'R} : 1$, e

$P' : R :: \emptyset\widehat{PR} : 1$, ossia

$P : R :: \emptyset(90°-\widehat{PR}) : 1$ e

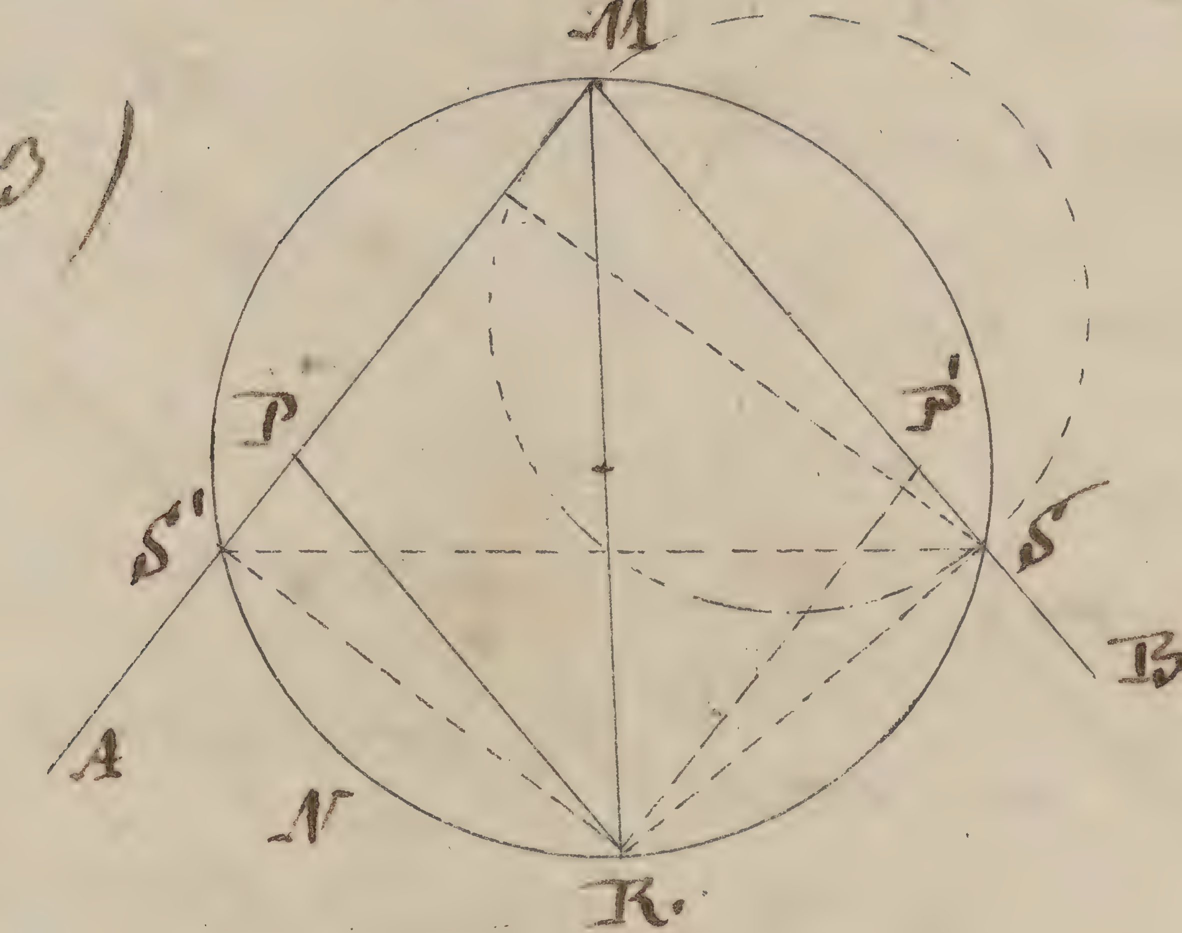
P' : R :: θ(90° - P'^R) : 1, dalle quali si hanno le

(30) $P = R.\theta P\hat{}R$

(31) $P' = R.\theta P'\hat{}R$ ——— .

§. 16. Si osservi la fig. 3. ———

(fig. 3)



Sia MR la risultante delle due forze P, P' presentate dalle MP, MP', e sopra MR come diametro descritto un circolo, tagli in S, S' le direzioni delle forze MP, MP' prolungate, si conducano le rette SR, S'R. Siccome i due angoli MS'R, MSR sono nel semicircolo la RS sarà perpend.e ad MP', e RS' alla MP. Si compia il parallellogrammo MPRP', e si conduca SS', gli angoli P'^R e S'SR sono eguali perchè insistono sull'arco S'NR così pure l'angolo $P'\hat{R}$ = SS'R

Ma l'angolo P'^R = PRM, dunque l'angolo SS'R = PRM e però simili i Δ.i MPR, SS'R,

~~ecc P : P' : R~~ ::

dunque P : P' : R :: RS : S'R : SS', laonde P : P' :: RS : S'R vale a dire se da un punto qualunque della direzione della risultante si conducano delle

21.)

perpendicolari alle direzioni delle componenti, queste sono in ragion reciproca delle componenti stesse. Lo stesso si dimostrerebbe per la risultante R e la componente P.'

Dunque dovremo concludere che essendo R la risultante di P e P', due di qte forze sono fra loro in ragion reciproca delle perpendicolari che sulle loro direzioni si fanno cascare da un punto qualunque preso sulla direzion della terza.

§. 17. Se si costruisca un triangolo i cui lati siano paralelli o perpendicolari ai lati del Δ° delle forze i due triangoli saranno simili e le forze saranno proporzionali ai lati del nuovo triangolo.

§. 18. Sapendosi determinare la risultante di due forze applicate ad un punto M si può determinare la risultante di quante si vogliano forze applicate allo stesso punto in un piano o nello spazio.

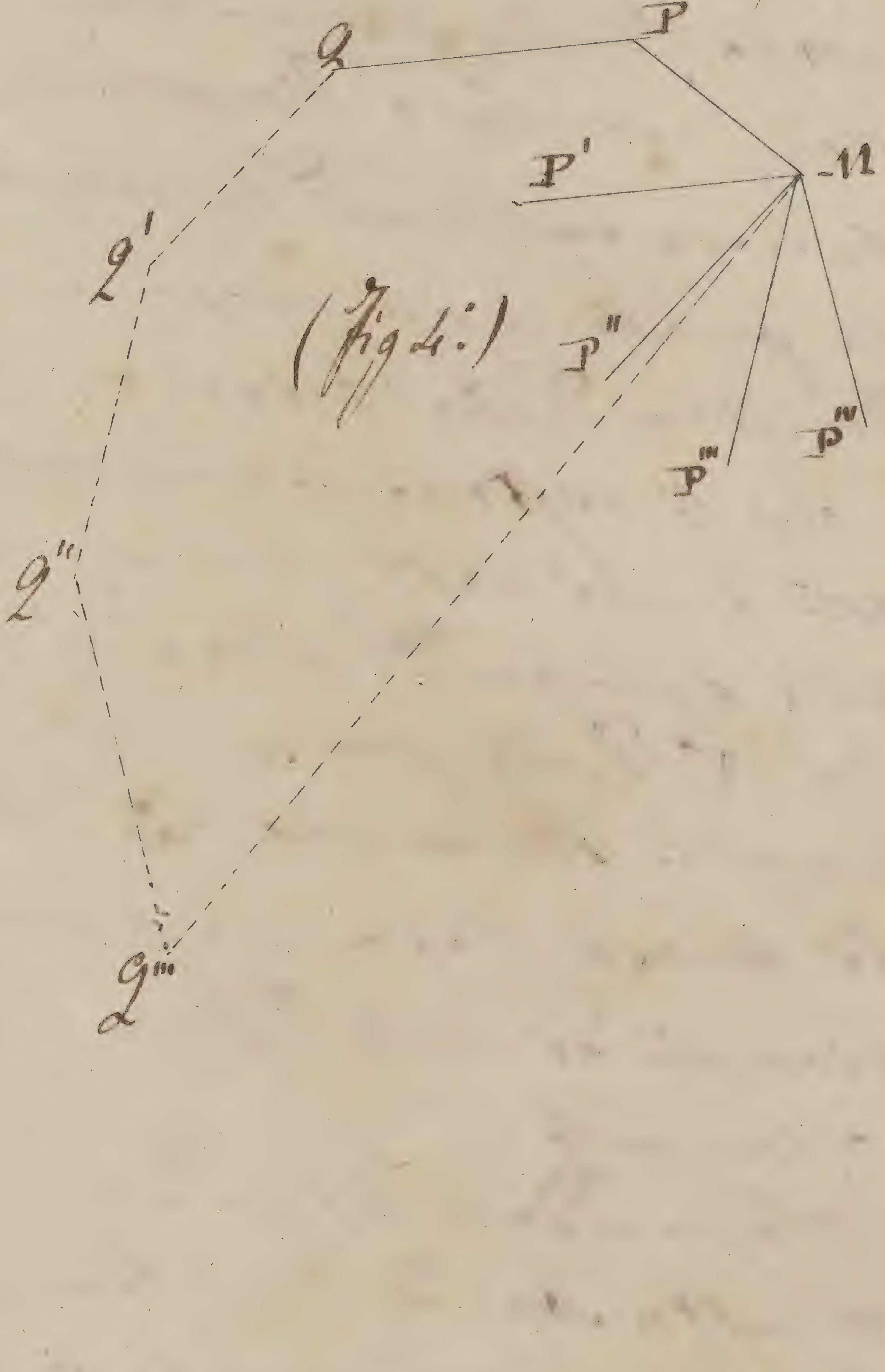
Siano P, P', P'' – ...

22.)

quante si vogliano forze applicate al punto M. Si determina la risultante di due P, P', ed essendo R questa si compone colla P'', e sia R', e questa si compone con P''' e così di seguito —

L'ultima risultante sarà la risulte trovata

Si osservi la fig. (4.)



(fig 4.)

Siano le P, P', P'', P''', P'''' - applicate al punto M. Da P, si protragga PQ parallela ad MP', e si prenda PQ = MP', si conduca da Q, QQ' parallela ad MP'' ed essa eguale e così seguitando essendo Q''' l'estremo dell'ultima condotta, se condurremo la Q'''M sarà essa in direzione ed in intensità la risultante di tutte le forze.

Se l'estremo Q''' cadesse in M la risultante sarebbe zero e le forze applicate in M si equilibrerebbero, e la forza parallela all'ultima forza essendovi opposta, questa ultima forza equilibra tutte le altre, e però se tutte le forze si equilibrano essendo si cominciato da una paralle

23.)

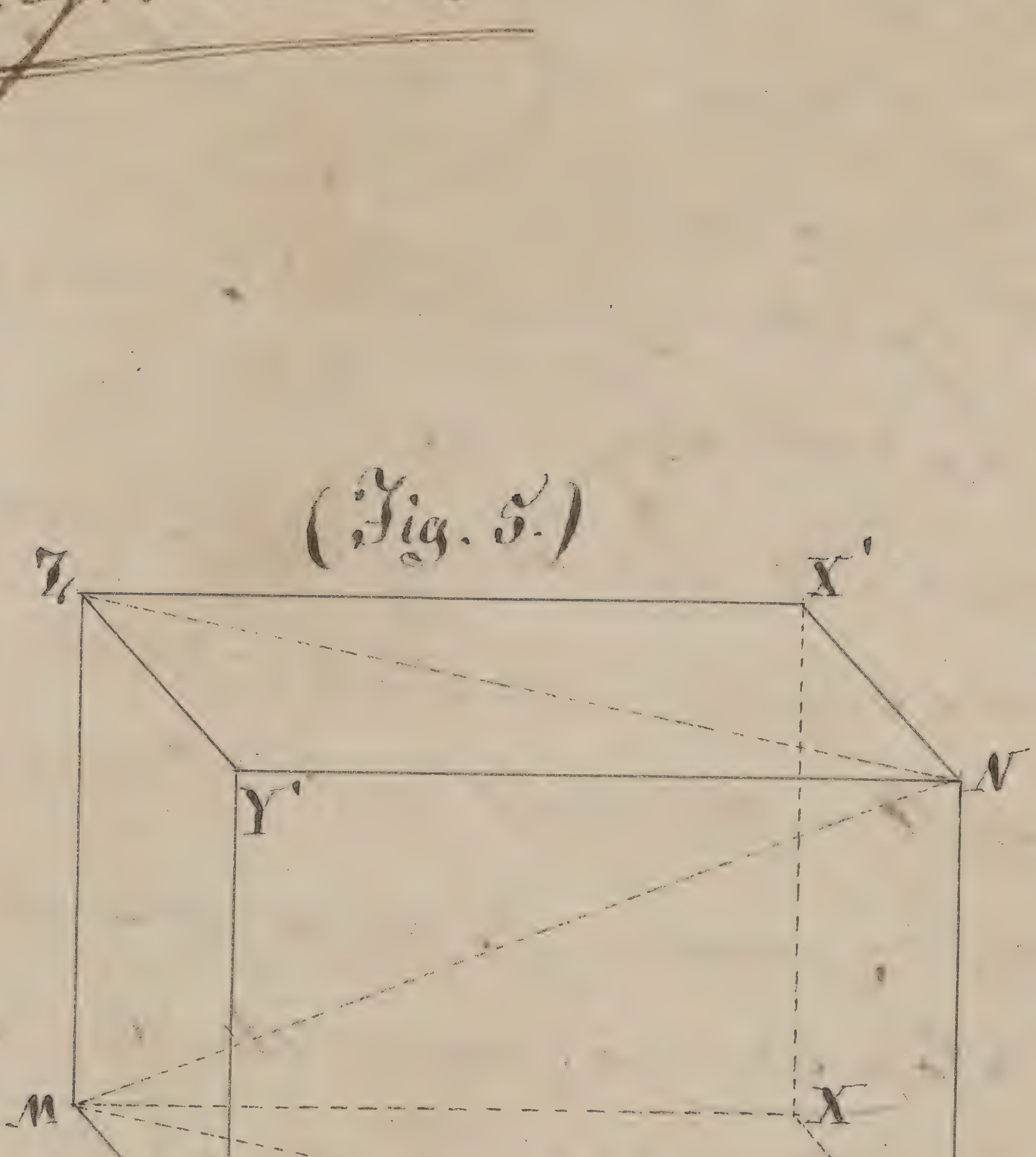
Lezione 22.

qualunque, si può considerare una forza come la risultante di tutte le altre. Se la q^tà M non sia nulla, per l'equilibrio si porrà una forza eguale e diametralmente opposta ad essa applicata in M. —

§.19. La composizione delle forze applicate ad un punto e dirette comunque nello spazio si può anche eseguire di altra guisa.

Siano fig. 5 le tre forze X, Y, Z dirette comunque nello spazio applicate al punto M. Compiuto il parallelepipedo si conducano le diagonali ZN, MM' e la MN diagonale del parallelepipedo stesso. —

(Fig. 5.)



Sia MM' la risultante delle MX ed MY, la MN sarà risultante delle MM', e Z ossia la risultante delle tre X, Y, Z. Nella stessa guisa che si dice parallelogrammo delle forze quando che sono 2 così questo dicesi parallelepipedo delle forze.

§.20. Nel §.17. si è veduto che 2 forze applicate ad un punto aver non possono risultante zero ammeno che le 2 forze non siano zero. —

Ora potremo mostrare che tre forze esistenti in diversi piani ed applicate allo stesso punto aver non possono una

21.)

risultante nulla ameno che sia nulla ciascuna da se.

Se nessuna componente sia zero si potrà formare un parallelepipedo che avrà risultante che non sarà zero e diagonale. Se 2 siano avranno risultante che non possono essere per diritto. Se 2 siene nulle la 3.a sarà la risultante.

Dunque

§. 21. Si potrà quindi scomporre una forza R, in tre P, P', P'' secondo le direzioni rispett.e parallelle a tre rette non esistenti nel med.o piano e che 2 non siano parallele.

Poniamo che A, B siano gli estremi di una forza R che si vuole scomporre. Per uno degli estremi A conduco tre rette parallele alle date poi immagino tre piani condotti ~~per~~ B ~~e per la data dall'altro pr. me condotti~~ tre piani paralleli a questi le intersecazioni loro saranno le tre cercate forze.

paralleli ciascuno al piano di due delle condotte

§. 22. Qualunque sia il parallelepipedo delle forze, detta R la sua diagonale ed X, Y, Z i suoi spigoli, si vede Introd. che si ha

(32.) $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY\vartheta X^{\wedge}Y + 2X^{?}}$

25.

la quale riducesi alla

(33) $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = R$ se il parallelepipedo sia ortogonale. —

In seguito vedremo che a tre forze ortogonali si possono ridurre tutte le forze che agiscono su di un punto libero. Pel ord. dell' Id. si avrà

(34) $\theta R\hat{}X = \frac{X}{R} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$,

(35) $\theta R\hat{}Y = \frac{Y}{R} = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, e

(36) $\theta R\hat{}Z = \frac{Z}{R} = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$.

ricordando che fra i coseni esiste la relaz. data dalla

(37) $\theta^2 R\hat{}X + \theta^2 R\hat{}Y + \theta^2 R\hat{}Z = 1$

La (33) ci mostra ciò che si è dimostrato al §. 20. esaminando il radicale —

Allorchè le componenti X, Y, Z sono conosciute la (33) darà il valore della risultante R prend. il +.

Se conoscasi la R e vogliasi risolvere in 3 di cui a, b, c sono rispettiv. i coseni degli angoli che con essa fanno le (34), (35) (36) risolveranno il problema, e trovandosi i valori di x, y, z che sono

(38) $X = a.R$,

(39) $Y = b.R$,

(40) $Z = c.R$. —

$\theta X\hat{}Z + 2YZ\theta Y\hat{}Z$

20.)

Fatto $Z=0$, si passa dal sistema di 3 forze, a quello di 2, e dipend.^{te} dalle trovate equazioni avremo le

(41) $R=\sqrt{X^2+Y^2}$

(42) $\theta R\hat{}X=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}$,

(43) $\theta R\hat{}Y=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}$; equazioni analoghe alle trovate ai §. 10 e 15.

Dalla (42) si ha

$\theta X\hat{}R=\sqrt{1-\theta^2 X\hat{}R}=\sqrt{1-\frac{X^2}{X^2+Y^2}}=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}$; dunque avremo

$\sigma X\hat{R}=\frac{Y}{X}$. Siene x_1' y_1' le coord.^{te} del punto d'applicazione del punto d'applicaz.^{e} di X, ed x, y le variabili.

La retta debbe passare per (x_1', y_1') dunque esser debbe della forma

(44) $y-y_1'=\frac{Y}{X}(x-x_1')$, quindi

(45) $(y-y_1')Y=(x-x_1')X$ equazione della risultante R.

= §. 23. Siano applicate ad un punto M le forze P, P', P'', P''' &c le quali sieno comunque dirette. Ciascuna di esse si può scomporre in tre parallele a tre assi ortogonali. Se chiameremo X, Y, Z le somme di tutte le componenti parallele

27.)

all'asse delle X, e Y, e la somma di quelle parallele agli assi delle Y e Z si avrà

(46) $X = P\theta P\hat{}X + P'\theta P'\hat{}X + \ldots$ &c

$= \Sigma P\theta P\hat{}X$.

(47) $Y = P\theta P\hat{}Y + P'\theta P'\hat{}Y + \ldots$ &c

$= \Sigma P\theta P\hat{}X$

(48) $Z = P\theta P\hat{}Z + P'\theta P'\hat{}Z +$ &c

$= \Sigma P\theta P\hat{}Z$

Sia R la risultante di tutte le P, P', P'', P''' .. &c ed avremo le infrascritte

(33) $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

(49) $X = R\theta X\hat{}R$

(50) $Y = R\theta Y\hat{}R$

(51) $Z = R\theta Z\hat{}R$ per mezzo di queste si determinano la risultante date le componenti e le direzioni &.

§. 26 Affinchè le forze applicate al punto M si facciano equilibrio è chiaro che debba aver luogo la

(52) $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$. Ma il 1.° membro si compone di quantità positive dunque ciò non potrà essere se non sia $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, ossia sostit. i loro valori si avranno le

(53) $\Sigma P\theta P\hat{}X = 0$

(54) $\Sigma P\theta P\hat{}Y = 0$

(55) $\Sigma P\theta P\hat{}Z = 0$, e sono queste

le tre equazioni d'equilibrio per le forze nello spazio.

Si è già veduto che perciò è necessario che una delle forze sia eguale ed opposta alla risultante delle altre tutte, ma questa verità si può mettere ancora davanti nel modo infrascritto.

Supponiamo che R' sia la risultante di P', P'' ec. cioè di tutte salvo la P, e si avrà

(56) $X' = P'\theta P'^{\wedge}X + P''\theta P''^{\wedge}X +$ ec

(57) $Y' = P'\theta P'^{\wedge}Y + P''\theta P''^{\wedge}Y +$ ec

(58) $Z' = P'\theta P'^{\wedge}Z + P''\theta P''^{\wedge}Z +$ ec

inoltre

(59) $X' = R'\theta R'^{\wedge}X$

(60) $Y' = R'\theta R'^{\wedge}Y$,

(61) $Z' = R'\theta R'^{\wedge}Z$; per le (53)(54) e (55) abbiamo le

(53) $\Sigma P\theta P^{\wedge}X = 0$
(54) $\Sigma P\theta P^{\wedge}Y = 0$
(55) $\Sigma P\theta P^{\wedge}Z = 0$

(62) $P\theta P^{\wedge}X = -R'\theta R'^{\wedge}X$,

(63) $P\theta P^{\wedge}Y = -R'\theta R'^{\wedge}Y$,

(64) $P\theta P^{\wedge}Z = -R'\theta R'^{\wedge}Z$.

Sommando i quadrati di queste 3 equazioni osservando che somma dei quad. di coseni $= 1$, si avrà la

(65) $P^{\wedge} = R'^{\wedge}$, d'onde la

(66) $P = \pm R'$; ma queste forze debbono considerarsi positive dunque del doppio segno si prenderà il $+$, e però la

(67) $P = R'$ per cui le (62)(63)

29.)

(62) si riducono alle seguenti

(68) $\theta P\hat{}X = -\theta R'\hat{}X$,

(69) $\theta P\hat{}Y = -\theta R'\hat{}Y$,

(70) $\theta P\hat{}Z = -\theta R'\hat{}Z$.

Dunque si dovrà concludere che l'angolo che fa P X

$P\hat{X} = 180° - R'\hat{X}$, e

$P\hat{Y} = 180° - R'\hat{Y}$,

$P\hat{Z} = 180° - R'\hat{Z}$, e di conseguenza la forza P è eguale ed opposta alla risultante R' di tutte le altre forze.

§. 25. Paragonando le equazioni dell'equilibrio (53) (54) (55) colle (1) (2) (3) Introdᵉ Cap. XLVI. dei poligoni §. 626. si rende manifesto, che se delle forze parallele ai lati di un poligono chiuso rettilineo a semplice o doppia inclinazione e proporzionali ai lati medesimi siano applicate ad un punto al tutto libero nello spazio si faranno equilibrio, il che conferma il detto al §. 18.

Dal che risulta che se delle forze di direzione ed intensione qualunque siano applicate al medesimo punto libero nello spazio, e si descriva un poligono i cui lati siano paralleli e proporzionali alle forze se il poligono riesce

(30.)

chiuso, la retta che il chiud. sarà parallela e proporzionale alla risultante delle forze.

§. 26. Dalle (66) (67) e (68) rendesi manifesto che X = la somma delle projezioni delle forze P, P', P'' & sopra l'asse a cui sono parallele le forze, delle quali la somma viene da X rappresentata.

Lo stesso si dica di Y e di Z. Riducendo adunque ad una sola le forze di ciascun asse le tre forze che si ottengono sono le componenti di R giusto il detto al §. 22.

§. 27. Le coord. x, y, del punto M di applicazione sono pure le coord. del punto di sospensione. La projezione poi sul piano (X, Y) che supponiamo parallelo al piano (x, y) della diagonale MN del parallelepipedo (Fig. 5) è la MM' la quale verrà di conseguenza rappresentata dalla

(71) $y - y' = \sigma X \hat{} MM'(x - x')$

la (71.) è adunque la projezione della risultante sul piano (x, y) ma $\sigma X MM' = \frac{MX}{MY}$

31.)

dunque la projezione della risultante sul piano (x,y) è

(72) $y - y' = \frac{Y}{X}(x - x')$ ovveram. dalla

(73) $X(y - y') = Y(x - x')$. —

Similmente si troverebbero le projezioni della risultante sui piani (x,z) (y,z) che sono rispett. rappresentate dalle

(74) $X(z - z') = Z(x - x')$

(75) $Z(y - y') = Y(z - z')$. —

Due di queste bastano per dare la risultante R. —

§.28. Innalzando a quadrato la (33), ed avendo riguardo alle (46)(47)(48) ne nasce la

(76) $R^2 = (P \cos P^\wedge X + P' \cos P'^\wedge X + P'' \cos P''^\wedge X + \&c)^2$
$+ (P \cos P^\wedge Y + P' \cos P'^\wedge Y + P'' \cos P''^\wedge Y + \&c)^2$
$+ (P \cos P^\wedge Z + P' \cos P'^\wedge Z + P'' \cos P''^\wedge Z + \&c)^2$

Sviluppando si avrà

(77) $R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + \&c +$
$2PP' \cos P^\wedge P' + 2PP'' \cos P^\wedge P'' + \&c$

dunque avremo

(78) $R^2 = \Sigma P^2 + 2\Sigma PP' \cos P'^\wedge P$ che da il valore della risultante indipendentem. dalla composizione delle forze e del punto d'applicazione. —

Essa ci mette davanti essere il quadrato della risultante di quante si vogliano forze applicate ad un punto eguale alla somma dei quadrati delle forze più la doppia somma

$= \frac{Y}{X}$

(46) $X = P\theta P\hat{}X + P'\theta P'\hat{}X$ &c

(47) $Y = P\theta P\hat{}Y + P'\theta P'\hat{}Y$ &c

(48) $Z = P\theta P\hat{}Z + P'\theta P'\hat{}Z$ &c

(49) $X = R\theta R\hat{}X$

(50) $Y = R\theta R\hat{}Y$

(51) $Z = R\theta R\hat{}Z$

del prodotto delle forze nel coseno dell'angolo che fanno esse forze.

§. 29 Le equazioni (46)(47)(48) combinate colle (49)(50) e (51) producono le equazioni

(79) $P\theta P\hat{}X + P'\theta P'\hat{}X +$ &c $= R\theta R\hat{}X$

(80) $P\theta P\hat{}Y + P'\theta P'\hat{}Y +$ &c $= R\theta R\hat{}Y$

(81) $P\theta P\hat{}Z + P'\theta P'\hat{}Z +$ &c $= R\theta R\hat{}Z$

le quali moltiplicate rispett. per $\theta R\hat{}X$, $\theta R\hat{}Y$, $\theta R\hat{}Z$, avremo le tre

(82) $P\theta R\hat{}X\,\theta P\hat{}X + P'\theta R\hat{}X\,\theta P'\hat{}X +$ &c $= R\theta\hat{}R\hat{}X$,

(83) $P\theta R\hat{}Y\,\theta P\hat{}Y + P'\theta R\hat{}Y\,\theta P'\hat{}Y +$ &c $= R\theta\hat{}R\hat{}Y$

(84) $P\theta R\hat{}Z\,\theta P\hat{}Y + P'\theta R\hat{}Z\,\theta P'\hat{}Z +$ &c $= R\theta\hat{}R\hat{}Z$, che sommate insieme danno la

(85) $R = P\theta P\hat{}R + P'\theta P'\hat{}R +$ &c $= \Sigma P\theta P\hat{}R$ equazione che mette davanti il valore della risultante R espressa per le forze e di coseni degl'angoli che forma la diagonale con una di esse

Lezione 23

la 24. Ripetizione

Capitolo III.

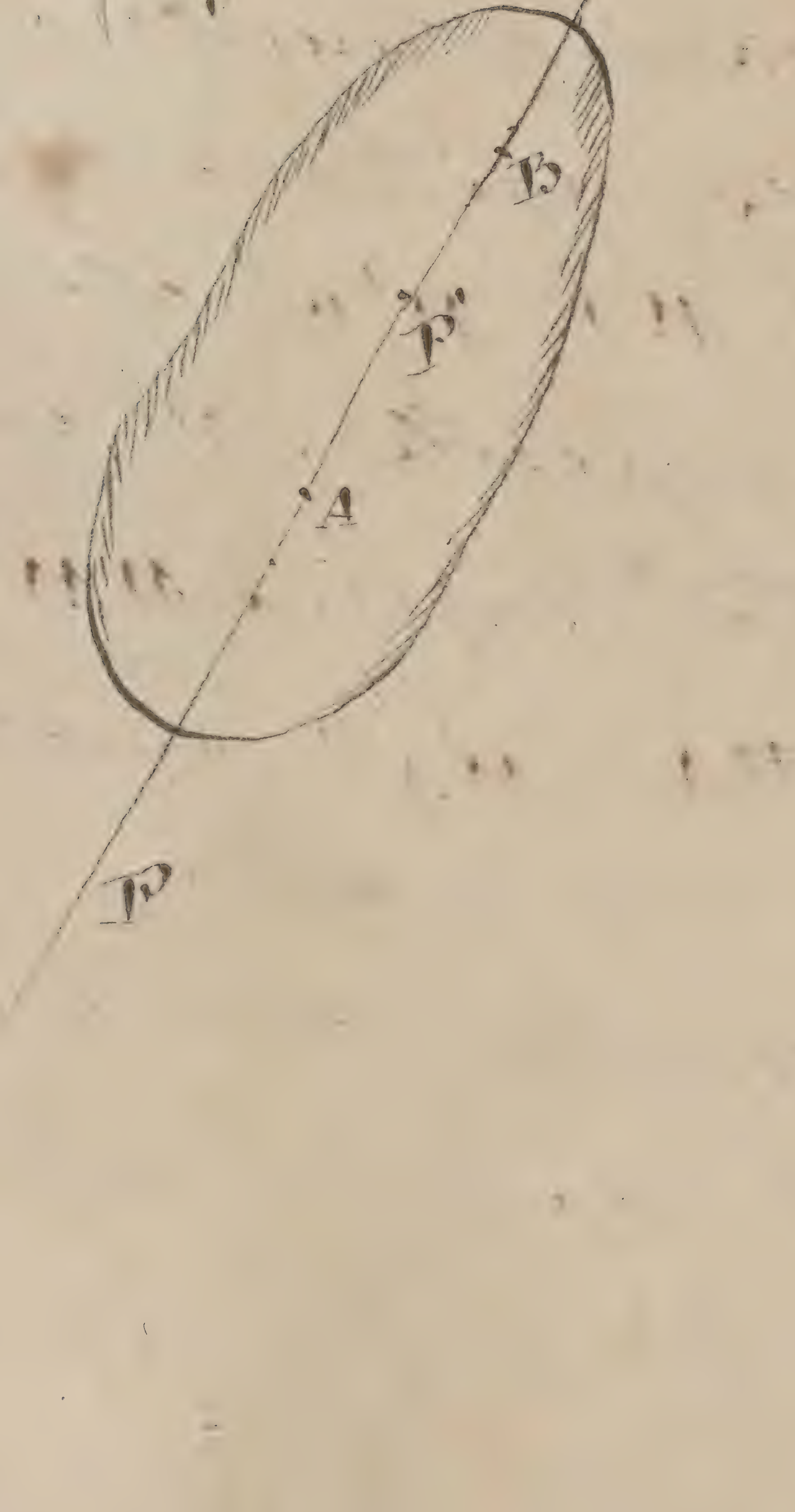
Della composizione delle forze parallele

§.30. Facilmente si vede che due forze eguali ed opposte applicate agli estremi di una retta che non si possa allungare, si fanno equilibrio.

§.31. Dal che deducesi immediatamente che l'effetto di una forza che sollecita un corpo non viene cambiato a qualunque punto di lei venga applicata, purchè il novello punto sia uno di quelli del corpo stesso oppure legato ad esso fuori di lui esistente invariabilmente, e che la forza agisca sempre nella stessa direzione.

Si osservi la fig 6.

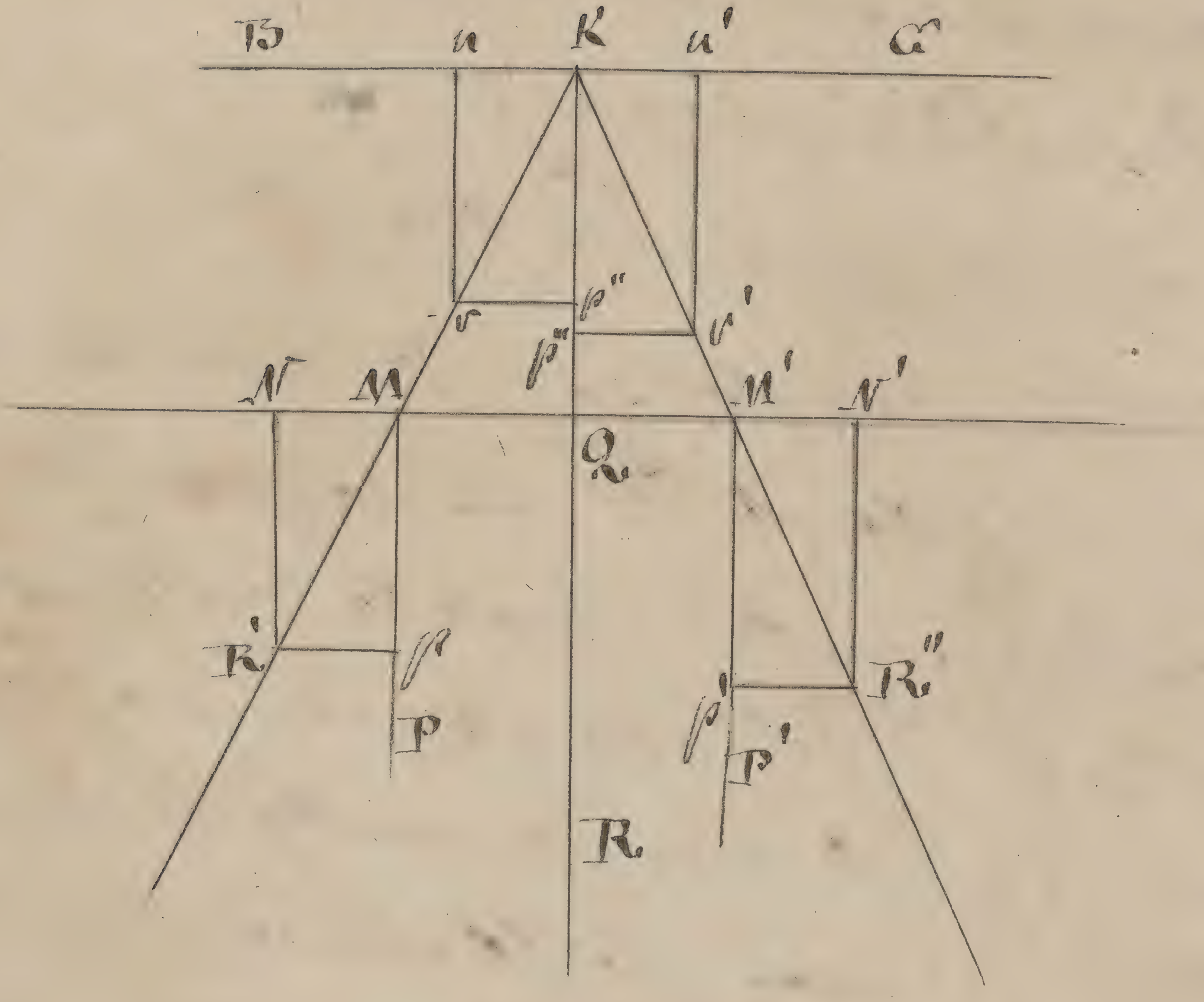
(Fig. 6)



Sia la forza P applicata al punto A di un corpo invariabilmente legato agli altri punti del corpo stesso, oppure sia A un punto invariabile di un sistema invariabile di corpi. Si prenda nella direzione B la AB = AP e ad esso applichiamo due forze eguali a P, P' e -P' ed esse non produranno alcun effetto sul sistema.

tra le due forze -P' e P agi-
scono agli estremi della AB,
sono eguali ed opposte, dun-
que si elidono, e perciò non
resta che la P' la quale essen-
do eguale a P produrrà lo
stesso effetto. Dunque le
due forze P e -P' si elidono
perciò levare si possono, e
resterà la sola P' applicata
al punto B e produrrà lo
stesso effetto della P applica-
ta al punto A. Dunque si
può variare il punto d'appli-
cazione di una forza senza
variarne l'effetto purchè sia
nella stessa direz.e

(Fig. 7)



§. 32. Siano le due P rappresenta-
ta da Mp, e P' rappr.a da
M'p' applicate ad M, e i due
punti M M' siano uniti fra
loro invariabilmente. Le
due forze agiscono colle di-
rezioni MP, M'P', che suppor-
remo parallele. Si applichi-
no nella direzione MM' due
forze MN, M'N' opposte ed
eguali. La introduz.e di queste
due forze che scambievolmen-
te elidonsi non cambierà l'effetto
delle P, P'. Si compiano i due

(35)

parallelogrammi MR', $M'R''$, e le MR', $M'R''$ saranno le risultanti rispett.e delle MN ed Mp, $M'N'$, $M'p'$. Si prolunghino le loro direzioni, non parallele, finchè s'incontrino in un punto K; le MR', $M'R'$ applicate in M, M' le possiamo supporre applicate in K. Per q.to punto conducasi la BC parallela ad MM', e sopra di essa si prendano le $Ku = MN = Ku' = M'u'$ e da K si protragga KR parallela alle forze P, P', e su di essa si prendano le $Kp'' = Mp = P$, $Kp''' = M'p' = P'$. Le quattro forze adunque $uK = MN$, $Kp'' = Mp$, $Ku' = M'N'$, $Kp''' = M'p'$ sono equivalenti alle due Kp'', Kp'' che rispett.e sono eguali a P e P': ma le due forze Kp'', Kp''' sono applicate al med.o punto e agiscono secondo la loro direzione, dunque la loro azione unita sarà rappresentata dalla loro somma. Si dovrà dunque concludere che la risultante delle forze parallele P, P' agisce secondo la loro direz.e ed è = loro somma

(36.

Giusta a determinare il punto d'applicazione.

I triangoli simili MR'p KMq ci danno la proporzione

$R'p : pM :: Mq : qK$ ossia

$MN : pM :: Mq : qK$

I due Δ' simili M'p'R'' KqM' ci danno

$M'N' : p'M' :: M'q : qK$: ma

$MN = M'N'$ per costruz.e

dunque avremo

(1) $P . Mq = P' . M'q$ onde

$P : P' :: M'q : Mq$ cioè la risultante di due forze parallele agenti dalla stessa parallela divide l'intervallo in due parti reciprocam.e proporzionali alle componenti.

Dalla composiz.e delle forze ad angoli supponendo l'angolo zero si arriverebbe allo stesso scopo. Se $P = P'$ $Mq = M'q$, e la risultante $R = 2P = 2P'$.

§. 33. Dalla proporzione

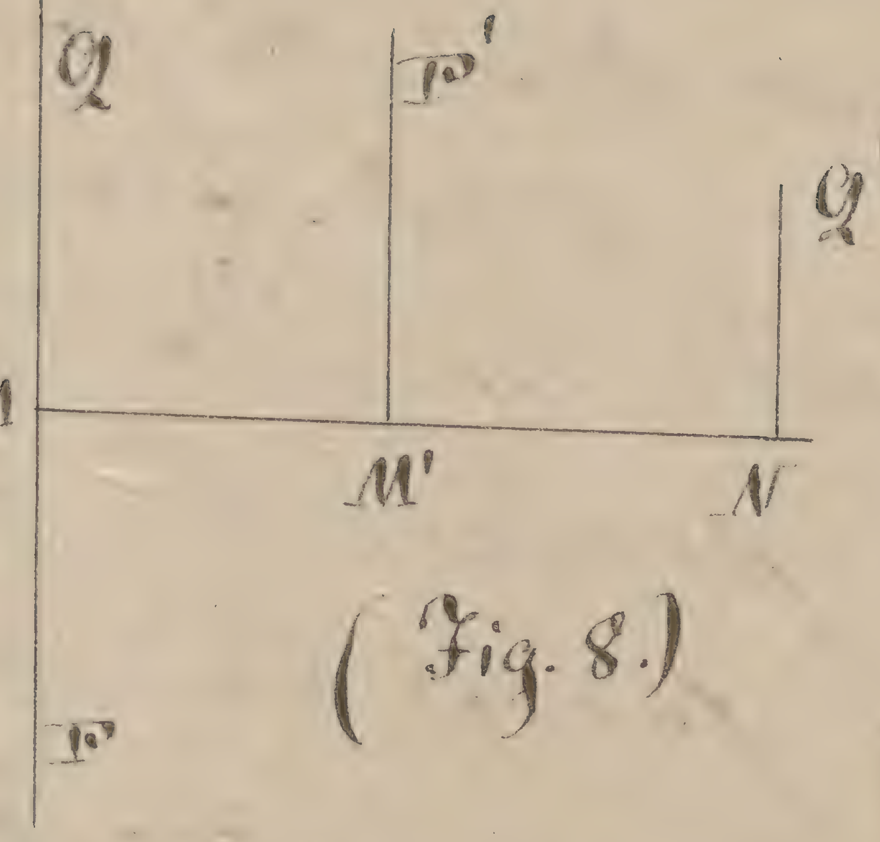
$P : P' :: M'q : Mq$ si ha

$P : P+P' :: M'q : MM'$, e

$P' : P+P' :: Mq : MM'$: ma

$P+P' = R$, dunque

$P : R :: M'q : MM'$, e



(Fig. 8.)

$P' : R :: MQ : MM'$.

§. 34. Si osservi la fig. (8)

Supponiamo che le due forze P, P' abbiano direzioni contrarie e sono rappresentate da MP, M'P'.

Sia la forza P applicata in M ed agisca secondo la MP e la P' agisca in M' nella direzione M'P'. Supponiamo $P' > P$. Le componenti di P' sieno le MQ ed NQ' essendo $MQ = MP$ ed a lei opposta. La P' essendo risultante delle Q e Q' e $Q' = P' - P$ ~~sarà risultante~~; alle P' surrogando le sue componenti, le due P, Q' equivalgono alle tre P, Q, Q', ma le P, Q, si elidono perchè eguali ed opposte rimarrà la Q' che sarà risultante di P, P'. ~~Dunque~~ Dunque allorchè due forze parallele sono applicate ad una verga inflessibile, la risultante cade dalla parte della mag.^e ed eguaglia la diff.^a loro.

Ma $Q' : Q :: M'N : MM'$

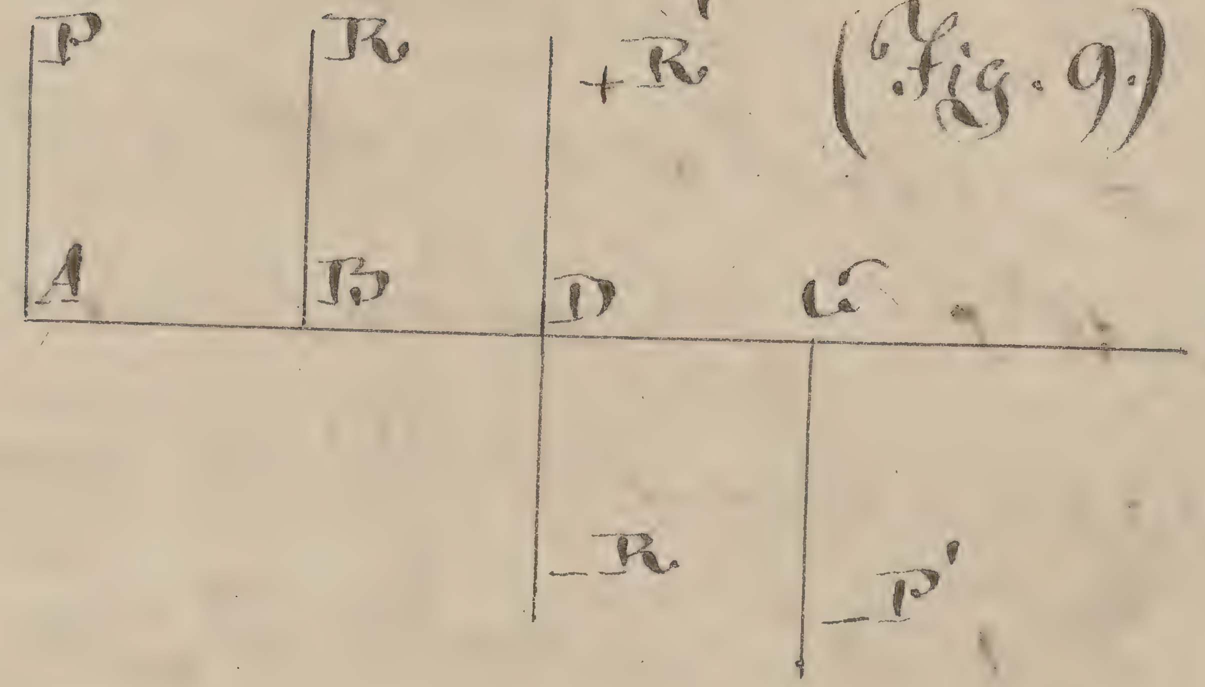
ovvero $P : P' - P :: M'N : M'M$

si avrà dunque

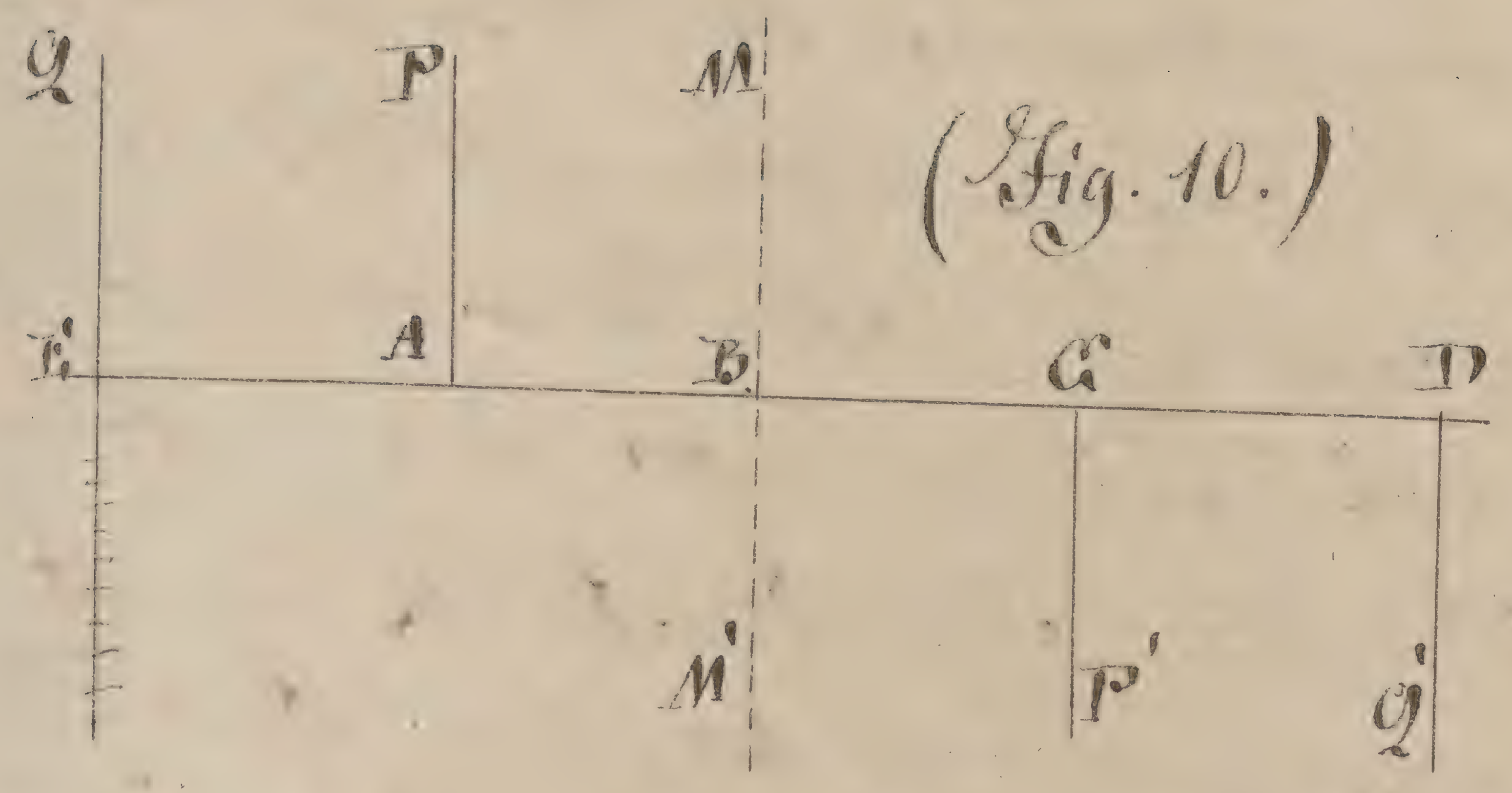
(24) $M'N = \frac{P}{P' - P} M'M$ ove M'M è data. Se $P' = P$ la $M'N = \infty$ e da ciò si conclude che non vi ha risultante: dunque due forze parallele ed eguali in direzioni opposte agendo e

§. 35. Dimostriamo ciò in altra guisa cioè che due forze parallele ed eguali agenti in direzioni opposte non hanno risultante (a). Osservo che qualunque sia la posizione di questa forza unica se pure esiste. osserviamo la (9) fig. essendo la P e P' le due forze. Se si volesse che BR fosse la loro risultante ciò non si potrebbe ammettere se non si ponesse che vi fosse un'altra forza -R. applicata in B in direzione opposta a BR perchè non v'è ragione. Adunque a loro farà equilibrio la R come pure la -R. A distruggere l'effetto della -R vi pongo la +R' eguale a R e così sarà distrutto il suo effetto. quindi si avrà equilibrio fra R, P, -P', R', -R. Che -R per ipotesi fa equilibrio a P e -P' dunque esser debbo equilibrio nelle rimanenti R ed R'. Che queste sono parallele e dirette per lo stesso verso e non si possono equilibrare, dunque non vi può essere una forza unica che equilibra le due agenti.

(a) cioè non vi è forza che produce il suo effetto



(Fig. 9)



(Fig. 10.)

§. 36. Osservasi la (10) fig. —

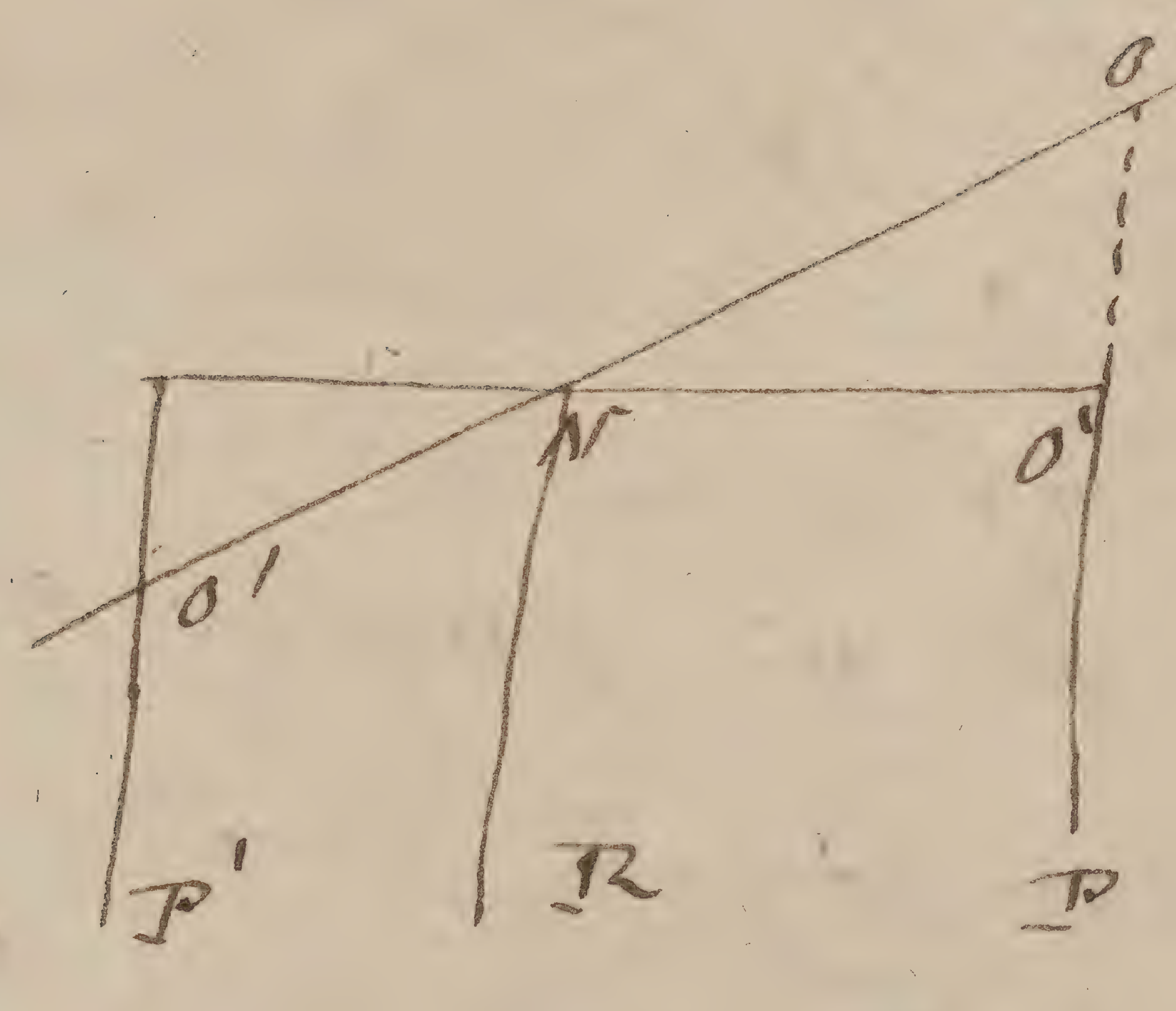
Siano le P, P' contrarie eguali e parallele applicate ai punti A e G. Si prenda ad arbitrio un punto B e si scomponga la P' nelle due M' e Q' la 1ª applicata in B e l'altra in D agenti nelle direzioni BM', DQ' e si avrà

$$Q' = P' - M', \quad GD = z = \frac{M'.BG}{Q'}$$

Si scomponga similmente la P = P' nelle due M applicata in B = M' e nell'altra Q = P − M applicata in E, e si avrà $AE = z' = \frac{M.AB}{Q} = \frac{M(AG - BG)}{Q} = \frac{M(b - BG)}{Q}$ fatto $AG = b$. Le due M, M' si elidono, e però le P, P' vengono surrogate dalle QQ'. Se dunque s'introducono due forze a queste eguali ed opposte faranno equilibrio alle P, P'. Ma queste sono affatto arbitrarie, dunque queste due forze sono di direzioni ed intensità arbitrarie. Dunque in un infinità di modi si possono equilibrare due forze parallele ed uguali agenti in contraria direzione.

= §. 37. Appresso il dettato scioglievasi propone i problemi tutti di composizione e scomposizione delle forze parallele.

Si osservi, che il dimostrato è al tutto indipendente dall'angolo che fanno le direzioni delle forze parallele colla retta d'applicaz.e Se dunque si condurrà pel punto d'applicaz.e N della risultante R una retta qualunque che tagli in O', O'' le direzioni delle forze, si avrà sempre P'. O'N = P. O''N.



§. 38. Prendiamo ora a considerare un N.o qualunque di forze parallele agenti in direzioni anche opposte ed in diversi piani. Per ottenere la risultante di queste forze se ne compongono 2, poi la risultante di questa con un'altra, e così di seguito e l'ultima sarà la risultante di tutte le forze. Ma questa alle volte non vi può essere se le due ultime forze parallele fossero eguali e contrarie.

Quando ciò non sia la risultante sarà la somma di tutte le componenti avendo riguardo ai segni ossia la diff.za delle somme

(41.)

delle forze che agiscono per un verso e da somma di quelle che agiscono per l'altro senso e la sua direzione sarà dalla parte della maggiore, quindi si potrà stabilire la

(3) $R_1 = P + P' + P'' + \text{---}$ &c.

ricordando di aver riguardo ai segni. La (3) non ha luogo quando non v'è risultante unica.

Supponiamo ora che tutte le P, P', P'' ruotino intorno ai punti di applicazione, anche la risultante ruoterà intorno al suo punto d'applicazione mantenendosi parallella sempre alle componenti. Un così fatto punto è determinato indipendentemente dalle direzioni delle forze.

§. 39. Il punto intorno al quale ruota la risultante, dicesi <u>centro</u> <u>delle</u> <u>forze</u> <u>parallele</u>.

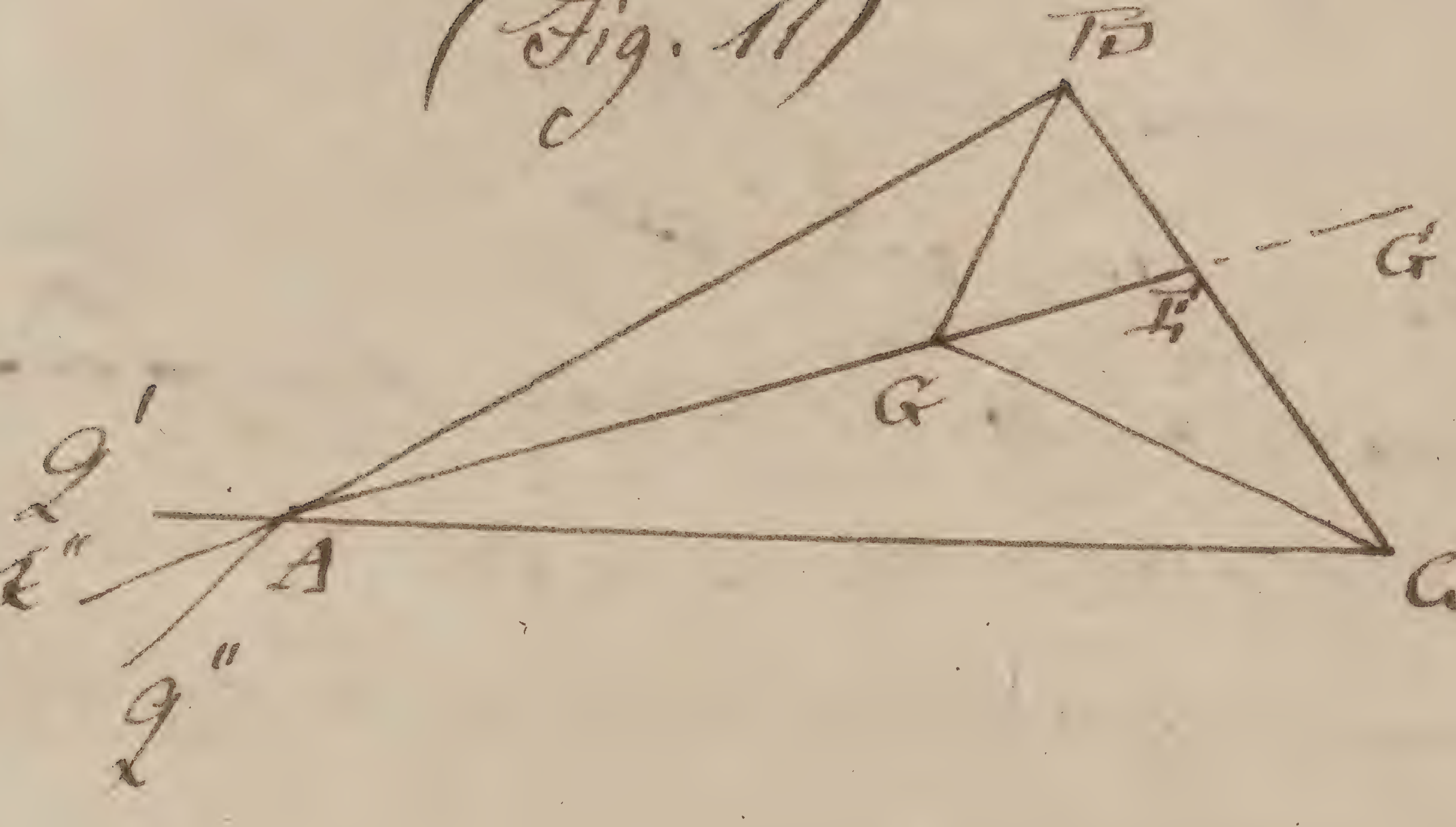
Se adunque suppongasi fisso il centro delle forze parallele applicate ad un corpo, esso rimarrà corpo fisso. Ma se si faccia ruotare il corpo intorno a questo punto purchè le forze si conservino sempre parallele, l'equilibrio perciò non sarà rotto.

Lezione 25.

42.

§. 40. Troviamo la risultante di ~~tre~~ forze parallele applicate a tre dati punti.

(Fig. 11)



Sieno ABC i tre dati punti a cui sieno applicate le forze parallele P, P', P''.

Si trovi la risultante delle P', P'' che sarà P'+P'', e il suo punto d'applicazione sia in E, che si troverà col dividere la BC in E nell'inversa delle P', P''. Si unisca la AE, e si divida in G nella reciproca di P e P'+P''.

In G sarà la risultante delle P', P'' P cioè P+P'+P''.

Ora, unite le AG, GC e posto P+P'+P''=R, si dimostra che

$P : P' : P'' : R :: \widehat{BGC} : \widehat{AGC} : \widehat{AGB} : \widehat{ABC}$.

Difatti, per la composizione delle forze si ha

$R : P : P+P' :: AE : GE : GA$

$P+P' : P' : P'' :: BC : CE : BE$

e però

$R : P : P' : P'' :: AE \times BC : GE.BC : GA \times CE : GA \times BE$

Ora triangolo ABC posta x la sua perpendicolare calata sopra BC è $\frac{x}{2}.BC$; ma $AE : x :: 1 : \varnothing AEB$ ~~: 1~~, e però $x = AE \cdot \varnothing AEB$ (a)

(a) e però (1) $\Delta ABC = AE.BC.\frac{\varnothing AEB}{2}$)

Così posta x, la perpen-

43.

dicolare calata da G sulla BC si ha

$x_1 = GE. OAEB$ e

(5) triangolo $BGC = GE.BC\,\underline{OA\hat{E}B}$.

e così si trovano gli altri due triangoli

$AGC = GA.CE.\underline{OA\hat{E}B}$,

$AGB = GA.BE.\underline{OA\hat{E}B}$; ora sostituendo nella proporzione trovata questi secondi membri si avrà

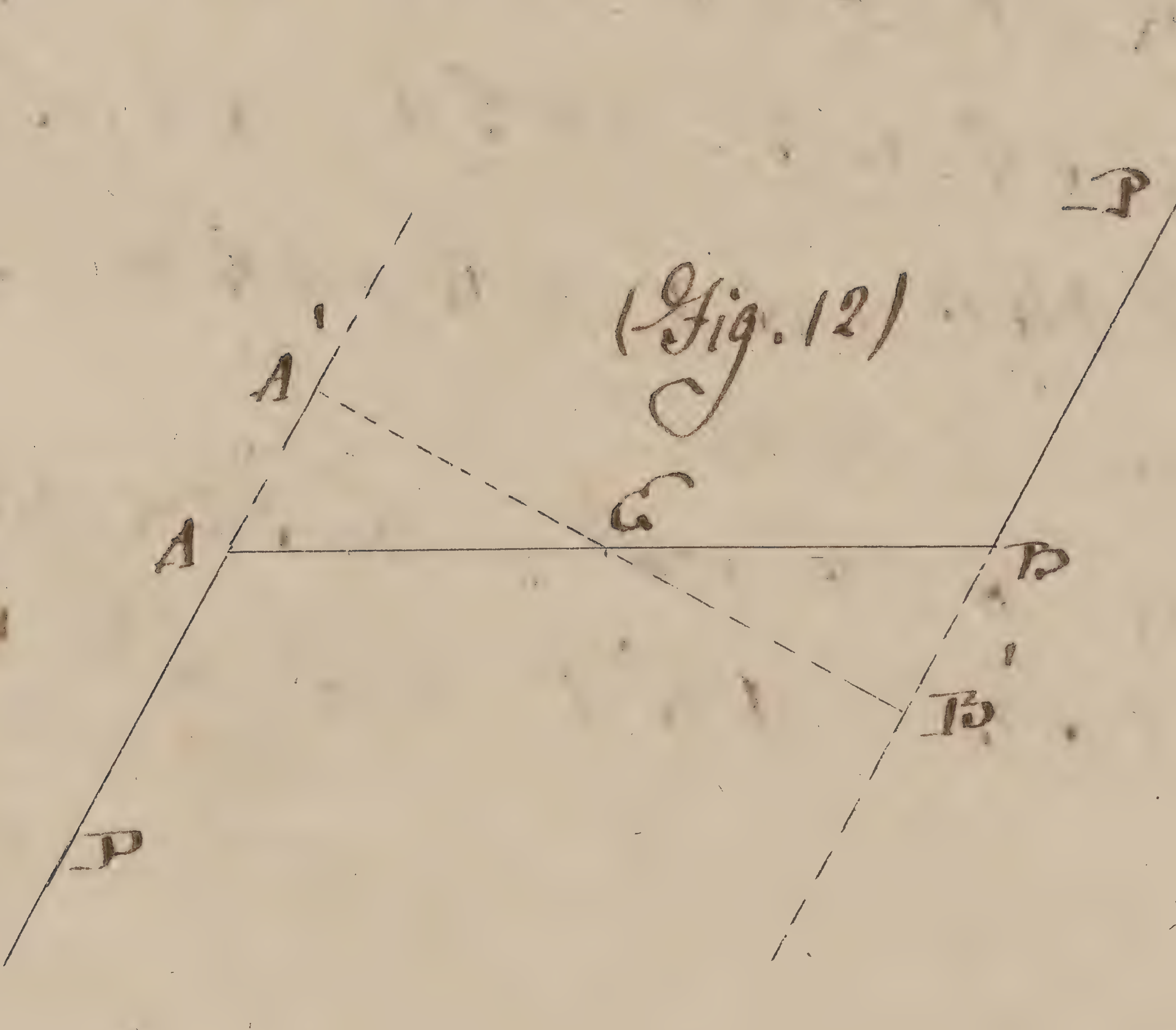
$R : P : P' : P'' :: AE \times BC\,\underline{OA\hat{E}B} : GE.BC.\underline{OA\hat{E}B} : GA.CE.\underline{OA\hat{E}B} : GA.BE\,\underline{OA\hat{E}B}$; ovvero si avrà

$R : P : P' : P'' :: \overset{\triangle}{BGC} : \overset{\triangle}{AGC} : \overset{\triangle}{AGB} : \overset{\triangle}{ABC}$. Come Ce

Capitolo IV.

Delle coppie.

§. 11. Due forze uguali e parallele applicate agli estremi di una verga rigida formano un sistema che dicesi coppia. Per indicare il sistema di due forze uguali e parallele si scrive (P, − P). La retta che unisce due punti delle direzioni delle forze dicesi braccio il cui mezzo dicesi centro.



Supponiamo (fig 12) che la coppia sia (P, − P) applicata alla AB i cui bracci sono AG, GB. Per G centro della coppia conduciamo B'A' una retta che incontri le direzioni delle forze perpendicolarmente. Supponendo la A'B' immobilmente attaccata alla AB potremo supporre le due forze P, − P applicate in A', B', e così si sarà sostituita alla coppia a braccio obbliquo quella a braccio perpendicolare. Potendosi adunque cambiare il braccio obbliquo in perpend.e supporremo sempre che sia perpend.e

Diremo momento obbliquo della coppia P.AB, e P.A'B' momento perpend.e

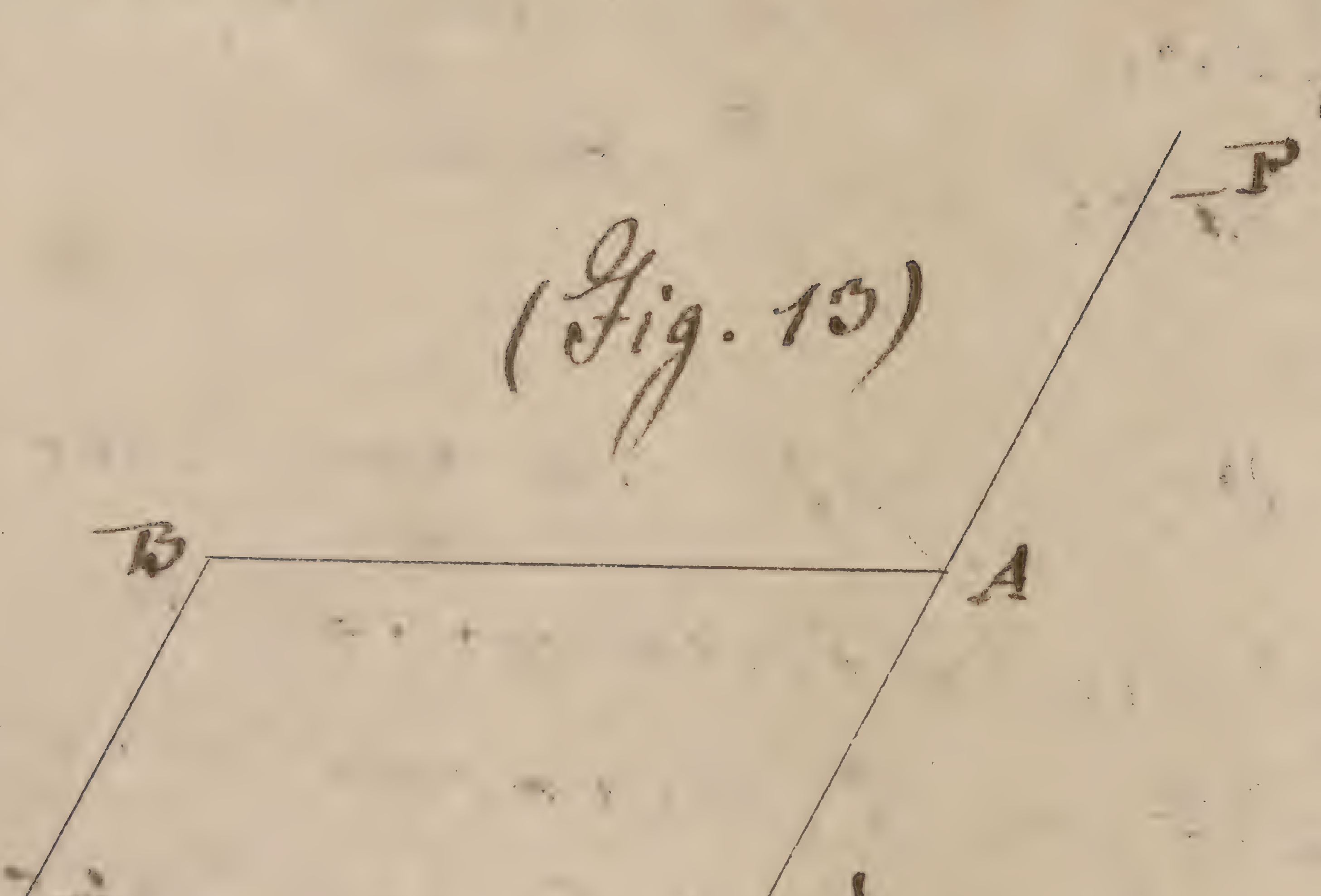
L'azione di una coppia non può confrontarsi con quella di una forza, ma soltanto ad altre coppie. La causa che produce il moto in una coppia la diremo energia della coppia come si diceva intensione per la forza.

Per conoscere il verso secondo il quale agisce una coppia considereremo fisso il suo centro, e il verso secondo il quale succede la rotazione sarà da loro stabilito.

Egli è poi manifesto che due coppie eguali ed opposte ed aventi lo stesso braccio di leva si fanno equilibrio.

§.22. Introducendo opportunamente una coppia si può trasportare da un punto ad un altro una forza senza alterarne il valore, purchè i due punti siano invariabilmente connessi.

(Fig. 13)



Si osservi la (fig 13). Sia la P applicata al punto B e si voglia parallelamente a se stessa trasportare al punto A essendo invariabilmente uniti A e B. Applichiamo al punto A due forze eguali e parallele a P. e siano P' e −P'. Siccome poi P' eguale e parallela a P; P e −P'

levata questa resta la $P' = P$ applicata in B. formano la coppia, e così si è trasportato da B ad A la forza P. Come —

(46)

§. 43. A valutare l'energia delle coppie si osservi che se due coppie $(P, -P)$, $(Q, -Q)$, ~~che agiscono due~~ agiscono su braccia di leva eguali le loro energie saranno come le forze P e Q. —

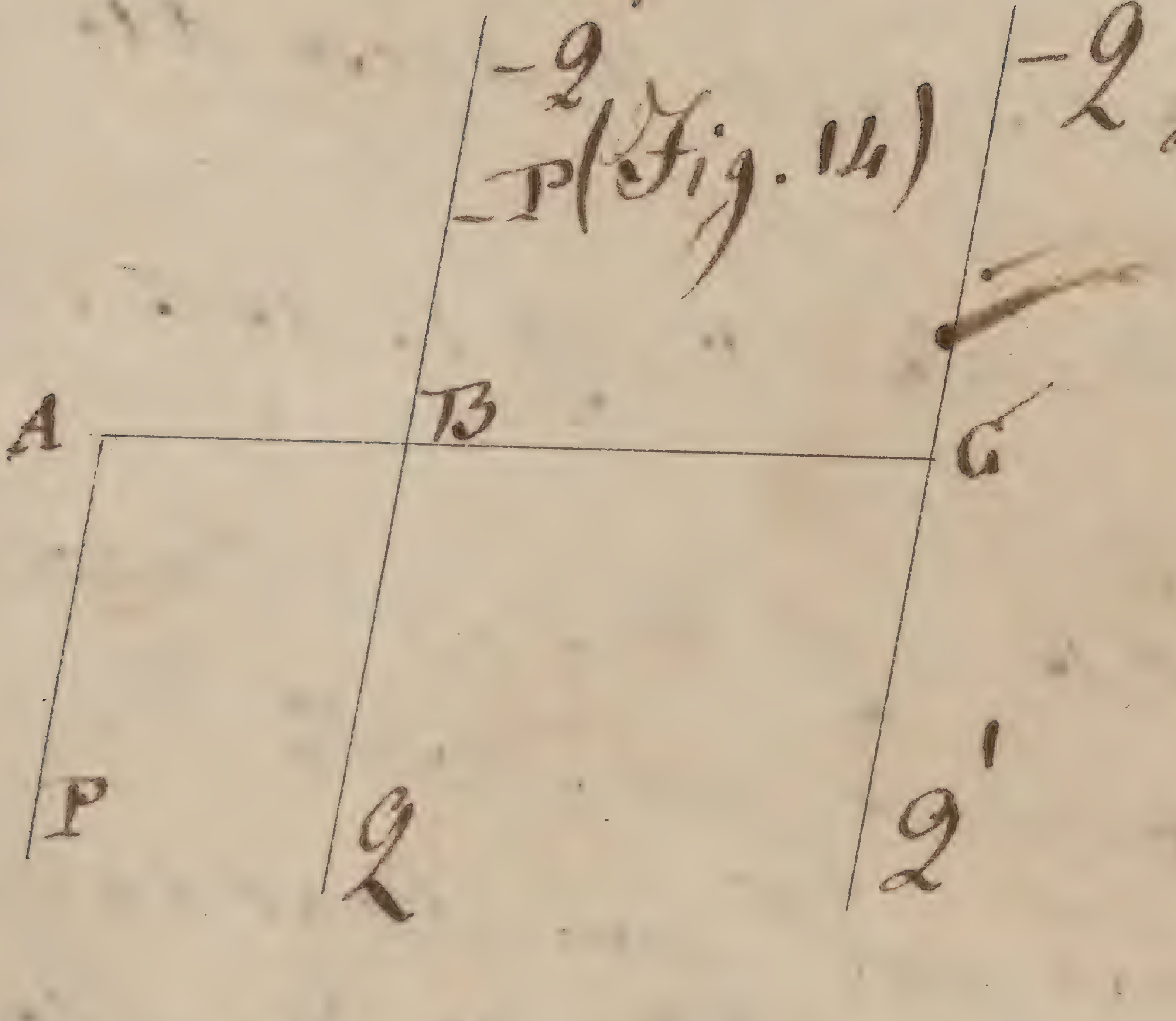
Supponiamo primieramente che sieno commensurabili, e si abbia $P : Q :: m : n$; si divida la P in m parti eguali, e la Q in n parti eguali. —
La coppia $(P, -P)$ equivale ad m coppie eguali ed agenti nello stesso senso ed applicate l'una sopra l'altra, e la $(Q, -Q)$ equivale ~~alle~~ ad n coppie eguali alle prime applicate nel verso della coppia. Dietro ciò si vede che starà evidentemente $P : Q ::$ $m : n$. —

Supponiamo ora che le P e Q sieno incommensurabili. Si può supporre una quantità piccolissima w che divida esattamente P e dividendo la Q per w si abbia $\frac{P}{w} = p$ $\frac{Q}{w} = q + \frac{r}{w}$, e però, $P = wp$ $Q = wq + r$ essendo $r < w$. Se invece delle P, Q si prendono le ~~P~~ wp, qw esse saranno commensu-

47.)

...rabili e staranno fra loro come l'energ.

Per quanto piccolo si prenda w, v sarà sempre più piccolo di modo che la diff.za fra o ed r sarà inassegnabile, ed allora alla Q si potrà sostituire wQ, e però si vede che se anche le coppie sono incommensurabili l'energia loro sta come le forze stesse.



(Fig. 14)

Si osservi la fig (14).

Sia una coppia (P, −P) applicata al braccio di leva AB; e sia un'altra coppia (Q, −Q) che agisca per lo stesso verso e sia applicata al braccio BC. Dico che queste due coppie saranno equivalenti se P : Q :: BC : AB.

Sopra AB prolungata, si prenda BC e vi si applichino parallelamente a (P, −P) due coppie (Q, −Q) (Q', −Q') essendo queste due ultime coppie eguali ed opposte.

L'effetto di queste due ultime coppie sarà nullo ed il loro effetto non turberà quello della coppia (P, −P): ma per ipotesi P : Q :: BC : AB e Q = Q', dunque P : Q' :: BC : AB e però la risultante loro sarà P+Q e passerà per B: dunque

48.)

questa risultante eliderà le due forze $-P, -Q$ che sono eguali alle prime e dirett.^{te} opposte. Si dovrà dunque far astrazione dalle le forze $(P, -P)$ $(Q, -Q)$ e rimarrà la sola coppia $(Q, -Q)$ che sarà applicata al braccio BC ed equivarrà alla $(P, -P)$ che ha per braccio AB, e però è ~~...~~

Dalla $P : Q :: BC : AB$, si ha la

(1.) $P . AB = Q . BC$. Allorchè adunque il prodotto di una forza pel suo braccio eguaglia il prodotto di altra forza pel suo braccio le due ~~...~~ coppie sono equivalenti avvegnacchè dalla (1) si ha la proporz.^{e} Questi prodotti diconsi momenti relativi a B. Adunque, due coppie sono equivalenti allorchè i loro momenti sono eguali.

§. 15 Le energie delle coppie sono adunque proporzionali ai momenti. Difatti siano $(P, -P)$ $(Q, -Q)$ coi rispettivi bracci, p, q. Alla $(Q, -Q)$ si può surrogare la $\left(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q\right)$

che sia applicata al braccio p
poichè i momenti sono equi-
valenti.

Dunque a vece delle $(P, -P)$
$(Q, -Q)$ applicate ai bracci
p, q si hanno le due coppie
$(P, -P)$ e $\left(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q\right)$ appli-
cate ciascheduna al med.° brac-
cio p. Ma le energie M, N di que-
ste coppie sono fra
loro come $P : \frac{qQ}{p}$, dunque
$M : N :: P : \frac{qQ}{p}$, ossia
$M : N :: pP : qQ$.

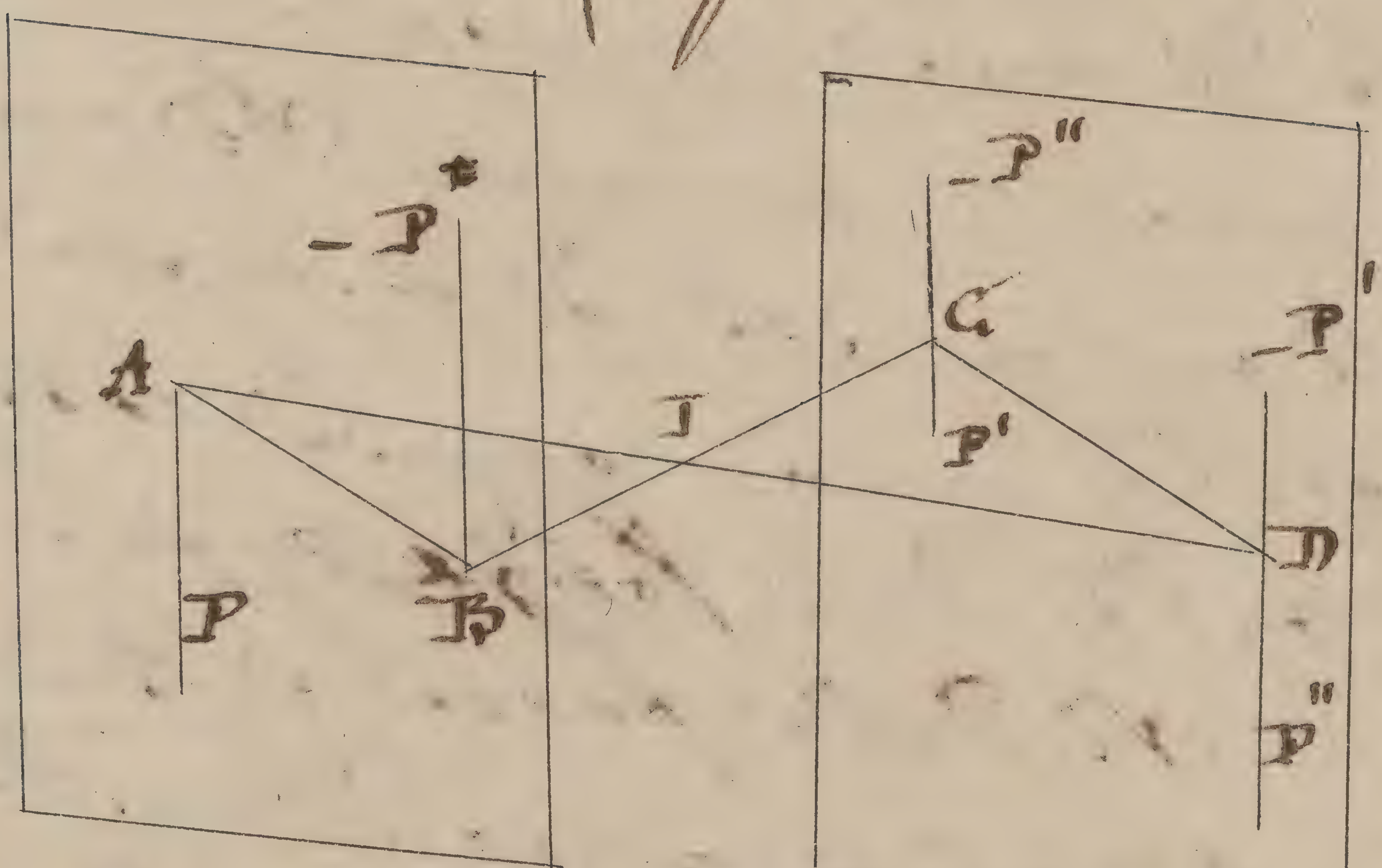
§. 46. Poichè l'energia di 2 coppie
sono in ragion dei momenti
ne consegue che il momen-
to di una coppia ne indi-
ca l'energia. Se prenda-
si per unità di energia l'ener-
gia di una coppia compo-
sta di due forze eguali all'
unità della forza e sia appli-
cata al braccio di unità
lineare, l'energia della
$(P, -P)$ applicata a p,
conterrà tante volte l'uni-
tà di energia, quante volte
$p.P$ contiene il momento $1.1=1$

§. 47. Nel confrontare tra se l'ener-
gie di 2 coppie a vece dei mo-
menti Pp, Qq surrogare si
possono le forze moltiplica-
te pei bracci obbliqui purchè
le braccia facciano il med.°
angolo con la direzion delle
forze. In q.to ipotesi le brac-
cia

obbliqui sono proporzionali
alle ortogonali, e quindi i mo-
menti obbliqui saranno
proporzionali ai momenti
perpend.i e perciò gli obbli-
qui si potranno paragona-
re ai momenti obbliqui
di altre coppie purchè si
abbia lo stesso angolo

§. 18. Una coppia qualunque
può traslocarsi sopra il
med.o piano o da un piano
all'altro a lui parallelo
senza che il suo effetto
sul corpo sia cambiato
purchè il nuovo braccio
sia invariabilmente
unito all'altro.

(Fig. 15)



Si osservi la fig (15)
Sia la (P, -P) ed AB il
suo braccio. Si prenda ad
arbitrio su questo piano
o su di uno parallelo ad
esso la CD = e parallela
AB, e si protraggano le
AD, BC le quali saran-
no sul med.o piano giac-
chè congiungono gli estre-
mi di 2 parallele, e però
cosifatte rette si taglieran-
no in I per mezzo tanto di
AD che di BC.

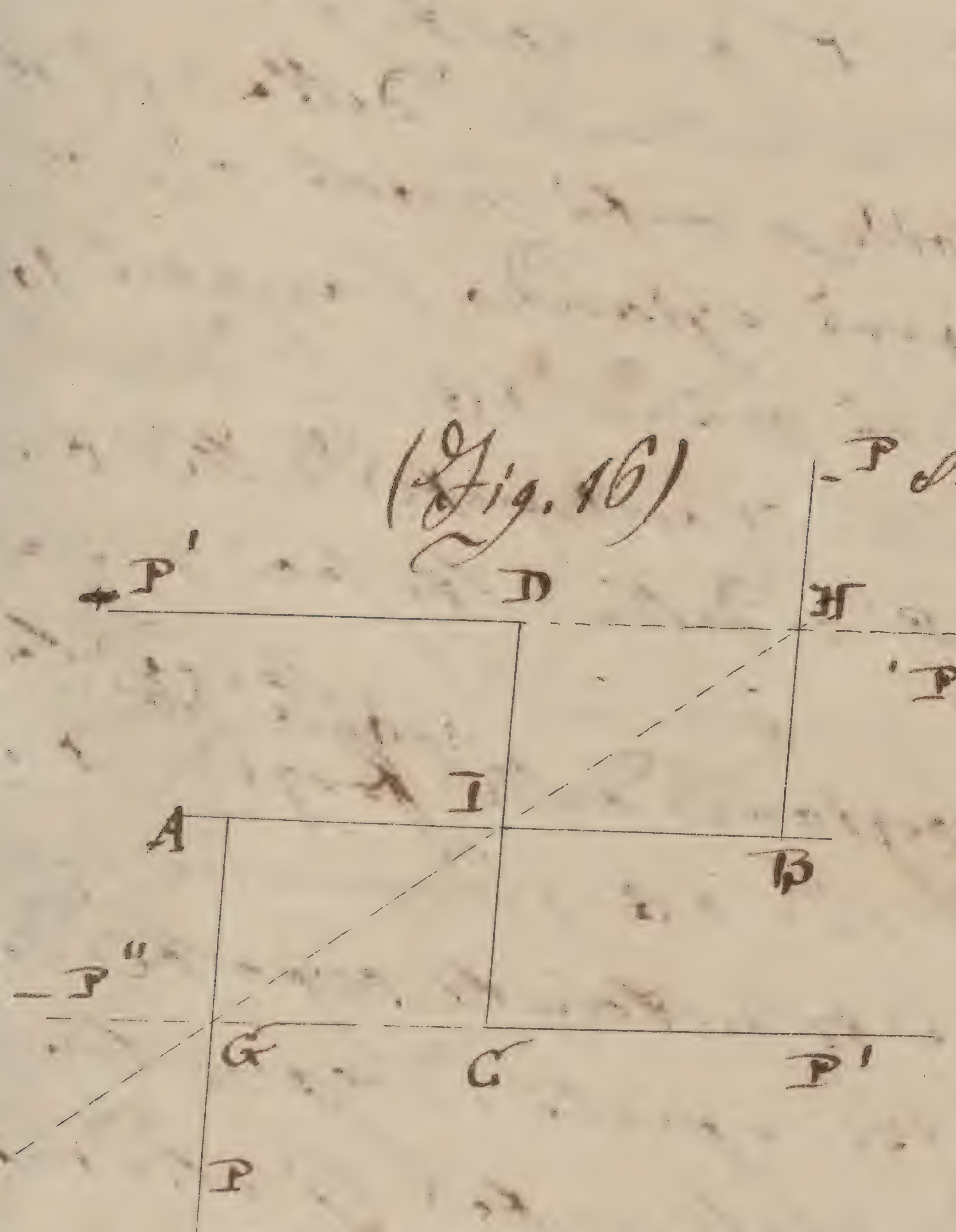
Suppongasi la AD, BC fis-
se e connesse di una manier

§ 17.

invariabile; si applichino a CD parallel.te alle (P, -P) due coppie (P', -P') (P", -P") eguali tra loro ed alla coppia (P, -P) è evidente che le coppie introdotte si distruggeranno. —

La risultante delle due forze eguali e parallele -P' e -P" passa per I ed eguaglia la loro somma = -(P'+P") da che conseguita che le coppie (P, -P) (P", -P") si distruggono e non rimane che la (P', -P') applicata a CD che non è altro che la (P, -P). Come ec.

(Fig. 16)



§ 19. Si osservi la (16). La coppia (P-P) può rotare sul proprio piano o sul piano ad esso parallelo senza che l'effetto della sua energia venga cangiato.

Sia la coppia (P, -P) applicata perpend.e ad AB, e sul piano di questa coppia si protragga CD = AB, che faccia con essa un angolo qualunque tagliandosi esse nel loro mezzo I e rimanendo invariabilmente congiunte. Si applichino le (P'-P') (P"-P") al braccio CD eguali ed opposte, e però il loro effetto sarà nullo e quindi non altereremo il sistema

52.

Dal punto G ove si tagliano le $-P$, $-P'$ si protragga la GI e dai Δ^i. GAI, GCI rettangoli in A ed in C si avrà $\overline{GI}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{AI}^2 = \overline{GC}^2 + \overline{CI}^2$; ma $AI = CI$ dunque $AG = GC$, e però i due Δ^i. GAI, GCI sono ~~equilateri~~ simili e però equiangoli onde la GI partisce in 2 egualmente l'angolo AGC; ma $P = P'$ per ipotesi; dunque la risultante della P'', P dividesi metà l'angolo $-P''G-P'$. e però eziandio l'angolo AGC sarà quindi IG la direz.^e delle risultante delle P e $-P''$: della stessa guisa si proverebbe essere la direzione delle risultante delle forze $-P$ e P'' la IG; dunque queste due risultanti opposte di forze eguali ed egualmente inclinate si elidono, ed esse conseg.^e sopprimere si possono le coppie $(P, -P)$ $(P'', -P'')$, ed perciò non rimane che la coppia $(P', -P')$ il cui braccio AB ruotando intorno al proprio mezzo tiene presa la posiz.^e C.D.D.

Lezione 26.

§. 50. È dunque da concludere che
una coppia senza cambiar
ad l'effetto può essere traspor-
tata nel suo piano od in una
ad essa parallella senza cam-
biarne la ~~situazione~~ energia e cam-
biandone la posizione

56.)

Capitolo V.°

Della Composizione delle coppie

§. 51. Siano primieramente due coppie situate sul medesimo piano o su piani paralleli; si è veduto che le coppie si possono trasportare da un piano ad un altro parallelo. Inoltre si possono cambiare in altre due che abbiano il medesimo braccio.

Si vedrà adunque che le due coppie nella fatta ipotesi si compongono in una sola che eguaglierà la loro somma se tendono a produrre rotazione per lo stesso verso o la differenza se i versi sono contrarii. Siano P, Q, le forze che compongono le due coppie p, q i rispettivi bracci, e D il braccio del trasformato. Invece del ~~braccio~~ momento Pp della coppia (P, -P) si sostituisca il momento di una coppia (P', -P') tale che sia DP' = pP; della stessa guisa, in luogo del momento Qq della coppia (Q, -Q) si sostituisca il momento di una coppia (Q', -Q') tale che sia DQ' = qQ; le due coppie

55.

$(P'_1 - P'_1), (Q'_1 - Q'_1)$ applicate l'una sull'altra al medesimo braccio equivaleranno alla risultante $((P'_1 + Q'_1), -(P'_1 + Q'_1))$; e siccome (a)

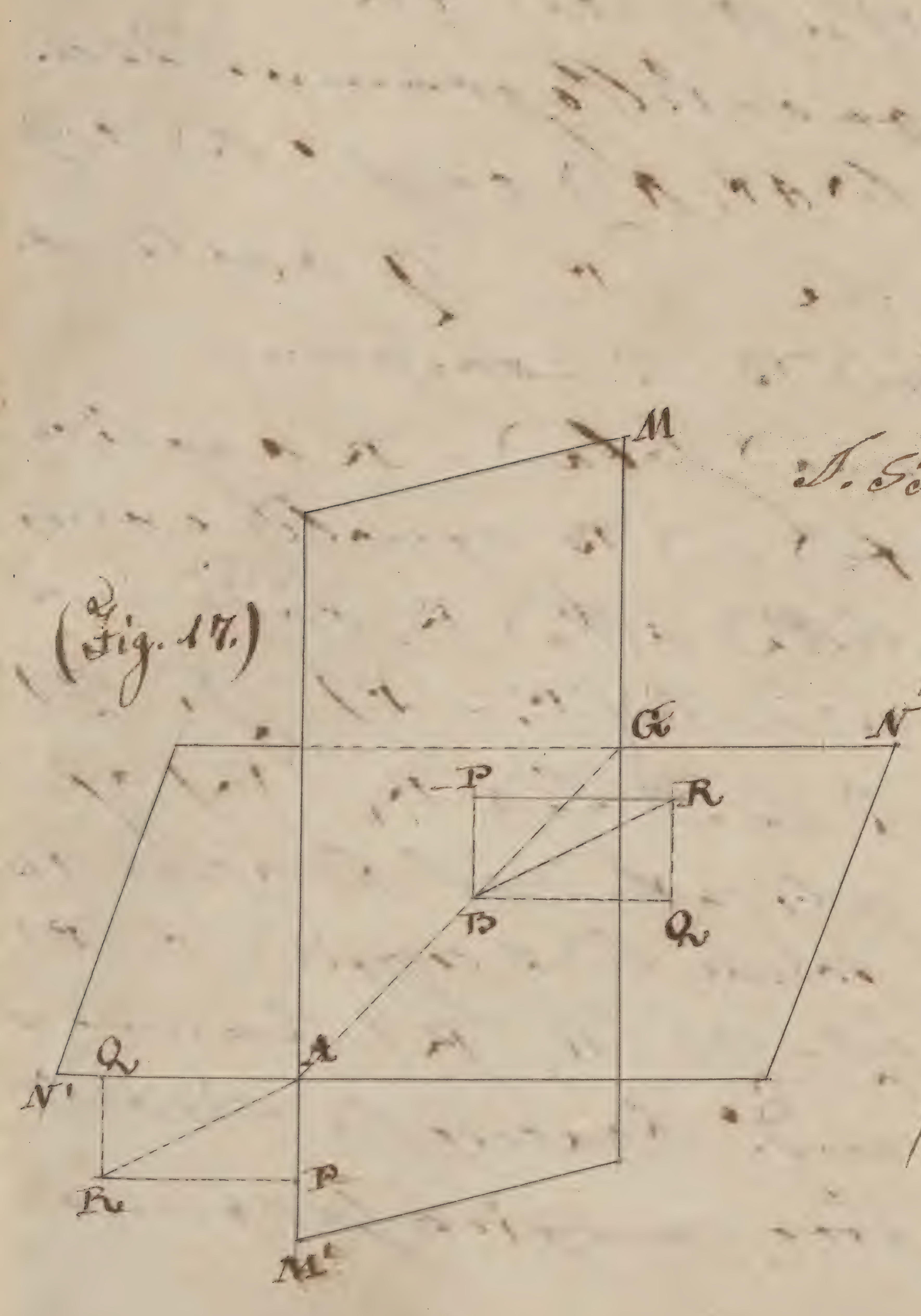
(a) $D(P' + Q') = DP' + DQ' = Pp + Qq$

è quindi aperto che il momento risultante eguaglia la somma di momenti componenti ovvero la diff.za secondo che i sensi della rotaz.e sono lo stesso verso o per versi contrarj.

§. 52. Combinando così le coppie due a due le quali esistono sul med.o piano o su piani paralelli si possono comporre quante coppie si voglia, vale a dire ridurle ad una sola che sarà la risultante ed eguaglierà la somma delle coppie che tendono a produr movimento per un senso meno quelle che tendono a produrre movim.o per l'altro senso.

§. 53. Siano le due coppie $(P'_1 - P')$ $(Q'_1 - Q')$ situate in diff.i piani $M'M$ $N'N$ che si taglieno nella AG e fanno tra loro un angolo qualunque; senza alterare le loro azioni si possono cambiare nelle $(P, -P)$ $(Q, -Q)$ rispett.te equivalenti alle 1.e ed applicate allo stesso braccio

(Fig. 17.)



56.)

Qualunque sia la situazione della (P, - P) si potrà collocarla di guisa che il suo braccio AB cada sulla intersecazione AG dei 2 piani, cosicchè le forze della coppia siano alla AG perpend.e Nel mod.o stesso comunque sia la coppia (Q, - Q) situata sul piano NN si potrà ridurre in una situazione tale che il suo braccio sia AB e le forze ad essa perpend.i Allora le due forze applicate in A esistenti ne' piani diversi si comporranno alla risultante AR diag.le del parallelogrammo di cui le AP, AQ rapp.e le P, Q. Le - P, - Q applicate in B si compongono in una sola - R applicata in B eguale e parallela alla R, onde invece delle (P, - P) (Q, - Q) si ha la (R, - R) applicata al braccio AB

§. 54. poichè le 3 coppie (P, - P), (Q, - Q) (R, - R) hanno il med.o braccio, le rispett.e loro energie saranno

proporzionali alle P, Q, R. —
Se dunque le energie delle $(P, -P)$ $(Q, -Q)$ si rappr. per AP, AQ, l'energia della risultante verrà rappr. dalla AR. Ma gli angoli che fanno fra se i piani delle tre coppie sono misurati dagli angoli AP, QA. AR, dunque il piano della coppia risultante partisce l'angolo formato dai piani delle componenti come la AR divide l'angolo QAP formato dalla AQ, AR.

§. 55. Dal detto si rende manifesto che ottener si può la risultante di quante coppie si vogliano applicate ad un corpo poste comunque nello spazio. —

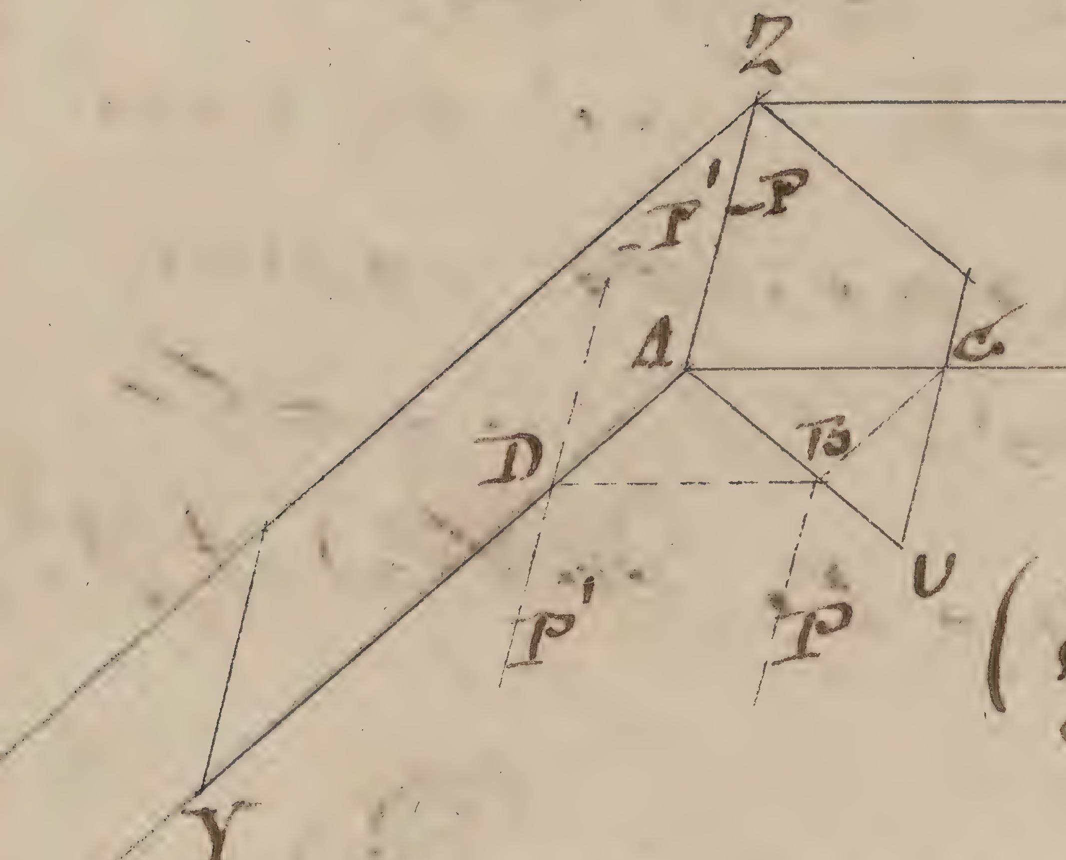
Poichè componendosi due e poi la risultante di questa ~~e come per i copp~~

§. 56. si può altresì scomporre una coppia in altre due poste su di due dati piani. Suppongasi che l'intersecazione dei due piani sia la retta della coppia o ad essa parallela. —

Nel caso che l'intersecazioni dei due piani siano parallela

(58.)

si può trasportare un piano parallelamente a se stesso finchè passi per l'altra traccia. Ciò eseguito per effettuare la scomposizione non si avrà che a tenere un metodo inverso alla composiz.e oppure nella maniera seg.te



(Fig. 18.)

§. 57. Fig. 18. Sia ZU il piano della coppia (P, −P); in qualunque maniera sia la coppia situata su questo piano si potrà porre in modo che lo sue forze siano parallele alla AZ, e che (* la direzione di una forza sia sulla AZ e sia la −P;) allora la direzione della P incontrerà in un punto B la retta AU intersezione di un piano ~~[illegible]~~ le cui intersecazioni coi piani ZX, ZY, ZU sono AX, AY, AU, e si avrà la coppia (P, −P) applicata al braccio AB.

Sulla AB come diagonale e colle direzioni AY, AX si costruisca il parallelogrammo ACBD, e dipoi ad uno de' suoi angoli p.e. D si applichino due forze eguali tra se e alla P e ad essa parallele, e non si avrà cangiato l'effetto della (P, −P).

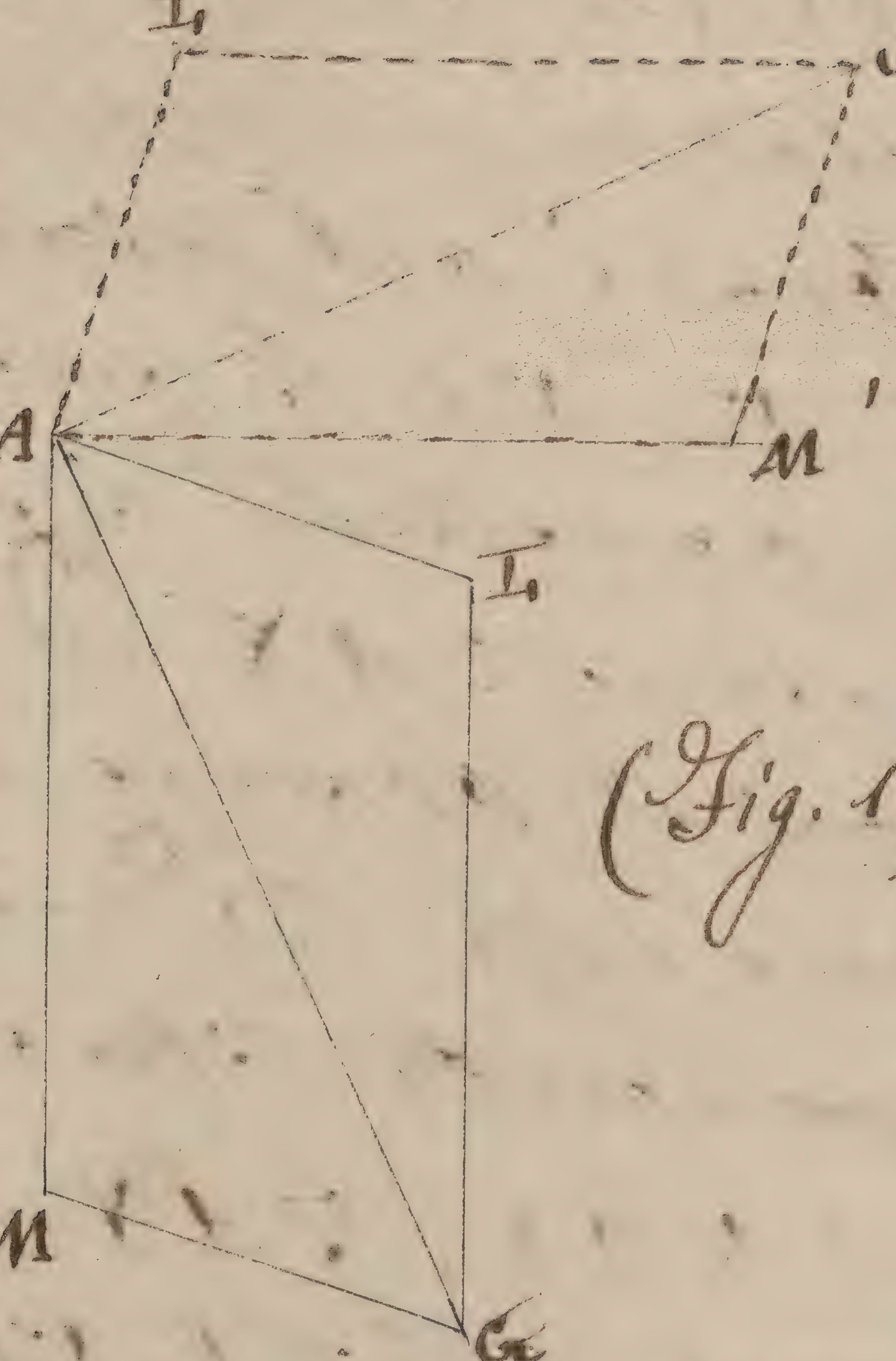
59.

Ciò fatto invece di qsta coppia applicata alla AB prendere si possono le altre due coppie (P', -P'), (P, -P') e questa è parallela al piano ZAX, e l'altra i nel piano ZAY. La (P', -P') si può trasportare parallel.te a se stessa sul piano ZAX ed avrà allora il braccio AG, e si hanno così le due coppie componenti situate sui piani ZAX, ZAY che equivalgono alla (P, -P).

Riguardando che i lati AD, AG si accostino finchè si pongano sulla diagonale AB, la rotazione si fa sullo stesso senso.

§. 58. Poichè le forze delle 3 coppie sono uguali, i loro momenti cioè sono le loro energie saranno proporzionati alle rispett.e braccia AD, AB, AG il che conferma il detto al §. 56.

§. 59. Invece di determinare la posiz.e di una coppia mediante la posizione del piano sul quale essa giace si può determinare la situazione di una perpend.e ad esso. Questa perpend.e la diremo asse della coppia: poichè una coppia potendosi



(Fig. 19)

supporre applicata comunque su di un piano si conoscerà la direz.e del med.o asse, poichè innalzando un piano perpend. a q.to asse, suppor-

§. 60. (Fig. 19) Sia il parallelogrammo AMGI, e lungo i suoi lati AI, AG, AM immaginiamo innalzati 3 piani perpendicolari ad esso.

Si è ved. al §. 58. che se l'energia delle coppie esistenti nei piani che passano per AI, AG, AM vengono presentate da queste rette, l'energia della coppia risultante che giace sul piano della AG, sarà dalla

Se ora per A nel piano del parallelogrammo indicato si tirino le AI', AG' AM' perpendi a AI, AG, AM riuscivanno rispettivamente perpendicolari ai piani delle 3 coppie e faranno tra se gli angoli stessi che fanno le AI, AG, AM; laonde se prendasi AI' = AI AG' = AG, AM' = AM si formerà il parallelog. AG' eguale e simile al parallelog. AG, e quindi si debbe concludere che se l'energie di 2 coppie situate in due piani rispettivamente perpendicolari ad AG'M'I' siano presentate da AG', AM', l'energia della risultante (a)

(a) sarà situata nel piano perpendicolare ad AG' e verrà da lei presentata ———,

61.

(ne che qto sia il piano della coppia)

cioè se gli assi e l'energie di 2 coppie vengono presentati dai lati di un parallelogramma la diagonale di lui rappresenterà l'asse e l'energia della coppia risultante.

Si osservi che l'asse della coppia non ha altra condizione che essere perpendicolare al piano della coppia stessa, e però si può prendere sopra o sotto il piano, e il senso in cui si prende mostrerà la maniera d'agire della coppia. Supponiamo che prendendo l'asse al disopra del piano il movimento si eseguisca da sinistra a destra e quello di sotto rappresenterà il movimento inverso.

(Ho stessa presentata)

Supponiamo che uno stando in piedi guardando l'asse della coppia e vedendo il movimento farsi da sinistra a destra se si capovolgesse vedrebbe farsi il movimento inversamente.

Questi movimenti si dicono lineari.

§. 61. Facilmente si vede che se due coppie agenti in due piani o paralelli o che non siano per diritto avere non possono una risultante nulla amenochè

62.)

che ciascuna coppia non sia nulla da sè. Difatti se ciascuna coppia sia nulla si potrà formare un parallelogrammo la cui risultante non sarà nulla. Se una coppia ~~[illegible]~~ sia nulla l'altra sarà la risultante.

§. 62. Se i piani delle coppie componenti sono tra se perpendicolari, le due perpendicolari a questi piani, cioè sono (fig. 19) AM', AI', il sono pure fra loro, ed in allora AG' è un rettangolo.

Poniamo $AI' = I_1$, $AM' = M_1$, $AG' = G_1$, e si avranno

(1) $G_1 = \sqrt{I_1^2 + M_1^2}$,

(2) $I_1 = G_1 \cos I_1 . G_1$,

(3) $M_1 = G_1 \cos M_1 . G_1$,

(4.) $\cos I_1 . G_1 = \frac{I_1}{G_1} = \frac{I_1}{\sqrt{I_1^2 + M_1^2}}$,

(5.) $\cos M_1 . G_1 = \frac{M_1}{G_1} = \frac{M_1}{\sqrt{I_1^2 + M_1^2}}$,

§. 63. Se le energie, e gli assi di tre coppie sieno presentati dai 3 spigoli adiacenti di un parallelepipedo, la diagonale di lui rappresenterà il momento risultante dei momenti lineari delle 3 coppie.

(Fig. 5) sieno MX, MY, MZ,

(3.)

rappresentanti tre coppie esistenti in diversi piani [3 bracci]
Le due coppie rappresentate da MX, MY si compongono in una MM' diagonale del parallelogrammo MM': in questa colla MZ si compone ~~colla~~ in una che è MN diagonale del parallelepipedo come per le forze.

§. 64. Come si è fatto al §. 61. come si è fatto per le forze si può dimostrare che la risultante di 3 coppie esistenti in piani differenti non può esser nulla.

§. 65. Allorchè il parallelepipedo è rettangolare e i momenti rettangolari vengono rappresentati da L_1, M_1, N_1, e G_1 è il momento risultante della coppia, si ha

(6) $G_1 = \sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2}$

(7) $L_1 = G_1 \cos L_1 . G_1$

(8) $M_1 = G_1 \cos N_1 G_1$

(9) $N_1 = G_1 \cos M_1 G_1$, e però

(10) $\cos L_1 G_1 = \frac{L_1}{G_1} = \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2}}$

(11.) $\cos N_1 G_1 = \frac{M_1}{G_1} = \frac{M_1}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2}}$

(12) $\cos M_1 G_1 = \frac{N_1}{G_1} = \frac{N_1}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2}}$

Mediante queste equazioni si possono sciogliere tutte le questioni relative alle comp.

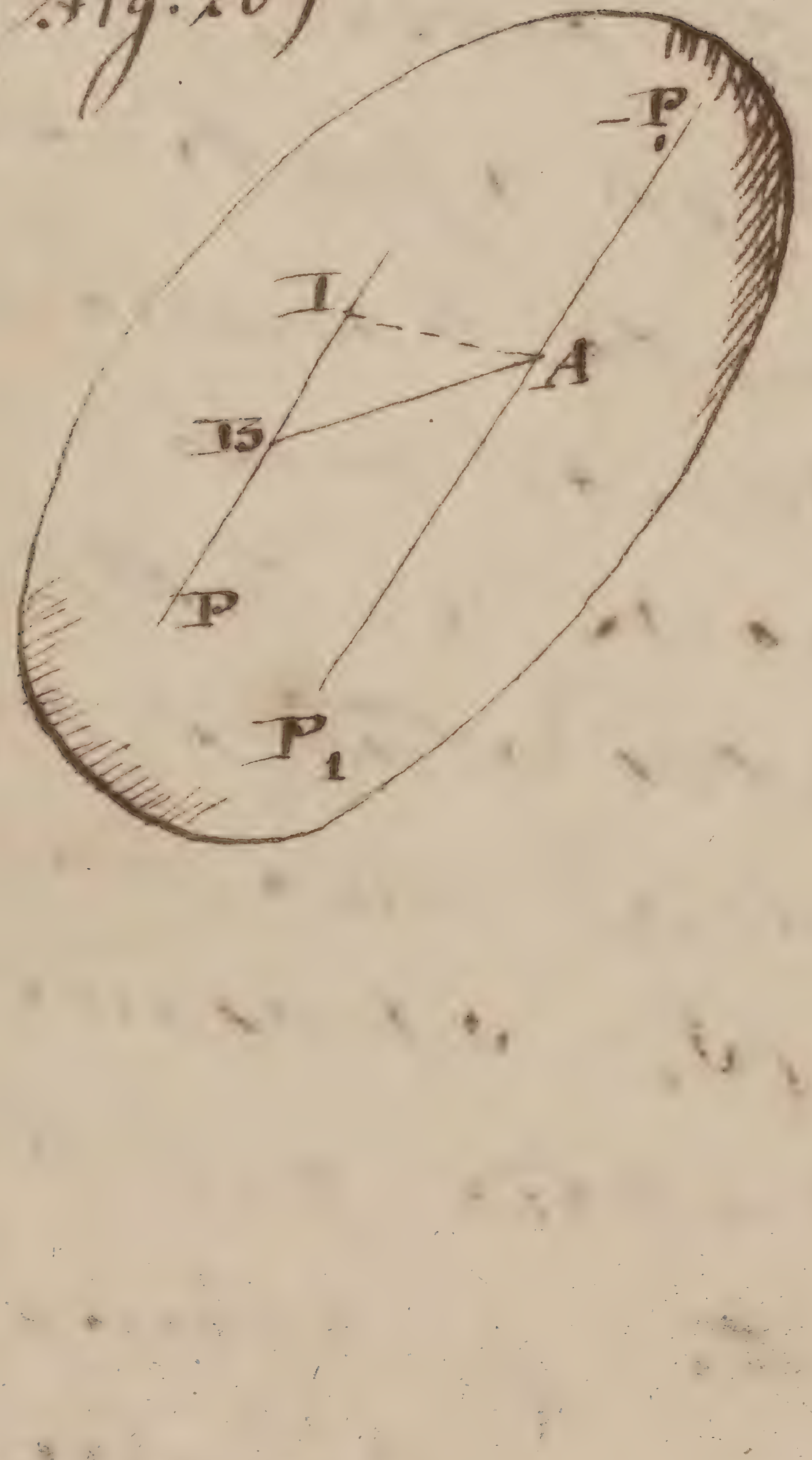
sizione delle forze avendosi la

$$(13)\quad \theta\hat{\ } I, G, + \theta\hat{\ } M, G, + \theta\hat{\ } N, G, = 1.$$

(a 28. Ripetiz.) Della composizione delle forze dirette comunque nello spazio ed applicate ad un sistema di punti invariabili

§. 66. Sieno adunque le forze P, P', P'' — &c che abbiano qualunque direzione nello spazio essendo il corpo o sistema libero. Prendiamo in considerazione una forza P applicata in B punto del corpo A fig (20). Prendiamo un secondo punto A a cui si applichino due forze P_1, $-P_1$ eguali alla P e con direzioni opposte e sieno esse parallele alle P, la qual cosa non cambia il sistema. Ciò fatto invece della P, applicata in B si ha la P_1 applicata in B eguale alle P cioè che non è che la forza P trasportata in B e ciò fare s' introduce una coppia (P_1, $-P_1$) che ha il braccio AB, a maggior chiarezza trasportiamo questa coppia su di del piano suo o in piano parallelo

(Fig. 20)



66.

il che non porta alterazione come si è veduto al §. 48. Allora rimarrà soltanto ita A applicata la F. con direzione della F. e ad essa eguale. Se si farà la stessa cosa per tutte le altre forze che agiscono sul corpo, trasportandole in A si aggiungeranno tante coppie quante sono le forze; ma tutte le forze applicate ad un punto hanno una risultante unica che chiamo R, e tutte le coppie introdotte si possono ridurre ad una coppia sola (S, -S) come §. 45. e che abbia per braccio una retta qualunque P.Q. Dunque si debbe concludere che qualunque siasi il numero delle forze applicate ad un corpo o ad un sistema di punti invariabili, queste forze si potranno sempre ridurre ad una forza e ad una coppia che in generale saranno in diversi piani.

(67.)

se le forze P, P', P'' ... sieno situate sul medesimo piano, è chiaro che questo sarà ancora la coppia risultante.

Osservo che l'intensità, la direzione ed il verso secondo il quale agisce la forza R sono sempre i medesimi dovunque si prenda il punto A, dunque la forza R è sempre la stessa in direzione. Ma l'energia della coppia $(S, -S)$ varia al variare del punto A, dunque delle risultante forza e risultante coppia la 1.a rimarrà la stessa e la 2.a cambierà.

§. 67. Supponiamo che la R e la $(S, -S)$ si possano ridurre ad una sola forza. Chiamiamola R_1 questa sola forza. Se prendasi questa forza in direzione opposta ed applicata al med.o punto, si avrà l'equilibrio. Perchè ciò sia, è necessario che le forze R ed R_1 formino una coppia equivalente ed opposta ad $(S, -S)$. Per conseguenza bisogna che il

piano della coppia ($R_1 - R$) sia lo stesso del piano della ($S_1 - S$) o su piani ad esso paralleli.

Tre casi si possono presentare.

=1.° Quando le due forze R ed R_1 si riducono ad una sola R_{11}, e in questo caso la R_{11} non può far equilibrio alla coppia ($S_1 - S$)

=2.° Quando le due forze R, R_1 si riducono ad una forza e ad una coppia. Allora la coppia che si è ridotta e la ($S_1 - S$) si riducono ad una sola, e una sola forza non potrà far equilibrio.

=3.° Quando le due forze R, R_1 si riducono ad una sola coppia, cioè quando sono uguali ed hanno direzioni oppost. Questa coppia che deve equilibrare la ($S_1 - S$) e di conseg.^a le 2 coppie dovranno essere situate o sul med.° piano o su paralelli, senza di che si comporrà in una sola §. 61 e non vi sarà equilibrio –

69.)

La direzione adunque della risultante R essendo deve parallela al piano della coppia (S, - S) si dovrà dunque concludere che tutte le forze applicate ad un corpo o sistema di punti liberi invariabile non possono avere risultante unica, a meno che la risultante R di tutte le forze trasportate parallelamente a sè stessa a passare pel med.º punto non assia una direz.e parallela al piano della coppia risultante di tutte le coppie introdotte. —

La qual cosa dee succedere per qualunque punto dello spazio in cui si trasportano le forze.

Questa cond.e è necessaria all'equilibrio, avvegnachè si potrà applicare la R, eguale e contraria a R e che formi la coppia (R, - R) R = R, che sia di un senso contrario e di un momento equivalente. —

Questa forza presa

come risultato generale
sarà risultante del
sistema. ——

Se le P, P', P'' — &c. sieno
sul med.° piano affinchè
vi sia equilibrio conviene
che non sia $R = 0$, poichè
in tal caso rimarrebbe una
coppia a cui non può far
equilibrio una forza. —

Allorchè la R è paral-
lela al piano della
coppia risultante $(S, - S)$
si potrà trasportare que-
sta coppia di guisa che
la R e la $(S, - S)$ sieno
sul med.° piano. Sicco-
me poi si può dare alla
coppia stessa s. q.to
piano una direzione
qualunque senza altera-
re il sistema, si potrà
fare in modo che una
forza S cada sulla direzio-
ne della R. Si avran-
no allora due forze
$R + S, - S$, e la risultan-
te sarà $R_1 = R + S - S = R$
che sarà parallela ad R.

§. 68. Mostrasi eziandio che quan-
do le forze sono sopra di-
versi piani non potranno
avere risultante unica,

71.)

se abbiasi R = o: poichè allor tutte le forze del sistema si riducono ad una coppia che non può essere equilibrata da una forza, dunque ec.

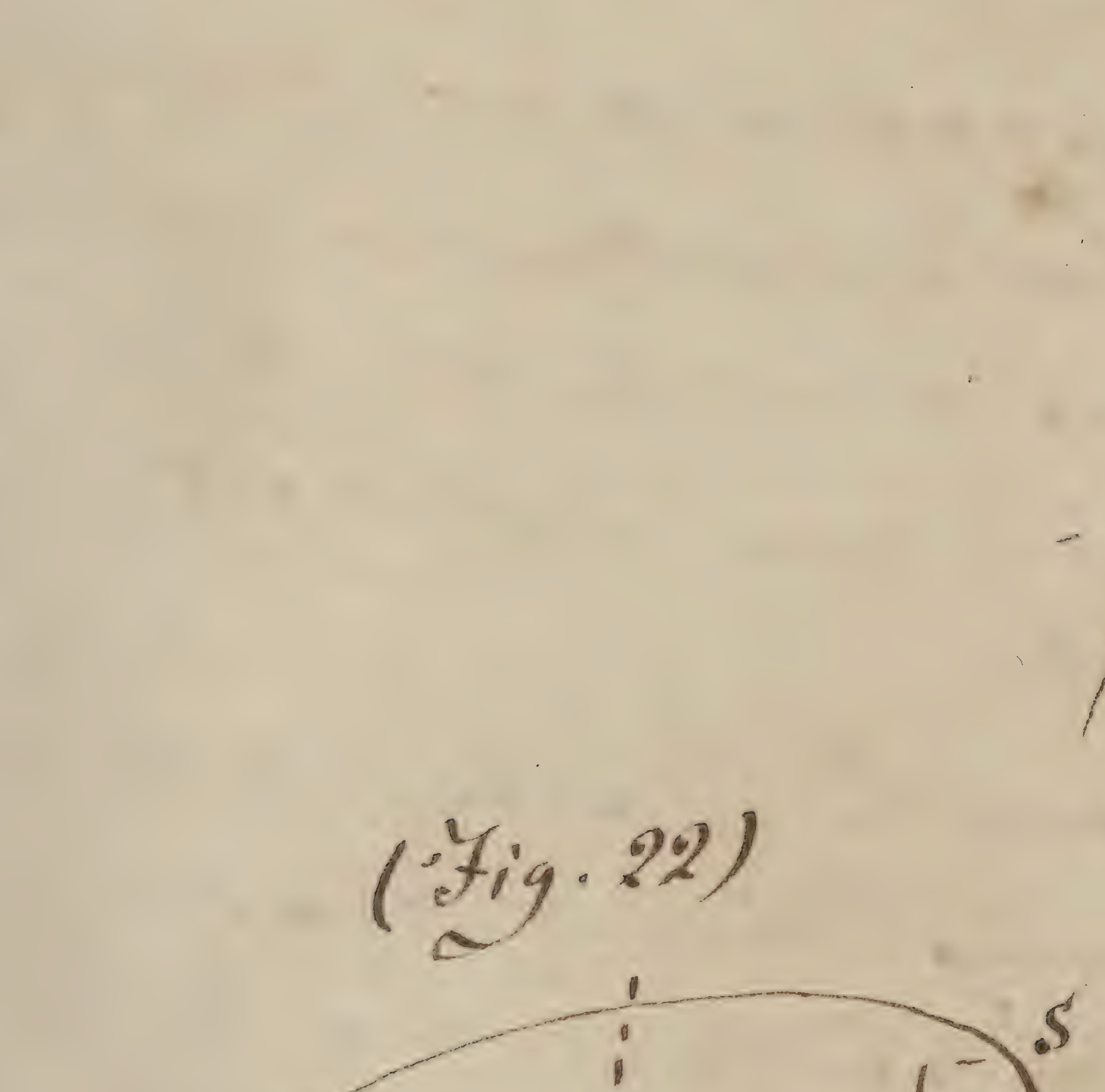
Laonde alla precedente condizione che esige che la R riesca parallella al piano della coppia (S, - S) è d'uopo aggiungere come particolar cond.e che non sia R = o.

Se poi tanto R che la coppia (S, - S) sia nulla dico si potrà che la risultante è zero, cioè il corpo è in equilibrio e la direz.e di esso è qualunque.

S. 69. Allorchè la risultante R e la (S, - S) non sono su piani paralelli non vi sarà risultante unica.

(Fig. 22) Si trasporti la coppia (S, - S) che è applicata al braccio BC' paralellamente a se stessa, finchè uno de' suoi estremi B cada sopra A. Allora le due forze R ed S applicate in A si compongono in una che indicheremo per T e di conseguenza tutte le forze del sistema sono ridotte alle T e - S che non sono sul med.o piano Il che mette davanti che

(Fig. 22)



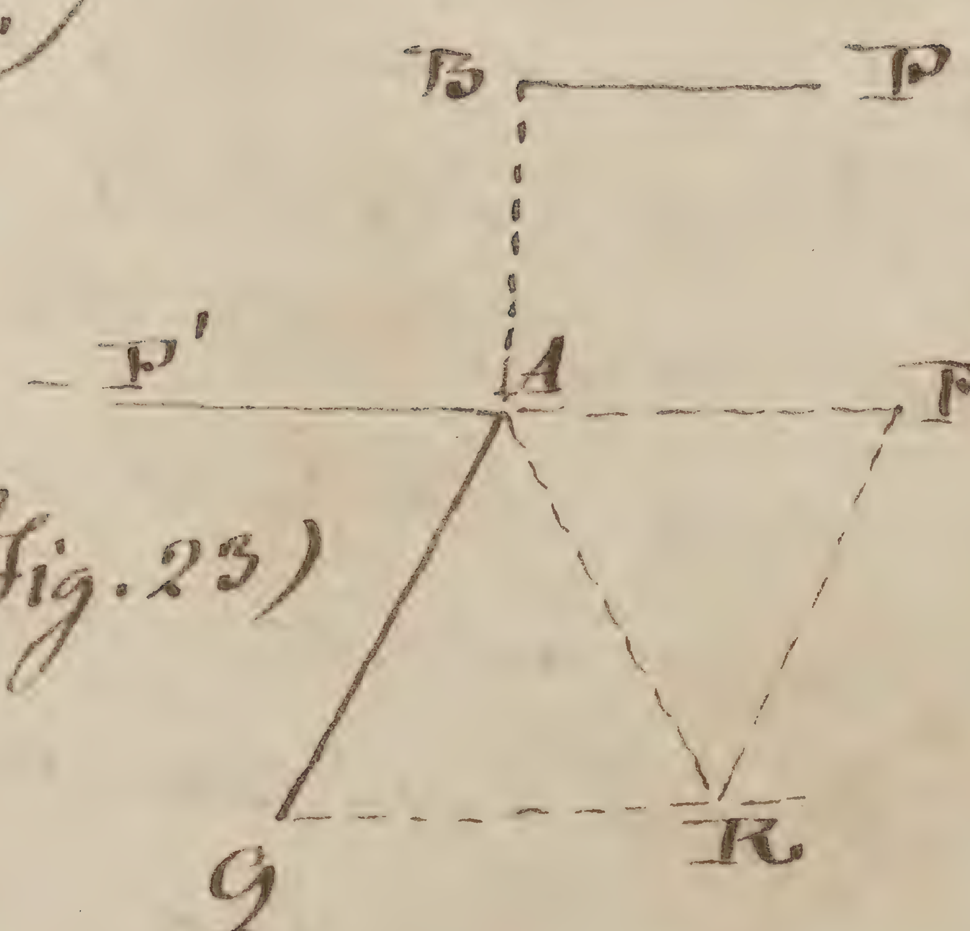
quante forze si vogliano dirette nello spazio se non abbiano risultante unica ridurre si possono ad una coppia se R = 0, ovveramente ad 2 forze si tuate su piani diffi allor chè R non è nullo. —

Egli è poi chiaro che una siffatta riduzione può aver luogo in un infinità di maniere senza che cambj il punto A, ove si applicano le forze avvegnachè la coppia (S, -S) si può cambiare in un infinità di maniere e può inoltre ruotare intorno al suo centro per lo quelcosa si avrà un'infinità di forze

§. 76 Dipend.o dalle cose dette potremo dimostrare una cosa che si pone di ines-strata, cioè, che due forze esistenti in piani diffi non ammettono risultante. —

Diffatti, si può sempre supporre che quelle due forze derivino da una coppia ed una forza in differenti piani posta —

(73.)



(Fig. 23)

Siano le P, Q (fig. 23) non situate sul med.º piano ed applicate ai punti B, A. Si trasporti la P parallelamente a se stessa in A introducendo la coppia (P', -P') il cui piano sarà diverso da quello della Q. — P' = P le Q e P' hanno una risultante unica che esiste entro l'angolo QAP' e però non potendo cadere sopra P' non può essere nel piano della coppia a meno che Q non sia = 0, e però la risultante R e la Q non esistono sul med.º piano. dunque il sistema non può avere una risultante unica

§. 71. Una coppia non può essere in equilibrio intorno ad un punto fisso ad es. nel mezzo del suo braccio, la qual cosa mette davanti la differenza notabile di più forze che possono far rotare il corpo. Nel caso delle coppie è necessario che le coppie applicate diano una risultante che sia zero da se. Inoltre le coppie non sarebbero nemmeno in equilibrio se vi avesse nel corpo un asse fisso, laonde se diffe coppie situate comunque nello spazio sollecitano un corpo d'un siste-

(74.)

me invariabile di punti costretti a muovere, le condizioni d'equilibrio sono le stesse come se fosse mobile. Lo stesso ha luogo di un asse fisso purchè le risultanti coppie non diano una coppia parallela all'asse. In generale ciò non ha luogo se le coppie sono parallele o tagliano l'asse fisso.

Capitolo VII°.

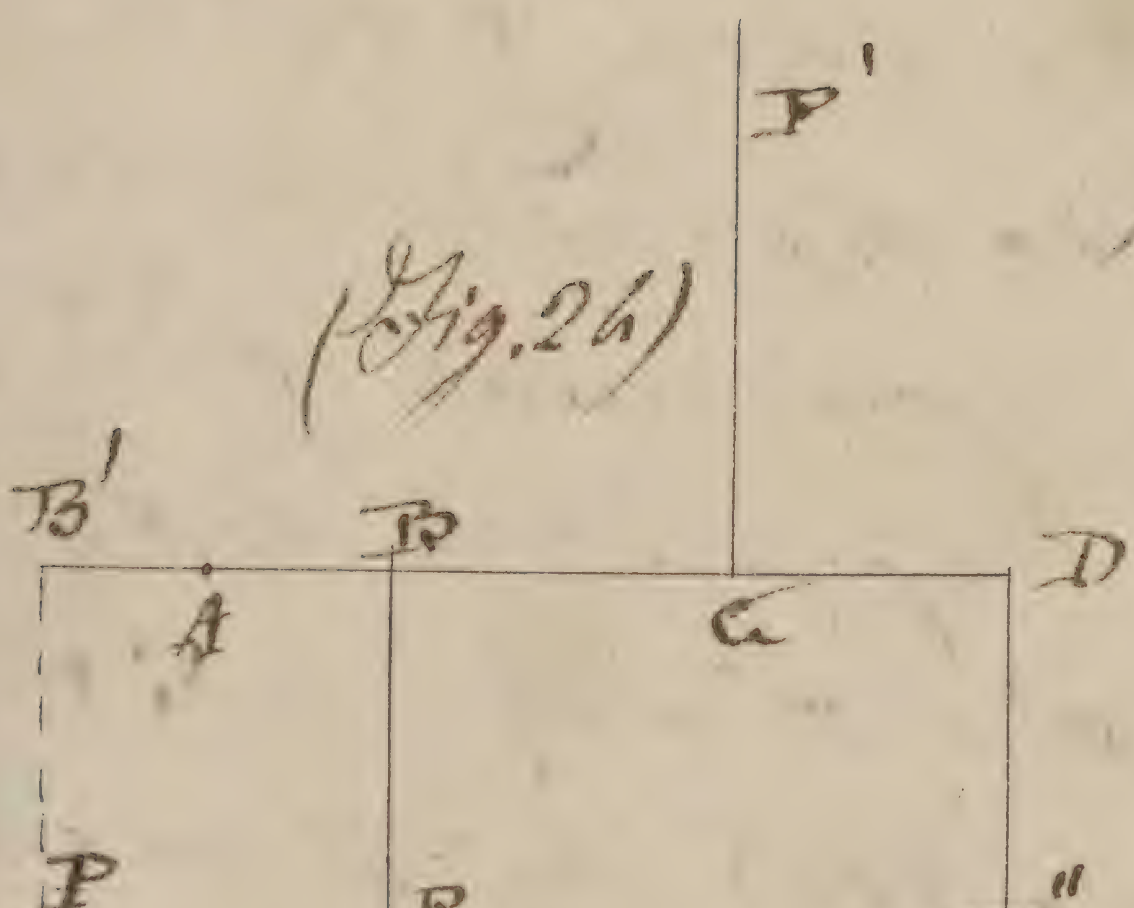
Delle condizioni d'equilibrio fra le forze parallele

§. 72. Dietro il detto risulta, che un sistema libero e invariabile a cui sono applicate delle forze dirette comunque nello spazio, sarà in equilibrio se trasportate le forze a se stesse parallele in un punto del sistema o diverso purchè sia invariabilmente attaccato al sistema si facciano equilibrio, e tutte le coppie che s'introducono siano altresì tra loro equilibrate. —

§. 73. Si osservi la (fig. 24). Siano le forze P, P', P'', ec tutte parallele fra loro applicate ad un sistema invariabile ed esistenti nello stesso piano.

Da un punto A preso comunque sul piano delle forze si conduca una perpend. alle direzioni delle forze che le tagli nei punti B, C, D ec. Prendiamo a considerare una di queste: la P che è applicata in B. Vi applichiamo due forze al punto A eguali a P fra loro e alla P cioè si trasporti la P da B in A introducendo una coppia che

(Fig. 24)



avrà per braccio AB, e la
sua energia sarà P.AB.
Si faccia lo stesso per la
P', che avrà per braccio AG, e
la sua energia (della coppia)
sarà P'.AG: così seguitando
ad operare per le forze P''
P''' &c per ciascuna di esse
si avrà una forza appli-
cata in A ed una coppia,
e perciò in A vi saranno
tante forze quante lo
erano quelle del sistema
e tante coppie di N.° egua-
li. Noi possiamo suppor-
re per maggiore chiarezza
trasportate in altri piani
o su piani paralleli le
coppie, e in A si avrà la
la risultante che passa
e esso sarà $P + P' + P''$ &c
avendo riguardo ai segni.
Dunque una cond.e sarà
per l'equilibrio data dalla

(1.) $P + P' + P'' + \&c = \Sigma P = 0.$

ed inoltre che il momento
risultante di tutti i mo-
menti sia nullo da se:
ma le coppie sono o sullo
stesso piano o su paralleli
ed inallora per §. 52 il
momento risultante egua-
glia la somma dei momenti

dunque il momento risultante sarà la somma dei momenti. Posto AB = p', AG = p, AD = p'' — & e l'altra cond.e sarà

(2.) $Fp + F'p' + F''p''$ — $= \Sigma Fp = 0$.

Si è avvertito che le forze prender si debbono con segni contrarj se agiscono in direzioni opposte e ciò debb'essere per l'equilibrio —

Per ciò determinare consideriamone una Fp che dipende dal segno di F e di p e cioè dalla direzione della coppia e dal braccio.

Difatti supponiamo che la F agisca nella direzione opposta a FB, allora la coppia si dovrà prendere con segno contrario, e però cambia il segno del momento. Supponiamo ora che la F senza cambiare direzione si trasporti in B, allora cambierà il segno del braccio e però del momento. Se ora anche la direzione della forza cambi allora il segno del momento rimarrà lo stesso.

Da ciò si vede che la (2) porta l'equaz.e di equilibrio riguardo ai segni.

§. 76. Supponiamo che le F, F', & invece di essere in equilibrio abbiamo una risultante R,

(78.)

dunque $-R_1$ farà equilibr. alle P, P', ec quando sia posta in direzione opposta a R_1. Aggiungendo adunque $-R_1$ al 1.º membro della (1) e $-R_1 v_1$, essendo v_1 il braccio, avremo le eguaglianze

(3) $P + P' + P'' + \text{ec} - R_1 = 0$,

(4) $Pp + P'p' + P''p'' + \text{ec} - R_1 v_1 = 0$. e però

(5) $R_1 = P + P' + P'' + \text{ec}$ come

(6) $R_1 v_1 = Pp + P'p' + P''p'' + \text{ec}$

la (5) $= \Sigma P$, la (6) $= \Sigma Pp$.

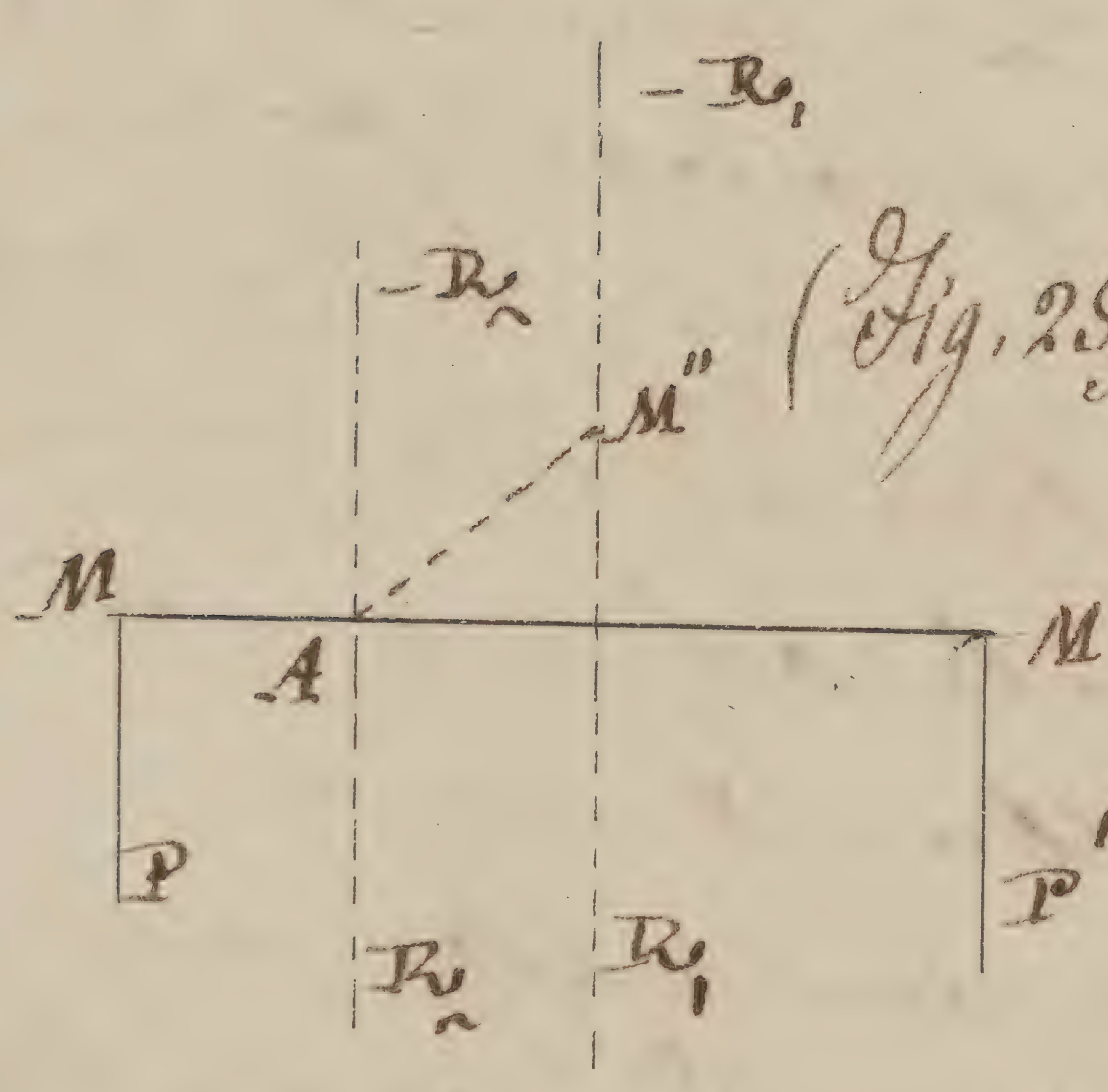
Questa supposizione pone che le forze abbiano una risultante, e questa non v'è se trasportate ad un punto v'è una coppia ec.

La (6) ci dice che il prodotto della risultante R_1 nella sua distanza v_1 da un punto A preso ad arbitrio sul piano delle forze, eguaglia la somma dei prodotti delle componenti nelle rispett.e distanze dal punto stesso: dalla (6) si ha

$$v_1 = \frac{Pp + P'p' + P''p'' + \text{ec}}{R_1} = \frac{Pp + P'p' + P''p'' + \text{ec}}{P + P' + P'' + \text{ec}} = \frac{\Sigma Pp}{\Sigma P}.$$

che ci mette davanti il valor
della distanza della risultan
te dal punto dato, e però
la posizione di lei.

§. 75. Si è già dimostrato che la
risultante di due forze pa
rallele è sul di loro piano.
Ciò si può dimostrare
colle coppie.



(Fig. 25.)

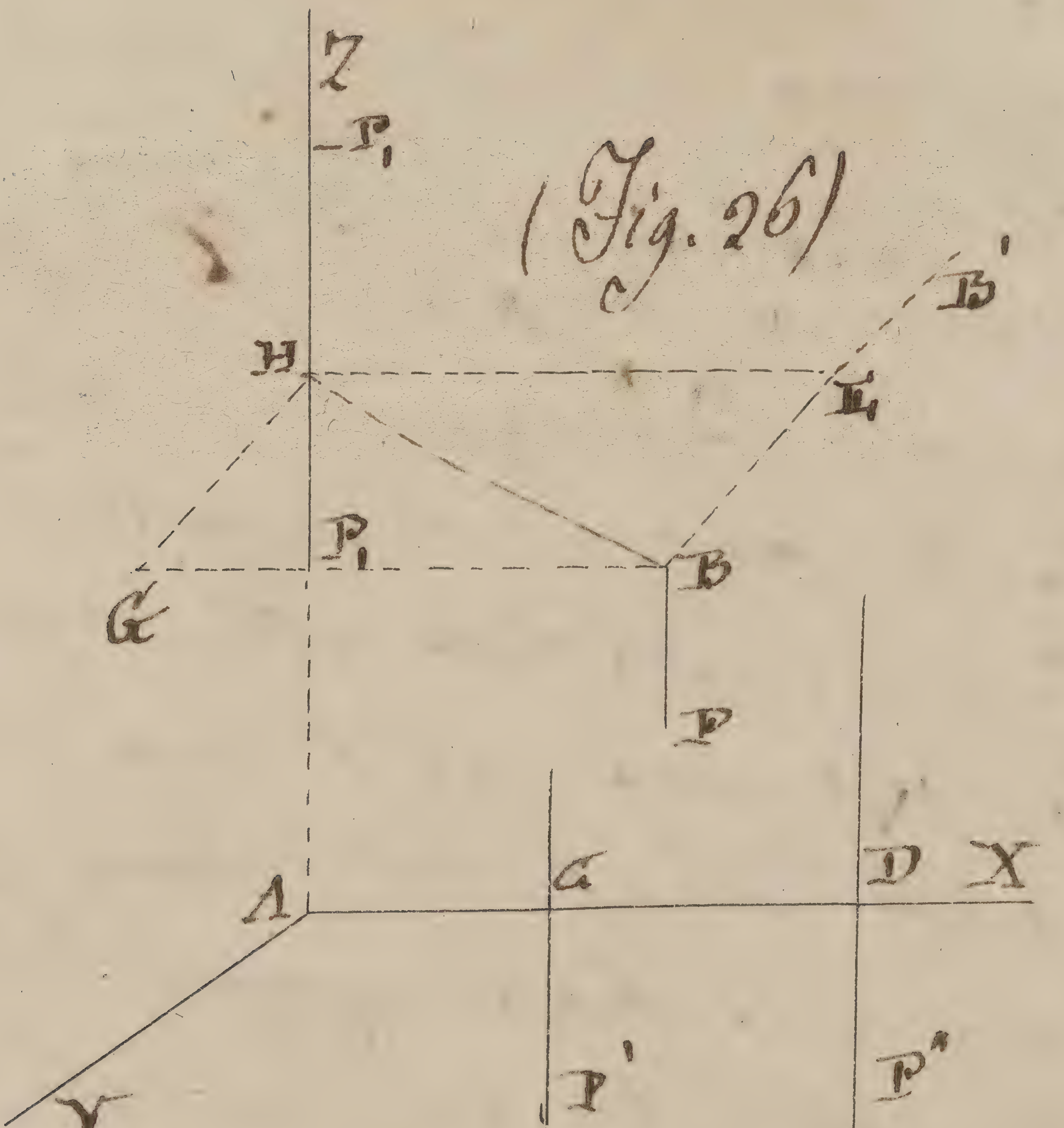
(Fig. 25). Siano P, P' le
due forze che abbiamo se
è possibile la risultante
R, che sia applicata al pun
to M'' fuori di questo piano.
Se ad esso si applichi una
forza −R, essa farà equi
librio alle P e P'.
Trasportiamo la −R, in A e si
avrà una coppia (R, −R,) che uni
ta alla R, dovrà equilib. P, P'.
Ma le −R, P e P' si com
pongono in una sola for
za, ovvero in una cop
pia esistente in un piano che taglia il piano
delle (P, P') dunque una così
fatta forza o coppia deve
far equilibrio alla coppia
(R, −R,): ma nè l'uno nè l'altro
è possibile perchè una forza
non può far equilibrio ad
una coppia e viceversa. Du

§. 76. I prodotti come Pp, P'p' e
d'ordinario si nominano mo
menti di una forza relati
vi ad un punto che non sono
che i prodotti della forza
nella distanza del punto da
essa

80.)

si è dato il nome di momen-
to ad energia ad una coppia.
Allorchè poi si considera il
prodotto numerico di una
forza rispetto ad un punto
lo diremo momento di essa.
Concludere adunque si deve
che la somma dei momen-
ti di quante forze si vo-
glia prese su di un piano
relativi ad un punto, è
eguale al momento della
risultante. —

§. 77. Cerchiamo altrimenti le
condizioni d'equilibrio per
le forze parallele ma esi-
stenti nello spazio.
Siene al solito P, P', P'' &
le forze parallele esistenti
nello spazio ed applicate
ad un sistema invariabile.
Si osservi la (fig. 26)
Si protraggano dai piani
ZAY, ZAX paralelli alle
direzioni delle forze e sup-
porremo che siene perpen-
dicolari. Consideriamo la
P applicata in B e si con-
duca la BH perpendicolare
a ZA e ad H si applichino
due forze P_1 $-P_1$ eguali a P ed
agenti in direzioni opposte
e così si viene ad applicare



(Fig. 26)

la P in H che ha per braccio BH. Si può fare lo stesso per le P', P'' & e si può supporre che le coppie siano trasportate in piani paralleli di modocchè sulla AZ non rimangano che le P, P', P'' & eguali alle date ed agenti nelle direzioni loro, e per l'equilibrio si dovrà avere la (1.) trovata. La seconda condizione è che il momento della coppia risultante sia nulla. Ma in questo caso tutti i momenti non sono sullo stesso piano, e però il momento risultante non sarà la somma dei momenti parziali.

Per attingere lo scopo consideriamo la coppia (P, -P) conservandola alla sua posizione. Da B si faccino cadere sui piani ZAY e ZAX le perpend.ⁱ BG, BE, e si compia il parallelogrammo BGHE. Si scomponga la coppia (P, -P) in due che hanno per bracci HE e HG; poniamo

HE = BG = x

BE = HG = y e il momento P.BH resterà composto dei Px e Py situati rispett.ᵉ nei piani ZAX e ZAY.

Presentiano x', y' le perpendicolari, come si è fatto per P e il momento (P', P) si scomporrà nei due momenti $P'x'$, $P'y'$ situati anch'essi rispett.e sui piani ZAX. ZAY. Una simile scomposizione eseguire si debbe sull'altre forze. I momenti che si trovano sul piano ZAX si riducono ad un solo sommandoli; dunque chiamandolo L si avrà

$$L = Px + P'x' + P''x'' + \&c$$

così per il piano ZAY si avrà

$$M = Py + P'y' + P''y'' + \&c$$

I due momenti L, M sono posti in due piani che si tagliano, e però si riducono ad un momento solo. Per l'equilibrio questo deve essere zero; ma si è dimostrato che non può ciò essere se non sono zero i due momenti componenti da sè, e posto G questo momento risultante, se debba essere G = 0, sarà L = 0, M = 0. Per l'equilibrio adunque delle forze parallele e situate nello spazio, oltre la (1) debbono aver luogo le

(8) $Px + P'x' + P''x'' + \&c = \Sigma Px = 0$

(9) $Py + P'y' + P''y'' + \&c = \Sigma Py = 0$

Dunque per l'equilibrio delle forze parallele poste comunque nello spazio sono necessarie 3 condizioni, cioè che la somma delle forze tutte sia nulla, e somma dei momenti delle forze rispetto a due piani paralleli alle loro direzioni sia nulla da se.

§. 78. Supponiamo che le forze P, P', P'' &c non sieno in equilibrio ma che abbiano una risultante R, e quindi vi abbia una forza capace di equilibrarle −R, e le (1) (8) (9) dovranno sussistere dopo l'introduzione di essa, così che dette p, q le distanze di essa dai piani ZAY, ZAX si avrà

(5) $R, = P + P' + P'' + \&c = \Sigma P.$

(10) $R, p = Px + P'x' + P''x'' + \&c = \Sigma Px$

(12) $R, q = Py + P'y' + P''y'' \&c$ ovvero

$$\frac{Py + P'y' + P''y'' + \&c}{P + P' + P'' + \&c} = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}$$

(11) $p = \frac{Px + P'x' + \&c}{P + P' + \&c} = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}.$

(13) $q = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}$ che sono le distanze della forza dai piani paralleli le quali fanno conoscere la precisa distanza da' due piani della forza risultante R, cioè la sua posizione precisa mentre

è l'intersecazione di due piani condotti per l'estremità loro. Anche qui non deve essere la risultante =

Lezione 30. §. 79. Dalle trovate equazioni (11) (12) conseguita, che la somma dei momenti di quante si vogliano forze parallele ~~costituite~~ relativi ad un piano parallello alle (a) la distanza poi della risultante da questo piano eguaglia X

(a) forze, uguaglia il momento della risultante al piano medesimo —

§. 80. Sieno P, P', P'' ... le forze parallele che agiscono sul sistema. Se esse ruotino intorno ai loro punti di applicazione rimanendo però parallele, la risultante R, di queste forze ruoterà pure intorno al suo punto d'applicazione rimanendo invariato il suo punto d'applicazione il che è conforme al detto addietro, e questo punto si dice centro delle forze parallele. Esso è dunque sulla direzione della risultante e però dividendo la somma de' momenti delle forze parallele per la somma delle forze paralelle Σ, s'avrà la distanza del centro da un piano qualunque, si figuri che le forze

(85.) ruotino intorno ai loro punti d'applicazione finchè divenghino parallele all'anzidetto piano ⟶

→ ed in tal caso se la somma dei momenti relativi a questo piano si divida per la somma delle forze, si avrà la distanza del punto da questo piano. Così far debbesi per un terzo piano. Figurando ora tre piani paralleli ai primi, e condotti per gli estremi di queste distanze, il centro delle forze parallele dovrà trovarsi nello stesso tempo sopra i tre piani e però sarà nella loro comune intersecazione.

§. 81. Se abbiasi $P = P' = P'' = $ ec. $= P^{(n)}$ cioè se tutte le forze siano uguali tra di loro: dalla equazione (11) si avrà

$$p = \frac{P(x + x' + x'' + \text{ec.} + x^{(n-1)})}{nP},$$

dunque avremo la

(12) $$p = \frac{x + x' + x'' + \text{ec.} + x^{(n-1)}}{n} = \frac{\Sigma x}{n};$$

il che mostra, essere la distanza del centro delle forze parallele da un piano, eguale alla somma delle loro distanze dei punti d'applicazione dal piano diviso pel N.° delle forze. Laonde nel caso delle forze parallele uguali il loro centro non dipende che dalla →

trovare la distanza del centro dal piano

(a) applicaz.e delle forze stesse — figura formata da punti di (a)

§. 82. Appresso di si dettato §. 80 è chiaro che la somma dei momenti rispetto ad un piano qualunque di quante forze si voglia, eguaglia il momento della risultante allorchè esse ha luogo. (Fig. 26) sieno i piani ZAY, ZAX e YAX e sia (x) z, z', z'' la distanza dei punti delle forze dal piano YAX; e si avranno le equazioni

(x) R_1 la risultante di quante forze si vogliano

(10) $R_1 p = Px + P'x' + P''x'' +$ ec.

(11) $R_1 q = Py + P'y' + P''y'' +$ ec.

(15) $R_1 r_1 = Pz + P'z' + P''z'' +$ ec.

Se i tre piani sono ortogonali x, y, z, x', y', z' sono le coord.e dei punti d'applicaz.e delle forze. Le equazioni (10) (11) (15) non solo hanno luogo quando R_1 è risultante unica delle P, P', P'', ec. ma eziandio quando esse si riducono ad un minor numero. Supponiamo che S, S', S'' ec. siano le forze delle quali la somma equivalga alla somma delle P, P' ec.

e siano, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ &c le distanze dei punti d'applicazione delle S, S', S'' dai tre piani, e si avrà

(16) $\alpha S + \alpha' S' + \alpha'' S'' + \&c = Px + P'x' + P''x'' + \&c$

(17) $\beta S + \beta' S' + \beta'' S'' + \&c = Py + P'y' + P''y'' + \&c$

(18) $\gamma S + \gamma' S' + \gamma'' S'' + \&c = Pz + P'z' + P''z'' + \&c$

Queste equazioni si adattano al caso in cui le P, P', P'' &c non hanno risultante unica.

§. 83. Essendo gli assi coordinati ortogonali, presentiamo per D la distanza del centro delle forze parallele da un punto qualunque e preso per origine

(19) si avrà $D^2 = p^2 + q^2 + r^2$; dunque sostituendo a vece di p, q, r i valori trovati dalle (9) (10) (11) si avrà

$$D^2 = \frac{(Px + P'x' + \&c)^2 + (Py + P'y' + \&c)^2 + (Pz + P'z' + \&c)^2}{(P + P' + P'' + \&c)^2};$$ ma

$(Px + P'x' + \&c)^2 = (P + P' + \&c) \cdot (Px^2 + P'x'^2 + \&c) - (P.P'(x'-x)^2 + P.P''(x''-x)^2 + P'P''(x''-x')^2 \&c)$

Similmente si avrà le

$(Py + P'y' + P''y'' + \&c)^2 = (P + P' + P'' \&c)$
$(Pz^2 + P'z'^2 + P''z''^2 + \&c) - (PP'(y'-y)^2 + \&c)$
e così una terza equazione
mettendo z.
$(Pz + P'z' + P''z'' + \&c)^2 = (P + P' + P'' \&c)$
$(Pz^2 + P'z'^2 + P''z''^2 + \&c) - (PP'(z'-z)^2 + PP''(z''-z)^2 + \&c)$ avremo dunque
la

(20) $D^2 = ((P + P' + \&c)(P(x^2 + y^2 + z^2) + P'(x'^2 + y'^2 + z'^2) + P''(x''^2 + y''^2 + z''^2) \&c$
$- P.P'((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2)$
$- P.P''((x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2)$
$- P'P''((x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2)$
$- - - - - - - - - - - -) :$
$(P + P' + P'' + - - \&c)^2$ ma
rappresentando per d, d',
d'' &c — le distanze dei
punti d'applicazione
dall'origine delle coord.
ortogonali avrem.
$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$,
$d'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$,
$d''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$,

Se presenteremo per
$\delta, \delta', \delta''$ &c le distanze
rispettive fra i punti
d'applicaz. delle forze
si avrà
$\delta^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$,
$\delta'^2 = (x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2$

$$\delta''^2 = (x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2$$

Sostituiti nella (20) avremo

(21) $$D^2 = \frac{Pd^2 + P'd'^2 + P''d''^2 + \&c}{P + P' + P'' + \&c} - \frac{P.P'\delta^2 + P.P''\delta'^2 + \&c}{(P+P'+P''+\&c)^2}$$

$$= \frac{\Sigma Pd^2}{\Sigma P} - \frac{\Sigma PP'\delta^2}{(\Sigma P)^2}$$

Mediante la quale si determina la distanza del centro delle forze parallele da un punto qualunque in funzione delle distanze &c

90.)

(91.)

(92.)

93.)

5.)

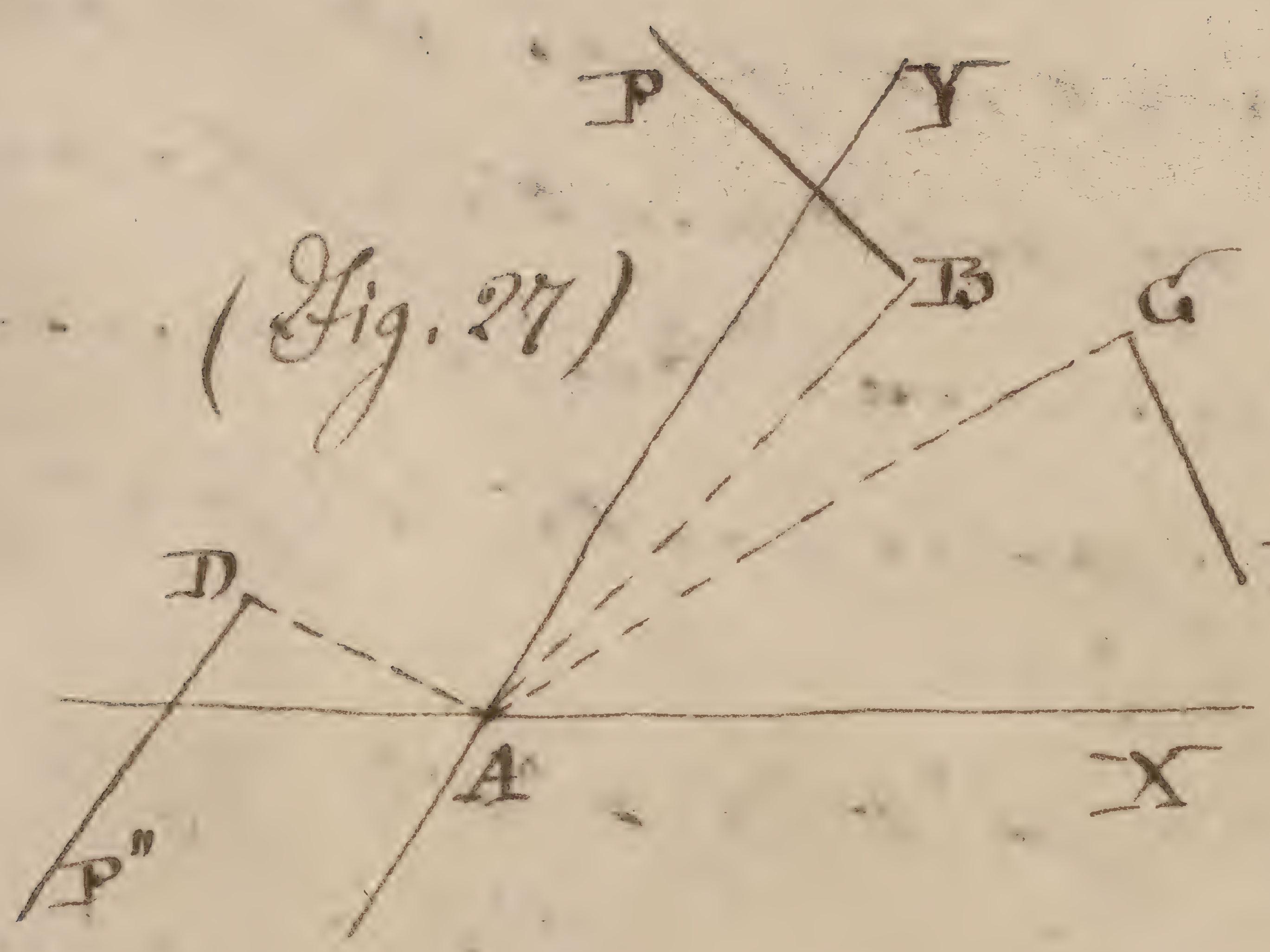
Capitolo VIII°.

Delle condizioni d'equilibrio delle forze situate comunque nello spazio

§. 84. Supponiamo primieramente che le forze sieno comunque poste su di un piano. ——

Sieno le P, P', P'' ---- ec: da un punto qualunque A (fig. 27) preso ad arbitrio sul piano delle forze, si conducano sulle loro direzioni le perpendicolari AB, AG, AD ec e supponiamo che i punti d'incontro di esse sieno in B, G, D -- ec.

Poniamo $AB = p$, $AG = p'$, $AD = p''$, ------ egli è chiaro che alla P applicata in B, se ne può sostituire un'altra a lei parallela ed uguale che sia applicata in A purchè s'introduca una coppia, il cui momento sarà $AB.P = p.P$: così la P' può essere surrogata da una a lei uguale applicata in A e da una coppia il cui momento sarà $AG.P' = p'.P'$



(Fig. 27)

così è per l'altra forza. Dunque per l'equilibrio è necessario che la risultante di tutte le forze applicate in A sia nullo, e che il momento risultante dai momenti pP, $p'P'$, $p''P''$ &c sia nullo da se stesso. Le coppie sono tutte sullo stesso piano, e però il momento risultante sarà la somma dei momenti componenti; e però si avrà

(1.) $pP + p'P' + p''P'' \ \&c = \Sigma\, pP = 0.$ Per esprimere l'altra condizione, figuriamo che ciascuna delle P, P', P'' che è applicata in A si componga in 2. secondo la direzione di due assi qualunque AX, AY che si tagliano in A e siano situati sul piano delle forze.

Siano X, Y le componenti della P dirette secondo gli assi delle x, delle y: così X', Y' le componenti di P', X'', Y'' le componenti della P''

95.

Tutte le forze che agiscono lungo l'asse delle X hanno per risultante la loro somma, dunque, se chiameremo X_1 la somma loro si avrà

(2) $X_1 = X + X' + X'' + \&c.$ così tutte le forze che agiscono lungo l'asse delle Y posse Y_1 si avrà

(3) $Y_1 = Y + Y' + Y'' + \&c$: queste due risultanti s'incontrano in A, e possa R la loro risultante, per l'equilibrio, oltre la (1) dovrà aver luogo la

$R = 0$; ma le due risultanti X_1, Y_1 si tagliano, e però non possono avere risultante zero se non sono zero da se, dunque oltre la (1) avremo le equazioni

(4) $X_1 = X + X' + X'' + \&c = \Sigma X = 0$

(5) $Y_1 = Y + Y' + Y'' + \&c = \Sigma Y = 0$;

dunque in questo caso per l'equilibrio vi vogliono tre condizioni.

Le forze P, P', P'' ec. applicate in A essendo eguali alle P, P' ec. applicate ai loro punti d'appl.^{ne} è chiaro che le X', Y', X'', Y'' ec. sono le stesse in quantità di quelle che

otterrebbero scomponendoli ai punti loro d'applicaz.e

Per la qual cosa le condi: d'equilibrio per le forze situate su di un piano, sono

1.° Che le somme delle componenti di esse forze scomposte rispetto a 2. assi sia nulla.

2.° Che la somma dei momenti delle forze rispetto ad un punto sul piano sia nullo da se.

§.85. Se questa ultima condizione abbia luogo per un certo punto sul piano delle forze, e che la prima condizione abbia altresì luogo rispetto alla direzione di certi assi situati sul piano delle forze e che si possono figurare condotti per esso punto v'avrà equilibrio.

Ma se v'ha equilibrio ciò deve essere per un punto ed assi qualunque.

§.86. Se le forze P, P', P'' siano in equilibrio una di loro essa debbe risultante delle altre. Supponiamo che

sia la P. di conseguenza che la −P farà equilibrio al sistema. Introducendo adunque la −P vi avrà equilibrio e perciò sussisterà la

$-pP + p'P' + p''P'' \&c = 0$ dunque

(6) $pP = p'P' + p''P'' + \&c$

Risulta quindi, che il momento della risultante riguardo ad un punto qualunque eguaglia la somma dei momenti delle componenti relativi al punto stesso, e q.to punto nomasi centro dei momenti.

Se le P, P', P'', &c abbiano una risultante unica R. e sia r_1 la perpend. che dal punto si conduce su di essa, si avrà

(7) $r_1 R_1 = pP + p'P' + p''P'' \&c = \Sigma pP.$

Lezione 31

§.87. La (7.a) non solo è vera allorchè si può determinare la risultante di tutte le forze, ma altresì allorquando si riducono ad un numero minore

Si suppongano S, S', S'' – &c ed s, s', s'' – &c le forze e le perpend. abbassate dal centro dei momenti sopra le forze, e si

avrà la

(8.) $sS + s'S' + s''S'' + \&c = pP + p'P' + p''P'' + \&c$ analoga a quella trovata al §. 82.

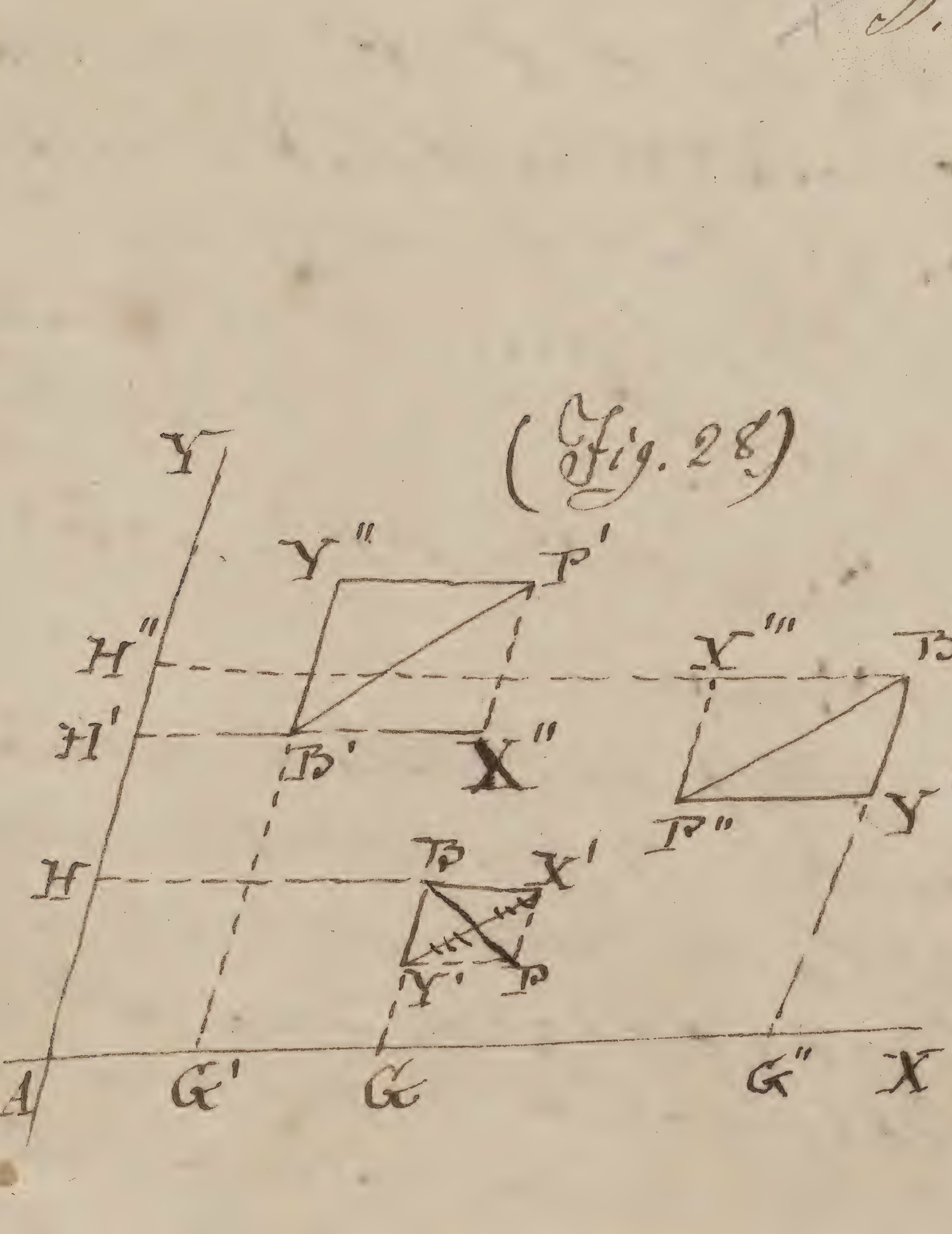
§. 88. Se il centro dei momenti sia sulla direzione della risultante che abbiamo chiamato R, allora $v_1 = 0$. ed in conseguenza la (7) si riduce alla

(1) $pP + p'P' + p''P'' + \&c = 0$.

Dunque, se il centro dei momenti si prenda sulla risultante R_1, la somma dei momenti relativi a questo punto di quante forze si vogliano situate sul medesimo piano, è sempre nulla.

§. 89. Nella (1) che mette davanti una cond. d'equilibrio delle forze situate su di un piano, è necessario distinguere i momenti delle coppie che agiscono per un verso dai momenti delle forze che agiscono per un altro verso affinchè si verifichi la (1) ma per chiarezza daremo un'altra forma alla (1). (si osservi la fig. 28)

(Fig. 28)



Siano B, B', B'' i punti ove le forze P, P', P'' sono applicate nel piano nelle

99.)

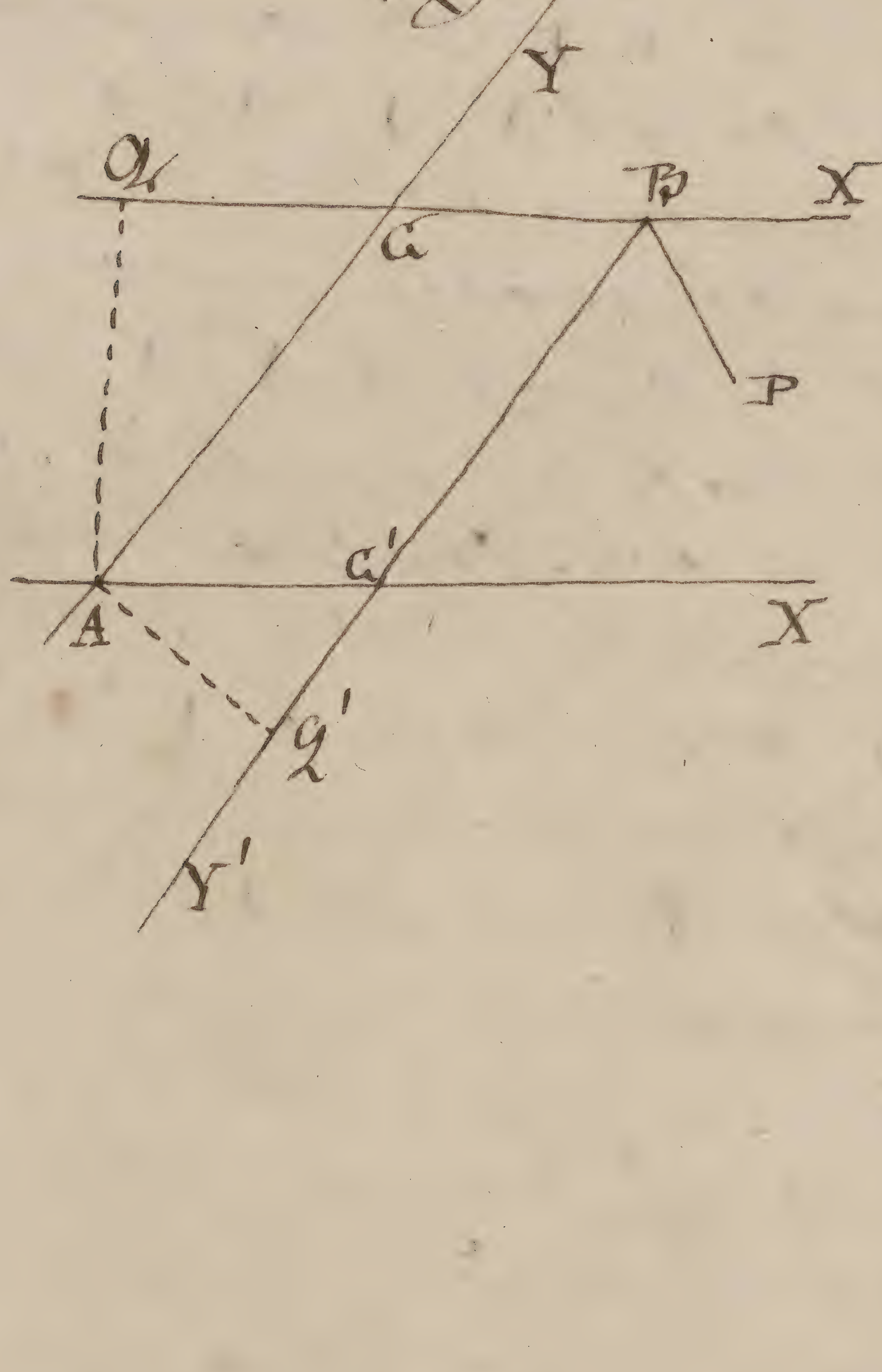
loro posiz.e primitiva. —
Sieno $AG = x$, $GB = y$,
$AG' = x'$, $G'B' = y'$
$AG'' = x''$, $G''B'' = y''$.
Immaginiamo ciascuna di queste forze composta in 2 rispettivamente parallele agli assi coordinati. — Sieno X, Y le componenti di P; così X', Y', X'', Y'' le componenti di P', P'' e queste saranno a vece di P, P', P''. Le X, X', X'' sono applicate ai punti B, B', B'' e si trasportino ad essere applicate in A e si faccia lo stesso delle Y, Y', Y'', introducendo delle coppie. Sì le X che le Y si compongono in una risultante che sarà la loro somma; le due risultanti si compongono in una che per la legge dell'equilibrio dev'esser nulla; ma ciò non può essere se da sé non sieno nulle le due risultanti, dunque converrà che sia

$$(4)\quad X + X' + X'' + ec. = \Sigma X = 0$$

$$(5)\quad Y + Y' + Y'' + ec. = \Sigma Y = 0,$$

È mestieri inoltre, per l'equilibrio, che la somma dei momenti delle coppie introdotte sia nulla da sé. Si osservi che l'asse AX fa con le dire-

(Fig. 29)



zioni delle X degli angoli che sono eguali a quelli che fa l'asse delle Y colle forze X. Le componenti della P parallele agli assi AX, AY, siano (fig. 29) $X = PX'$, $Y = BY'$. Da A si conducano sulle direzioni prolungate di queste componenti le AQ, AQ'. —

Fatto l'angolo $QGA = Q'G'A = \omega$ i 2 Δ.i rett.i AQG $AQ'G'$ ci danno $AQ = AG.\operatorname{sen}\omega$, $AQ' = AG'.\operatorname{sen}\omega$ ovvero $AQ = y\operatorname{sen}\omega$, $AQ' = x\operatorname{sen}\omega$. Passando da una forza all'altra ω è lo stesso, dunque relativam.e alle P' P'', si troverebbe similmente che le perpend.i sarebbero $y'\operatorname{sen}\omega$, $x'\operatorname{sen}\omega$ per P', $y''\operatorname{sen}\omega$, $x''\operatorname{sen}\omega$. —

Per l'equilibrio adunque dovrà essere

$$\operatorname{sen}\omega(y.X + y'X' + y''X'' + \dots + xY + x'Y' + x''Y'' + \text{ecc}) = 0,$$

ovvero la

(9) $$yX + y'X' + y''X'' + \dots + xY + x'Y' + x''Y'' + \text{ecc} = 0$$

che può tener la vece della prima. Si osservi che avendo delle p, p', p'', ecc abbassate di A sulle direzioni delle forze

101.)

contiene le coordinate dei punti d'applicaz.e delle forze.

I momenti yX, $y'X'$, $y''X''$, ec. — , xY, $x'Y'$, $x''Y''$, ec. — prenderanno da sè i segni che si affanno ai rispettivi versi delle coppie delle quali questi momenti rappresentano le energie perchè si diano alle ~~coppie ed alle~~ forze i segni adatti.

Le ascisse si si prendono positive alla destra di A alla sinistra saranno negative.

Prese le ordinate positive sopra X saranno negative se al disotto.

In quanto alle forze si dovrà darvi i segni secondo i loro versi secondo i quali agiscono. Così d.o la forza X' (fig 28) che agisce da B verso X', ed una Y che tira al basso. Poniamo $BH = x$, $AH = y$ abbiamo lo stesso segno. Trasportiamo la X' in H: dopo figurato che la AX sia trasportata in A parallellamente a sè stessa verrà produrre una coppia (X', −X')

che tenta di produrre un moto da sinistra a destra.

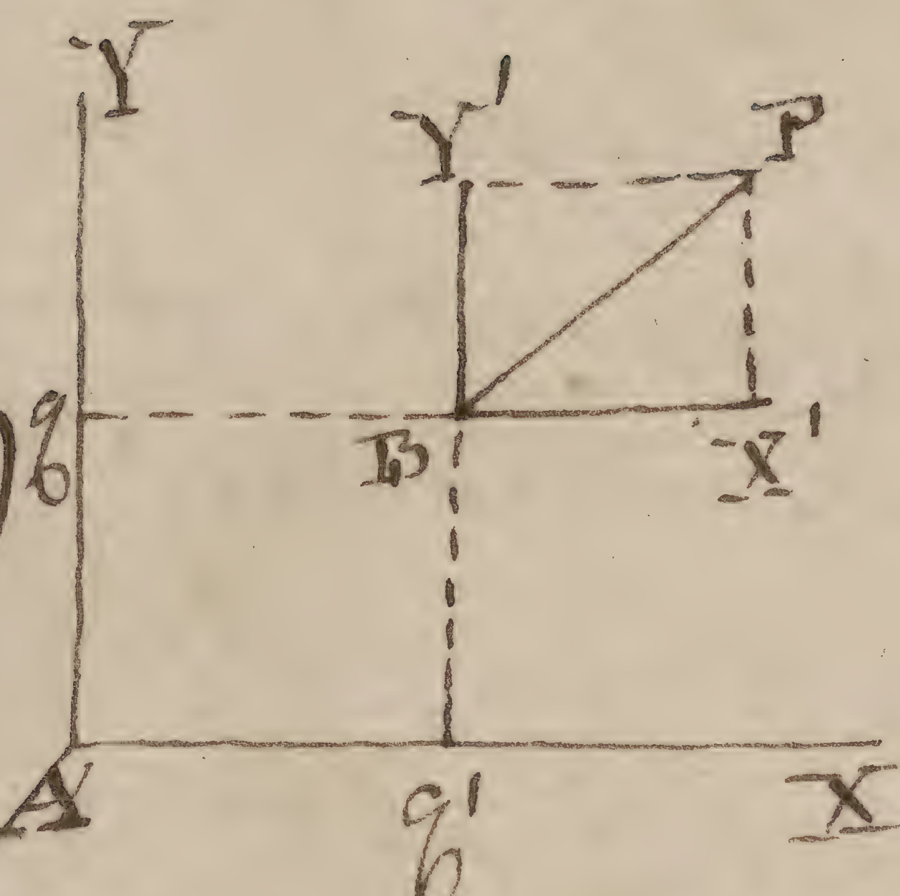
Similmente, il punto di applicazione B della Y' trasportare si può in C posto introducendo una coppia (Y', −Y') e poi trasportar in A che tenta di produrre un moto da sinistra a destra; dunque queste due coppie agiscono pel medesimo verso; bisogna dunque che tra le X, X', X'' quelle che tirano da sinistra a destra dell'asse delle ordinate abbiano il med.° segno di quelle delle Y che tirano dall'alto al basso e però se le 1.e positive tali anche queste.

N. 90. Ma se fra le forze P si abbiano per positive quelle che tirano dalla sinistra alla destra dell'asse Y, e si voglia egualmente considerare che siano positive quelle che tirano dal basso all'alto, allora si dovrà nella (9) cambiar segno ai termini che contengono Y, Y', Y'', e perciò a una

della (9) si avrà la

(10) $Xy - Yx + X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x''$ &c $= 0$. Dunque vuol dire che si ritengono positive le forze che tentano ad aumentare le coord.^{e}

§. 91. (Fig. 30). Se gli assi AX, AY sieno ortogonali, le ascisse e le ordinate diventano le braccia delle coppie, ed in allora i momenti yX, $y'X'$, $y''X''$, xY &c misurano la energia assoluta della coppia.



(Fig. 30)

Inoltre si ha

$X = P\theta P^\wedge X$
$X' = P'\theta P'^\wedge X$
$X'' = P''\theta P''^\wedge X$

$Y = P\theta P^\wedge Y$
$Y' = P'\theta P'^\wedge Y$
$Y'' = P''\theta P''^\wedge Y$

Dipendentemente da questi valori, le (4) (5) e (10) si cambiano nelle

(11) $P\theta P^\wedge X + P'\theta P'^\wedge X + P''\theta P''^\wedge X + \&c = \Sigma P\theta P^\wedge X = 0,$

(12) $P\theta P^\wedge Y + P'\theta P'^\wedge Y + P''\theta P''^\wedge Y + \&c = \Sigma P\theta P^\wedge Y = 0,$

(13) $P\theta P^\wedge X + P'\theta P'^\wedge X + P''\theta P''^\wedge X + \&c = \Sigma P\theta P^\wedge X = 0,$

(14) $P(y\theta P^\wedge X - x\theta P^\wedge Y) + P'(y'\theta P'^\wedge X - x'\theta P'^\wedge Y) + P''(y''\theta P''^\wedge X - x''\theta P''^\wedge Y)$ + &c

$= \Sigma P(y \theta P^{\wedge}X - x \theta P^{\wedge}Y) = 0$

ovvero

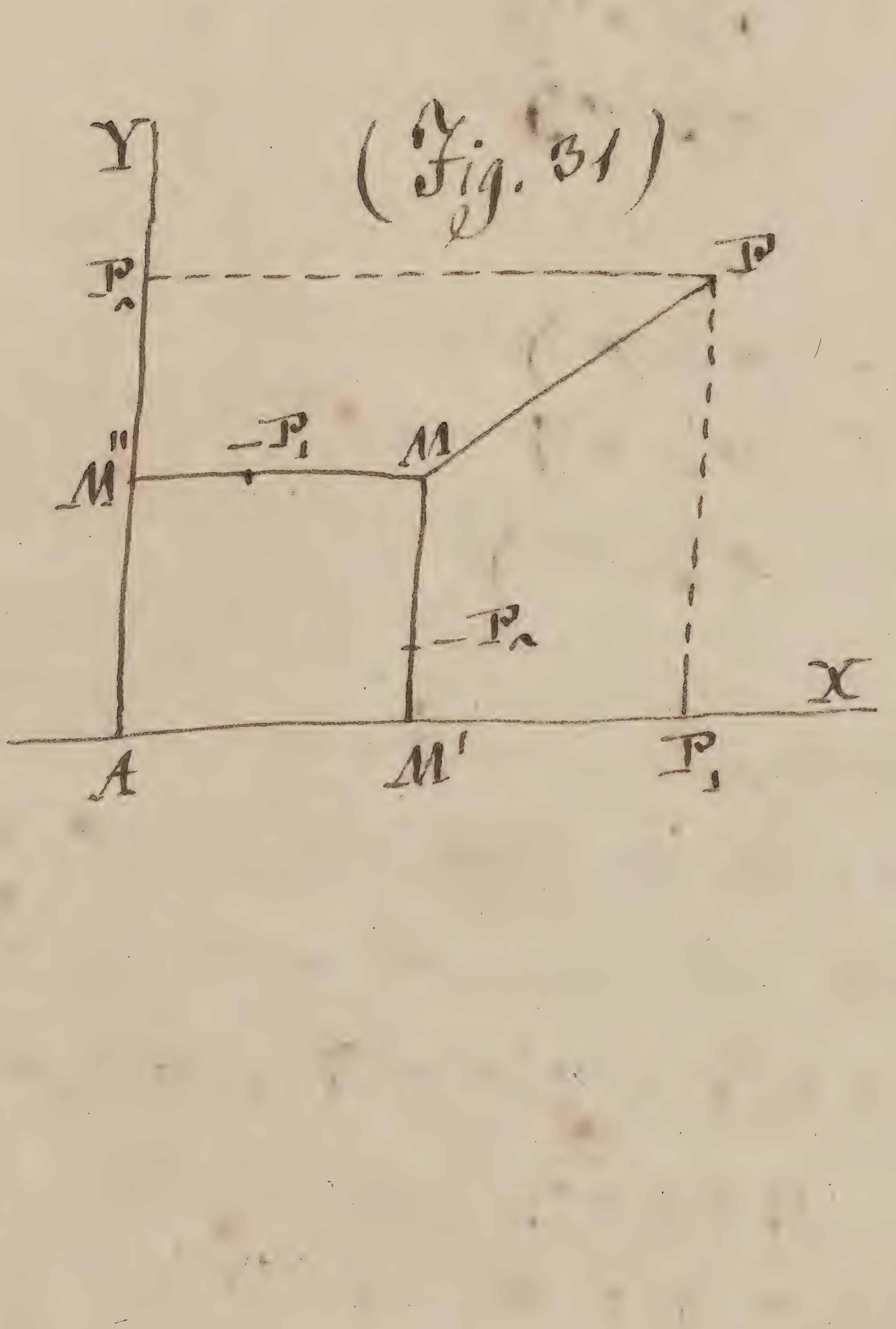
(15) $P(y \theta P^{\wedge}X - x \theta P^{\wedge}X) + P'(y' \theta P'^{\wedge}X - x' \theta P'^{\wedge}X) + P''(y'' \theta P''^{\wedge}X - x'' \theta P''^{\wedge}X) + ec. = \Sigma P(y \theta P^{\wedge}X - x \theta P^{\wedge}X) = 0.$

Le equazioni (11)(12)(13)(14)(15) contengono in simmetria i valori delle forze e gli angoli che fanno con una retta o con 2 di data posizione, e sotto questa ultima maniera si usa di porle appunto. Osservo che $P \theta P^{\wedge}X$ ed $P \theta P^{\wedge}Y$ sono le projezioni della forza PM sugli assi AX, AY. — (Fig. 31) Poniamo che sia

$P \theta P^{\wedge}X = P_1$,

$P \theta P^{\wedge}Y = P_2$ e le P_2M'' e $M'P_1$ saranno le projezioni sugli assi delle forza essendo MM', MM'' perpend. agli assi, e si avrà $MM' = M''A = y$, $MM'' = AM' = x$, ed $yP_1 = yP \theta P^{\wedge}X$ che sarà il momento della coppia $(P_1 - P_1)$, e $xP_2 = xP \theta P^{\wedge}Y$ è il mom. della coppia $(P_2 - P_2)$

(Fig. 31)



(105.)

Posto che l'azione della forza sia da M verso P, quella della P, sarà da M' verso P, e l'azione della P_n, da M'' verso P_n. Dal solo osservare la figura si vede che la direzione del moto che tende a produrre la coppia $(P_1 - P_1)$ è da destra a sinistra, e da sinistra a destra quello della $(P_n - P_n)$. — La differenza adunque $y P \theta P \hat{X} - x P \theta P \hat{Y}$ determinerà il movimento della coppia risultante.

§. 92. Supponiamo ora che non vi sia equilibrio fra le P, P', P'' etc. ma bensì abbia una risultante unica R,. Allora introducendo nelle equazioni (11) fino alle (15) la R, presa negativamente, dopo ciò avranno luogo le trovate equazioni e vi sarà equilibrio. Poniamo per brevità

(16) $P \theta P \hat{X} + P' \theta P' \hat{X} + P'' \theta P'' \hat{X} + \text{etc.} = X_1$

(17) $P \theta P \hat{Y} + P' \theta P' \hat{Y} + P'' \theta P'' \hat{Y} \text{ etc.} = Y_1$

(18) $P \theta P \hat{X} + P' \theta P' \hat{X} + P'' \theta P'' \hat{X} \text{ etc.} = Y_1$

(19) $P(y\,\theta P\hat{X} - x\,\theta P\hat{Y}) + P'(y'\theta P'\hat{X} - x'\theta P'\hat{Y}) + \&c = G_1$,

(20) $P(y\,\theta P\hat{X} - x\,\theta P\hat{X}) + P'(y'\theta P'\hat{X} - x'\theta P'\hat{X}) + \&c = G_1$: quindi avremo

(21) $X_1 - R_1\,\theta R_1\hat{X} = 0$,

(22) $Y_1 - R_1\,\theta R_1\hat{Y} = 0$

(23) $Y_1 - R_1\,\theta R_1\hat{X} = 0$

(24) $G_1 - R_1(Y_1\,\theta R_1\hat{X} - X_1\,\theta R_1\hat{Y}) = 0$

(25) $G_1 - R_1(Y_1\,\theta R_1\hat{X} - X_1\,\theta R_1\hat{X}) = 0$

essendo X_1, Y_1, le coord.e di un punto qualunque della direz.e $-R_1$.

Dalle (21)(22) si ha

$X_1^2 = R_1^2\,\theta^2 R_1\hat{X}$,

$Y_1^2 = R_1^2\,\theta^2 R_1\hat{X}$, e poi

$X_1^2 + Y_1^2 = R_1^2$ e quindi

(26) $R_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$

(27) $\theta R_1\hat{X} = \frac{X}{R_1}$

(28) $\theta R_1\hat{Y} = \theta R_1\hat{X} = \frac{Y_1}{R_1}$

La (25) poi diventa

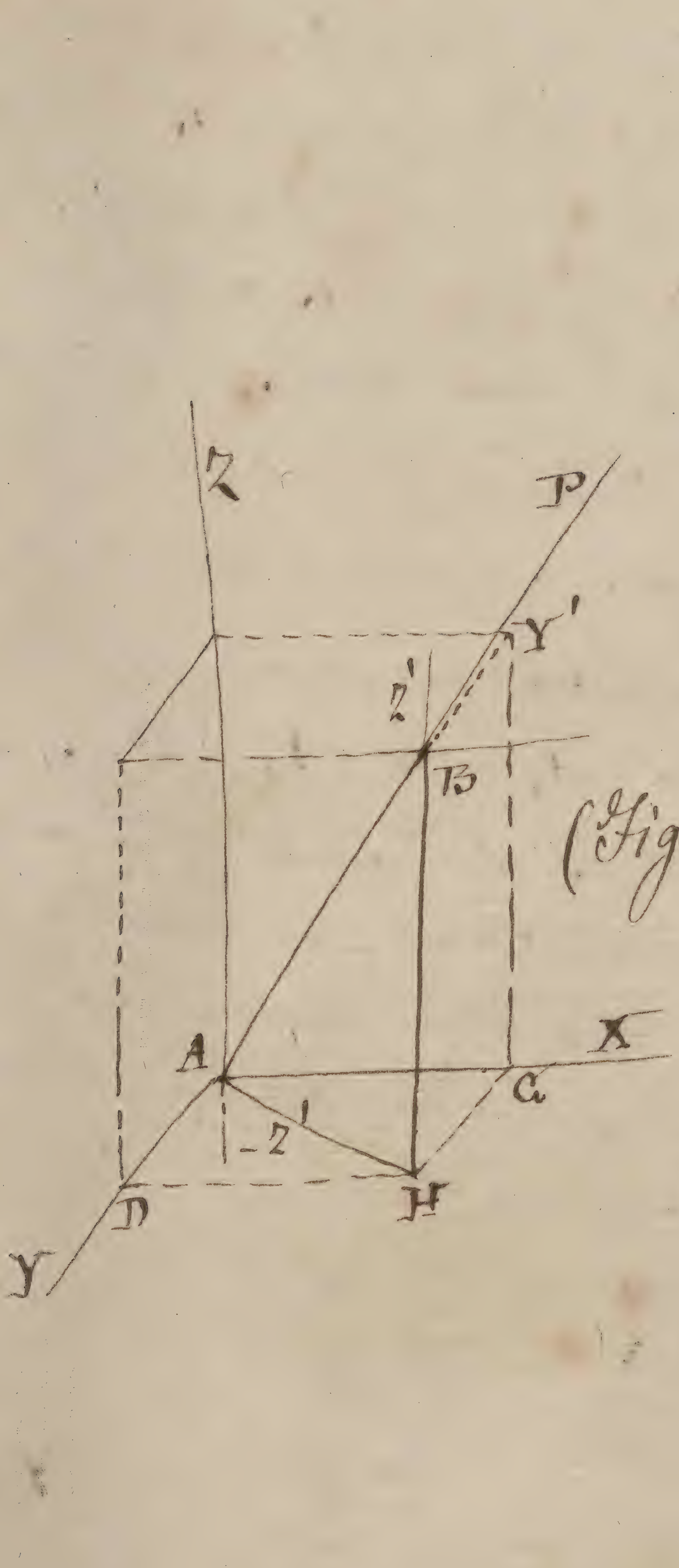
(29) $G_1 - y_1 X_1 + x_1 Y_1 = 0$, equaz.e della direz.e della risultante R.

Lezione 32.

§. 93. Quando si tratti delle forze parallele in un piano, nello spazio si è ved. che si riducono ad una forza e ad una coppia che è sullo stesso piano su parallelo.

Adunque se la risultante R non sia zero le forze avranno sempre risultante unica. Si è ancora veduto che le forze costituite in un piano si riducono ad una coppia e ad una forza che sono nello stesso piano, e che si potranno ridurre ad una forza unica se la risultante delle forze trasportate parallele a se stesse in un punto non sia zero. Ora per le forze nello spazio - - -

§. 94. Veniamo ora al caso generale cioè che le forze sieno situate comunque nello spazio e determiniamo le condizioni d'equilibrio. Siano le P, P', P'' ec. situate comunque nello spazio, e da un punto A (fig. 32) qualunque si protraggano tre assi AX, AY, AZ. Si scomponga ciascuna P, P' ec. in tre parallele agli assi e sieno X, Y, Z le componenti di P, così X', Y', Z' quelle di P', e così per P'' ec. Trasportiamo ciascuna di queste forze paral-



(Fig. 32)

lellamente a se stessa in A. Le forze X, X', X'' &c si compongono in una sola X, , e ciascuna di esse essendo sulla direzione AX, ne conseguita che X, = loro somma; così la somma delle Y, Y', Y'' &c sia Y, che ne farà la loro risultante, e così Z+Z'+Z'', &c = Z, . Dunque a vece di tutte le forze che sollecitano il sistema si hanno le tre X, , Y, , Z, applicate in A che si riducono ad una R; dunque per la condizione d'equilibrio dovrà essere R = 0. — Ma queste forze agiscono in diversi piani, dunque non possono avere risultante nulla, se non sia da X, = 0, Y, = 0. Z, = 0 come si è dimostrato §. 20 dunque fra le condizioni di equilibrio vi saranno le sopra scritte: ossia avranno luogo le:

(4) $X + X' + X'' + \&c = 0,$

(5) $Y + Y' + Y'' + \&c = 0,$

(30) $Z + Z' + Z'' + \&c = 0.$

109.)

Dunque la prima cond.e dell'equilibrio delle forze costituite nello spazio è che la somma delle forze scomposte parallelamente a ciascuno dei tre assi sia nulla da sè. Questa cond.e ci dice che non vi potrà esser moto nelle direzioni dei tre assi. Un' altra cond.e si è che la risultante delle coppie sia zero. ———

Sia B il punto d'applicaz.e della forza P, fig. stessa e B sarà il punto d'applicazione delle componenti parallele agli assi in cui essa si scompone. Sia
$X = AG$,
$Y = HG = AD$,
$Z = BH$; Similmente poniamo, che X', Y', Z' siano le coord.e del punto d'applicazione della P', e così di seg.
La Z applicata in B si trasporti in A parallelamente a se stessa, e si avrà la forza Z, e la coppia $(Z, -Z)$ che ha per braccio AB. Prolungata la direz.e di Z finchè incontri in H il piano XY, adesso si setti:

considerare applicata la forza Z: esso poi è un punto della diagonale AH del parallelogrammo i cui lati sono AC, AD; dunque pel dimostrato al §. 57 si può scomporre la $(Z, -Z)$ in 2 di forze eguali e parallele alle prime che abbiano per bracci questi lati, ed esistenti nei piani (X, Z) (Y, Z). ——— Si eseguisca una simile scomposiz. procedente da Z', Z'' ecc nei medesimi piani (X, Z), (Y, Z). Nella stessa maniera si deve agire sulle forze X, X', X'', ecc Y, Y', Y'' ecc relativamente ai piani ai quali esse sono parallele e si avranno così delle coppie esistenti nei tre piani coordinati, ~~di ogni~~ e per ciascun piano si potranno avere le risultanti, e così si avranno tre coppie esistenti nei tre piani; ma per la condiz.e di equilibrio la risultante delle coppie esser deve nulla e ciò non può essere

(111.)

-l. 6ℓ se non lo fiero cia-
scuna di esse, dunque la
somma dei momenti delle
coppie di ciascun piano
sarà zero. ___
Nel piano (Y, Z) esistono
le coppie $(Z_{,} - Z)$, $(Z'_{,} - Z')$
$(Z''_{,} - Z'')$ --- &c e le corri-
spondenti braccia sono
le ordinate Y, Y', Y'' &c; i
su esso esistono pure
le $(Y_{,} - Y)$ $(Y'_{,} - Y')$ $(Y''_{,} - Y'')$ &c
e le corrispondenti brac-
cia saranno z, z', z'' &c;
ma l'asse AY fa colle
z, z', z'' &c degli angoli
uguali tra se, ed a ques-
te che fa l'asse AZ colle
direzioni delle forze Y;
dunque, ai momenti delle
coppie si possono sostitu-
re i momenti obbliqui,
che saranno $Yz, Y'z', Y''z''$ &c
$zY, z'Y', z''Y''$ &c; ma la som-
ma di tali momenti esser
debbe nulla, dunque ri-
tenendo positive quelle che
tendono ad aumentare
Y, Y', Y'' &c, z, z', z'' &c, avuen-
do rispetto al detto § 90 si
avrà l'equazione

(31) $zY + z'Y' + z''Y'' + \&c - Yz - Y'z' - Y''z'' \&c$
= o

ovvero

(32) $\Sigma yZ = \Sigma zY$; similmente, pei piani (X, Z), (X, Y) avremo le

(33) $xZ + x'Z' + x''Z'' + \text{ec.} - zX - z'X' - z''X'' - \text{ec.} = 0$, dalla quale la

(34) $\Sigma zX = \Sigma xZ$,

(35) $yX + y'X' + y''X'' + \text{ec.} - xY - x'Y' - x''Y'' - \text{ec.} = 0$, da cui

(36) $\Sigma yX = \Sigma xY$. Che sono le tre condizioni d'equilibrio che unite alle altre tre danno le condizioni d'equilibrio delle forze nello spazio. I segni delle coordinate prender si debbono come per la geomet. a tre coord. e per le forze come si disse. Si osservi che le forze X, X', X'' e Y, Y', Y'' e Z, Z', Z'' sono rispett. parallele agli assi AX, AY AZ e perciò le (32)(34) e (36) ci dicono che la somma delle forze parallelle ai 3 assi moltiplicate recip. per le coord. dei loro punti d'appl.^e relativi ai med. assi deve essere nulla. Quando le su trovate equazioni hanno luogo vi sarà equilibrio e ciò per qualunque siano gli assi—

(113.)

§. 95. Se gli assi AX, AY, AZ, sieno ortogonali, i prodotti θZ, delle (31), (33), (35) saranno i valori assoluti delle coppie (X, −X), (Y, −Y), (Z, −Z) ec. come al §. 66. Inoltre le componenti della P relativam.^e agli assi detti X, Y, Z che sono X', Y', Z' ec. saranno

$X = P\theta P\hat{}X$,

$Y = P\theta P\hat{}Y$,

$Z = P\theta P\hat{}Z$; simili espressioni si avrebbero per le P', P'' ec. laonde, se nelle (4), (5), (30), (31), (33), (35), metteremo questi valori troveremo le seguenti equazioni:

(37) $P\theta P\hat{}X + P'\theta P'\hat{}X + P''\theta P''\hat{}X$ ec. $= \Sigma: P\theta P\hat{}X = 0$,

(38) $P\theta P\hat{}Y + P'\theta P'\hat{}Y + P''\theta P''\hat{}Y$ ec. $= \Sigma: P\theta P\hat{}Y = 0$,

(39) $P\theta P\hat{}Z + P'\theta P'\hat{}Z + P''\theta P''\hat{}Z$ ec. $= \Sigma: P\theta P\hat{}Z = 0$,

(40) $P(Z\theta P\hat{}Y - Y\theta P\hat{}Z) + P'(Z'\theta P'\hat{}Y - Y'\theta P'\hat{}Z) + P''(Z''\theta P''\hat{}Y - Y''\theta P''\hat{}Z) +$ ec. $= \Sigma: P(Z\theta P\hat{}Y - Y\theta P\hat{}Z) = 0$,

(41) $P(X\theta P\hat{}Z - Z\theta P\hat{}X) + P'(X'\theta P'\hat{}Z - Z'\theta P'\hat{}X) + P''(X''\theta P''\hat{}Z - Z''\theta P''\hat{}X)$ ec. $= \Sigma: P(X\theta P\hat{}Z - Z\theta P\hat{}X) = 0$.

(c2) $P(Y\cos P^\wedge X - X\cos P^\wedge Y) + P'(Y'\cos P'^\wedge X - X'\cos P'^\wedge Y) + P''(Y''\cos P''^\wedge X - X''\cos P''^\wedge Y) + \&c = \Sigma P(Y\cos P^\wedge X - X\cos P^\wedge Y) = 0$. Sotto questa forma, soglionsi rappresentare le condiz. d'equilibrio. Esse contengono le P, P', P'', le coord.e ~~rettangole~~ ortogonali de' loro punti d'applicaz. e le direzioni loro date dai coseni degli angoli che esse fanno cogli assi coordinati.

Sia la forza P (fig. 33) rapp.ta da PB: da P e B si conducano le Pp, Bb perpendicolari all'asse AY, e protraendo inoltre le Pq, Bd parallele all'asse AZ, saranno le bp, qd le projezioni della forza su i due assi. Siano p, q queste due projezioni, e si avrà

$p = P\cos P^\wedge Y$

$q = P\cos P^\wedge Z$. Si consideri la p applicata in A, e sarà $pz = zP\cos P^\wedge Y$ l'energia della coppia $(p, -p)$ il cui braccio è $z = Ad$; similmente considerata la q applicata in A si avrà che $yq = yP\cos P^\wedge Z$ sarà l'energia della $(q, -q)$ il cui braccio è $y = AN$.

(115.)

queste due coppie tendono a produrre un moto di rotazione intorno all'asse AX, ma in direzioni opposte; dunque la (60) ci dice che non può esservi moto di rotazione intorno ad AX; la stessa cosa si dice per gli altri assi, il che ci vien detto dalle (61), (62).

La contemporanea esistenza delle (60) (61) (62) ci dice che non può esservi moto alcuno intorno ai tre assi coordinati.

Le (37) (38) (39) ci dicono poi che non può esservi moto lungo i tre assi coordinati, e però il sistema sarà in equilibrio.

Risulta ancora che fatte le combinazioni 2 a 2 degli assi coordinati, la somma delle energie delle coppie formate da ciascuna projezione della forza sopra l'asse della combinaz. e che hanno per braccio la coordinata della forza projettata relativamente all'altro asse essere dee nulla per ciascuna delle tre combinazioni due a 2 dei tre assi coordinati avendo riguardo ai segni.

§. 96. Alle (60) (61) e (62) dare si può una forma più semplice introducendo a vece delle coordinate dei punti d'applicaz.e delle forze P, P', P'' &c. le più corte distanze delle direzioni di esse forze dai tre assi coordinati.

Difatti, le due forze $P\cos P\hat{\ }Y$ e $P\cos P\hat{\ }Z$ che sono le projezioni della forza P sugli assi delle Y e delle Z giacciono ~~rispettivamente~~ nel piano (Y, Z) e i loro momenti sono $zP\cos P\hat{\ }Y$, $yP\cos P\hat{\ }Z$ sono presi rispetto all'origine A (fig. 37) ove il piano (Y, Z) taglia l'asse delle X onde inoltre di $P(z\cos P\hat{\ }Y - y\cos P\hat{\ }Z)$ che è la somma dei momenti delle forze $P\cos P\hat{\ }Y$, $P\cos P\hat{\ }Z$, rispetto al punto ove il loro piano taglia l'asse AX, sostituendo ~~sostituire~~ si può il ~~mom~~ la risultante delle due forze fra loro perpend.i e perciò si ha

(63) $R^2 = P^2\theta^2 P\hat{\ }X + P^2\theta^2 P\hat{\ }Z = P^2(\theta^2 P\hat{\ }X + \theta^2 P\hat{\ }Z)$; ma $\theta^2 P\hat{\ }X + \theta^2 P\hat{\ }Y + \theta^2 P\hat{\ }Z = 1$, dunque $1 - \theta^2 P\hat{\ }X = \theta^2 P\hat{\ }Y + \theta^2 P\hat{\ }Z = \theta^2 P\hat{\ }X$, d'onde

(64) $R^2 = P^2\theta^2 P\hat{\ }X$.

Lezione 33

(117.)

che p la perpendicolare che da
A si proverà su R e il mo-
mento di qsta forza sarà
$pPOP\hat{X}$: la forza $POP\hat{X}$
giace nel piano (y,z) poi-
chè la risultante giace
sul piano delle componen-
ti e perciò la sua direzione
taglia perpendicolarmen-
te l'asse AX, e di conseguen-
za p è la più corta dist. della direzio-
ne dall'asse delle x della
direzione della forza $POP\hat{X}$
quindi nella (60) metteremo
si può $pPOP\hat{X}$, così altri termini si pone
invece degli $p'P'OP'\hat{X}$, $p''P''OP''\hat{X}$
rappresentando p', p'', p''' le
le più piccole distanze
dall'asse delle x e
per la qual cosa la (60)
verrà surrogata dalla
(68) $pPOP\hat{X} + p'P'OP'\hat{X} + ec =$
$\Sigma pPOP\hat{X} = 0$; ma l'angolo
che fa $P\hat{X}$ è complemento
di quello che fa P col piano
(y,z), dunque avremo
$\theta P\hat{X} = \theta P\hat{}(y,z)$ di conseg.a
$PO P\hat{X} = P\theta P\hat{}(y,z)$ che è la
projezione della forza P
sul piano (y,z); ma la
più corta distanza della
forza P sul piano (y,z)
dall'asse $A\hat{X}$ è pure la
più corta distanza della
obbliqua P dall'asse med.o

Dunque per rapp.to la più corta distanza delle direz.ni di P dall'asse AX. Presentando per q, q', q'' — e r, r', r'' le rispettive più corte distanze delle P, P', P'' — dagli altri due assi rispett.te AY, AZ, la (45) e la (42) verranno surrogate dalle

(46) $qP\cos P\hat{Y} + q'P'\cos P'\hat{Y} + \ldots =$
$\Sigma qP\cos P\hat{Y} = 0,$

(47) $rP\cos P\hat{Z} + r'P'\cos P'\hat{Y} + \ldots =$
$\Sigma rP\cos P\hat{Z} = 0.$

La projezione di una forza sopra un piano moltiplicata per la distanza di essa dall'asse chiamasi momento della projez.e della forza rispetto all'asse, e quindi le (45) (46) (47) ci dicono che somma dei momenti delle projezioni rispetto a tre assi ortogonali esser debbe nulla.

§. 97. Se la forza P presentata da PB diretta da P verso B si scompone in due PN parallella al piano (y, x) e PM parallella al (y, z) e perciò perpend.e ad AX

(fig. 34)

si avrà
$PM = POP'X = q$. Se con questa si formerà una coppia avente per braccio la più piccola distanza della direzione della forza dall' asse AX si avrà che
$p.POP'X = pq$ rappresenterà l'energia della coppia. Similmente dette q', q'', q''' &c si avranno le energie $p'q', p''q'', p'''q'''$ &c le quali si possono trasportare sul piano (y,z) e per l'equilibrio si avrà la
(48) $pq + p'q' + p''q'' + \&c = \Sigma pq = 0$
Se S, S', S'' siano le componenti di P, P' &c parallele al piano (x,z) e T, T', T'' &c componenti parallele al piano (x,y) si avranno le infrascritte equazioni simili alla (48) ciò sono
(49) $qS + q'S' + q''S'' + \&c = \Sigma qS = 0$
(50) $rT + r'T' + r''T'' + \&c = \Sigma rT = 0$
§. 98: Poniamo ora che le forze P, P', P'' &c non siano in equilibrio, e supponiamo che abbiano una risultante unica R_1; se si sostituisca una forza eguale ed opposta $-R$, si avrà equilibrio.

Poniamo $\Sigma F\theta F^{\wedge}X = X_1$

$\Sigma F\theta F^{\wedge}Y = Y_1$

$\Sigma F\theta F^{\wedge}Z = Z_1$

$\Sigma F(z\theta F^{\wedge}Y - y\theta F^{\wedge}Z) = L_1$

$\Sigma F(x\theta F^{\wedge}Z - z\theta F^{\wedge}X) = M_1$

$\Sigma F(y\theta F^{\wedge}X - x\theta F^{\wedge}Y) = N_1$

poichè dopo l'introduzione della forza $-R_1$ le (37), (38) (39) (40) (41) (42), devono sussistere, si avranno le infrascritte equazioni

(51) $X_1 - R_1\theta R_1^{\wedge}X = 0$,

(52) $Y_1 - R_1\theta R_1^{\wedge}Y = 0$,

(53) $Z_1 - R_1\theta R_1^{\wedge}Z = 0$,

(54) $L_1 - R_1(z_1\theta R_1^{\wedge}Y - y_1\theta R_1^{\wedge}Z) = 0$

(55) $M_1 - R_1(x_1\theta R_1^{\wedge}Z - z_1\theta R_1^{\wedge}X) = 0$

(56) $N_1 - R_1(y_1\theta R_1^{\wedge}X - x_1\theta R_1^{\wedge}Y) = 0$

ove x_1, y_1, z_1, sono le coord. di un punto qualunque della risultante R_1.

Dalle (51) (52) (53) si deducono le

(57) $R_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$

(58) $\theta R_1^{\wedge}X = \dfrac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}$

(59) $\theta R_1^{\wedge}Y = \dfrac{Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}$

(60) $\theta R_1^{\wedge}Z = \dfrac{Z_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}$ ricordando dopo che si ha

(61) $\theta^2 R_1^{\wedge}X + \theta^2 R_1^{\wedge}Y + \theta^2 R_1^{\wedge}Z = 1$

Dipend.° dalle (51) (52) e (53) le (54) (55) e (56) danno

(62) $L_1 - z_1 Y_1 + y_1 Z_1 = 0$,

(63) $M - x_1 Z_1 + z_1 X_1 = 0$,

(64) $N - y_1 X_1 + x_1 Y_1 = 0$. Moltiplicato le (62) (63) e (64) rispett.te per X_1, Y_1, Z_1 e sommati i prodotti levando i termini che si elidono si avrà:

(65) $L_1 X_1 + M Y_1 + N Z_1 = 0$, che non contiene y_1, z_1, x_1, e mette davanti la relaz.e che debbe aver luogo tra le risultanti parziali X_1 Y_1 Z_1 e i tre momenti parziali L_1 M, N che è necessaria affinchè le (62) (63) (64) possano sussistere nello stesso tempo, affinchè le forze del sistema abbiano una risultante unica. Si osservi, che una delle (62) (63) e (64) è necessaria conseg.za delle altre due.

§. 99. Se abbia luogo la risultante R_1 delle forze considerate nella primitiva loro posiz.e nello spazio essa si sarà pure ed se si trasportano parallelamente a se stesso in un punto; ma le X_1, Y_1, Z_1 si conservano le med.me

eziandio per le forze tras-
portate in un punto che
sia origine delle coordina-
te, dunque posto $L=0$ $M=0$
$N=0$ nelle (62) (63) e (64)
si mutano nelle

(66) $y_1 Z_1 - z_1 Y_1 = 0$,

(67) $z_1 X_1 - x_1 Z_1 = 0$,

(68) $x_1 Y_1 - y_1 X_1 = 0$, e sono queste
le equazioni delle proje-
zioni sui piani (y, z),
(x, z) (x, y) della risultan-
te delle forze P, P', P'' ec.
trasportate parallelamen-
te a se stesse all'origine
ciascuna di queste ~~3 equaz~~
deriva dalle altre due

§. 100. Esaminiamo le cond.
che verificano la (65).
se si ponga $L_1 = 0$, $M=$
$N=0$, la (65) rimane
verificata e non rimane
gone che le forze tra-
sportate parallelamen-
te a se stessa e che
hanno risultante.

§. 101. La (65) si verifica anco-
ra se $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$.
Le projezioni delle for-
ze sugli assi delle X, Y,
Z, saranno zero, e però
non resteranno che delle
coppie esistenti sui
tre piani coordinati.

(123)

Le coppie risultanti su ciascun piano si possono ridurre ad una, e però tutte le coppie si riducono a ~~una~~ tre sui tre piani coord.i ortogonali e per l'equilibrio la coppia risultante dev'esser nulla; ma ciò non può essere se nulla da sé non sia la risultante su ciascun piano, dunque resterà una coppia alla quale non si può far equilibrio con una forza, e però non vi sarà risultante in tal caso, sebbene si verifichino la ~~[illegible]~~ (66) se le tre poste equazioni.

Anche quando la (65) non si verifica non vi è risultante; poste le tre sopra scritte equazioni le (62) (63) (64) si riducono alle $L_1=0$, $M=0$, $N=0$ il che dice che vi sarebbe equilibrio il che non può essere.

§. 102. Supponiamo che sussistano le $X_1=0$, $Y_1=0$, la (68) riducesi ad $-N=0$, e la (61) ad $0=0$; le (62) e (63) alle

(69) $L_1+y_1Z_1=0$

(70) $M-a_1Z_1=0$, d'onde

$Z_1=\frac{M}{a_1}$, e però la

(71) $L_1a_1+My_1=0$ che sarà l'equazione della risul-

to che ci dice che passa per l'origine ed è sul piano (x, y). Dunque quando $X_1 Y_1 = 0$, ciascuno, vi ha risultante.

§. 103. Se abbiasi $X_1 = 0$, la (65) riducesi alla

(72) $M Y_1 + N Z_1 = 0$, e le (62)(63)(64) riduconsi alle

(62) $L - z_1 Y_1 + y_1 Z = 0$

(73) $M - x_1 Z_1 = 0$

(74) $N + x_1 Y_1 = 0$, onde

$Z_1 = \frac{M}{x_1}$

$Y_1 = -\frac{N}{x_1}$, e però

(75) $L x_1 + M z_1 + N y_1 = 0$, che sostituiti nella (72.) diventa

$-MN + NM = 0$; la (75) è l'equazione di un piano su cui è situata la risultante e passa per l'origine delle coordinate. — Dunque quando $X_1 = 0$ v'ha risultante. —

Ad analoghe conseguenze si arriverebbe ponendo 2 od una qualunque delle $X_1 Y_1 Z_1 = 0$. Dunque si dovrà concludere che nel solo caso che la (65) sussista per essere $X_1 = 0$ $Y_1 = 0$ $Z_1 = 0$ non v'è risultante unica.

§. 106. In ogni caso, le forze applicate al sistema, riducendosi possono (quando non sono in equilibrio) ad una sola forza passante per l'origine, ed una sola coppia o non v'ha risultante unica se queste tre forze non sono nello stesso piano. La intensione e direzione della risultante R verrà determinata dalle insoprascritte equazioni

(76) $R=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}$

(77) $\cos R\hat{}X=\dfrac{X_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}$

(78) $\cos R\hat{}Y=\dfrac{Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}$

(79) $\cos R\hat{}Z=\dfrac{Z_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}$

Presentando per G_1, L_1, M_1, N_1 i momenti lineari §. 59, abbiamo

(80) $G_1=\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}$,

(81) $\cos L_1\hat{}G_1=\dfrac{L_1}{\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}}$,

(82) $\cos M_1\hat{}G_1=\dfrac{M_1}{\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}}$

(83) $\cos N_1\hat{}G=\dfrac{N_1}{\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}}$, ma siccome i momenti L_1, M_1, N_1, che gli assi delle x, y, z sono perpendicolari ai piani

delle coppie di cui i momenti lineari sono dati da L_1, M_1, N_1; dunque L_1, M_1, N_1 saranno rispett.e paralelli ad X, Y, Z, e però avremo l'angolo che fa

$L_1 \hat{} G_1 = X \hat{} G_1$;

$M_1 \hat{} G_1 = Y \hat{} G_1$;

$N_1 \hat{} G_1 = Z \hat{} G_1$; d'onde avremo

(84) $\cos X \hat{} G_1 = \dfrac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2}}$,

(85) $\cos Y \hat{} G_1 = \dfrac{M_1}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2}}$,

(86) $\cos Z \hat{} G_1 = \dfrac{N_1}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2}}$

§. 105. Se vogliasi direttamente esprimere che le forze P, P', P'' ecc nello spazio esistenti, hanno una risultante unica, ap-presso al detto §. 67. sarà necessario esprimere qui sta cond.e che la forza risultante R e la coppia risultante giacciono sul med.o piano o su piani paralelli, ovvero vamente che l'asse della coppia sia perpend.e alla direz.e della forza. Sia T il braccio della coppia, e si ha

$\theta R^\wedge T = \theta R^\wedge X \, \theta T^\wedge X + \theta R^\wedge Y \, \theta T^\wedge Y +$
$\theta R^\wedge Z \, \theta T^\wedge Z$;
ma T essendo perpend.° ad R dunque avremo la
(87) $\theta R^\wedge X \, \theta T^\wedge X + \theta R^\wedge Y \, \theta$ - - - - -
$= 0$,
la quale in virtù delle (81), (82), (83), (84), (85) e (86) riducesi alla (65): è mestieri inoltre che la R non sia nulla cioè che sia $\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} > 0$, il che importa che le forze X_1, Y_1, Z_1, non siano nulle tutte tre.

Lezione 36. La 35. Ripet.°

§. 186. Vediamo come data la forza R e gli angoli che la sua direzione fa cogli assi delle X, delle Y e Z determinare si possa la sua projezione r, sopra una retta che passa per l'origine di data posizione, notando per essa la intensione sua e direzione e sieno $R^\wedge X$, $R^\wedge Y$, $R^\wedge Z$ dati, si tratta di determinare la r.

Si ha l'equazione
(88) $r = R \, \theta R^\wedge r$; ma si ha
(89) $\theta R^\wedge r = \theta R^\wedge X \, \theta r^\wedge X + \theta R^\wedge Y \, \theta r^\wedge Y$
$+ \theta R^\wedge Z \, \theta r^\wedge Z$. Dunque dalla (88) si ha la

(90) $r = R(\theta R \hat{} X . \theta v \hat{} X + R \theta R \hat{} Y \theta v \hat{} Y .$
$R \theta R \hat{} Z \theta v \hat{} Z$

Siano X_1, Y_1, Z_1 le tre componenti di R nella direzione degli assi ortogonali ed avremo

$R \theta R \hat{} X = X_1$.
$R \theta R \hat{} Y = Y_1$
$R \theta R \hat{} Z = Z_1$, perciò la (90) si muta nella

(91) $r = X_1 \theta v \hat{} X + Y_1 \theta v \hat{} Y + Z_1 \theta v \hat{} Z$

e si è determinata la projezione v dipendentemente dalle X_1, Y_1, Z_1 e dagli angoli

§. 107. Se G sia il momento lineare risultante dei tre momenti L, M, N, e che la projezione di lui su di un asse che passi per l'origine e sia rappresentato in intensione e direzione da g, si troverà

(92) $g = L \theta g \hat{} X + M \theta g \hat{} Y +$
$N \theta g \hat{} Z = G \theta G \hat{} g$: ma

$g \hat{} X = g \hat{} L$,
$g \hat{} Y = g \hat{} M$,
$g \hat{} Z = g \hat{} N$, dunque avremo

(93) $g = G \theta G \hat{} g = L \theta g \hat{} L + M .$
$\theta g \hat{} M + N \theta g \hat{} N$.

§. 108. Poichè g è eguale a $G \theta G \hat{} g$ ne conseguita

1.° Che di tutti gli assi

che passano per l'origine
l'asse della coppia risultan-
te è quello relativamente
al quale la somma di
momenti è massima;
2.° che le projezioni
sono le stesse su tutte
le rette passanti per
l'origine e che fanno lo
stesso angolo con g.
3.° che la projezione è
nulla sugli assi che
passano per l'origine
e che fanno un'ango-
lo retto colla direzione
della g.

Capitolo IX.

Altra maniera di ottenere le sei equazioni di Equilibrio delle forze comunque dirette = nello spazio =

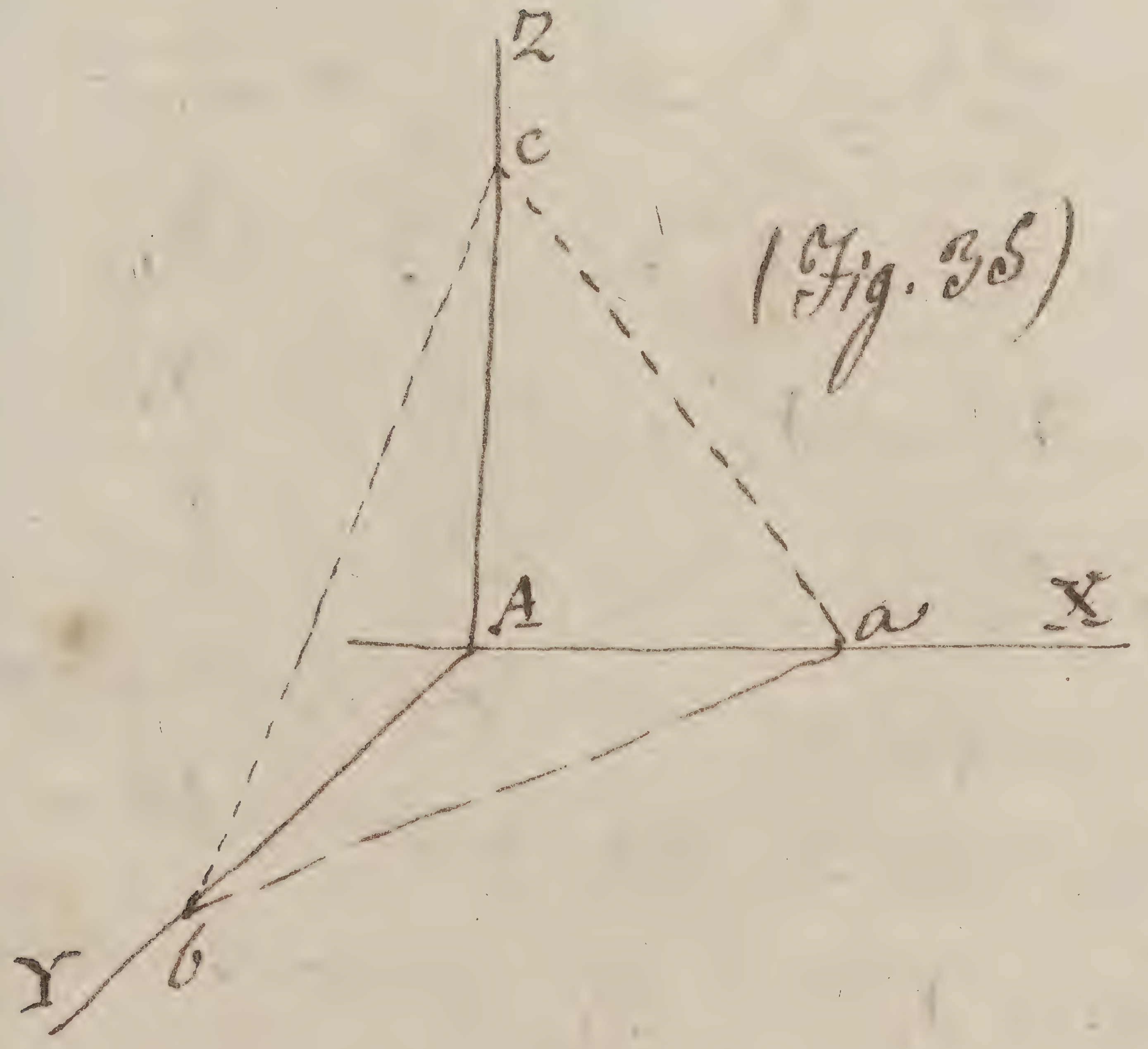
§. 109. Quantunque la strada seguita per ottenere le sei equazioni d'equilibrio non lasci nulla desiderare per la chiarezza e precisione, metteremo davanti un'altra maniera che serve di fondamento alle cose in seguito. —

Siano P, P', P'' ec quante forze si vogliano applicate ad un sistema di punti invariabilmente tra se connessi. ———

Supponiamo che i punti d'applicazione delle forze abbiano per coord. (P), x, y, z, x', y', z' x'', y'', z'' ec quelle delle altre forze, e gli assi ortogonali ono. ———

Immaginiamo ciascuna forza P, P', P'' ec scomposta in tre X, Y, Z, X', Y', Z' ec parallelle ai tre assi. ———

(Fig. 38) Sugli assi coordinati



(Fig. 35)

si prendano i tre punti a, b, c i quali siano ugualmente distanti dall'origine A, cioè sia $Aa = Ab = Ac = h$. Ciascuna delle forze nelle direzioni degli assi si scomponga in tre parallele applicate in a, b, c, parallele ad essi e siano rappresentate da X_a, X'_a, X''_a ecc. Y_a, Y'_a, Y''_a ecc. Z_a, Z'_a, Z''_a ecc. così;

X_b, X'_b, X''_b ... ecc.,
Y_b, Y'_b, Y''_b -- ecc.,
Z_b, Z'_b, Z''_b -- ecc. e quelle applicate in c siano
X_c, X'_c, X''_c --- ecc.
Y_c, Y'_c, Y''_c -- ecc.
Z_c, Z'_c, Z''_c -- ecc.

Dunque a vece delle P, P', P'' abbiamo queste forze applicate in a, b, c vertici del triangolo abc che sono i punti ove il piano del △° taglia gli assi coordinati. Componendo in ciascun punto le forze che hanno la medesima direzione, si abbia

(1) $X_a + X'_a + X''_a + \text{-- ecc.} = X_{,a}$
(2) $Y_a + Y'_a + Y''_a + \text{-- ecc.} = Y_{,a}$
(3) $Z_a + Z'_a + Z''_a + \text{-- ecc.} = Z_{,a}$

(4) $X_b + X'_b + X''_b + \text{---}\ \&c = X_{,b}$

(5) $Y_b + Y'_b + Y''_b + \text{---}\ \&c = Y_{,b}$

(6) $Z_b + Z'_b + Z''_b + \text{---}\ \&c = Z_{,b}$

(7) $X_c + X'_c + X''_c + \text{---}\ \&c = X_{,c}$,

(8) $Y_c + Y'_c + Y''_c + \text{---}\ \&c = Y_{,c}$

(9) $Z_c + Z'_c + Z''_c + \&c = Z_{,c}$

Il perchè le forze applicate in a sono ridotte alle $X_{,a}$, $Y_{,a}$, $Z_{,a}$; così quelle applicate in b alle $Y_{,b}$, $X_{,b}$, $Z_{,b}$; e quelle in c, $X_{,c}$, $Y_{,c}$, $Z_{,c}$ — Risulta quindi

(10) $X_{,a} + X_{,b} + X_{,c} = X + X' + X'' \&c = \Sigma X$,

(11) $Y_{,a} + Y_{,b} + Y_{,c} = Y + Y' + Y'' \&c = \Sigma Y$,

(12) $Z_{,a} + Z_{,b} + Z_{,c} = Z + Z' + Z'' \&c = \Sigma Z$. Ricordiamoci che la somma de' momenti di quante forze parallele si vogliano relativi ad un piano parallelo alle direzioni delle forze, eguaglia il momento rispetto al piano medesimo della risultante di tutte §. 79. A vece delle perpendicolari protratte

dai punti d'applicazne delle forze al piano sostituiscasi si pongono delle rette che facciano tutte li stessi angoli colla perpend. ond'è che le cose che si diranno si adattano tanto agli assi ortogonali che obbliqui.

Al §. 82 si è dimostrato che la somma dei momenti delle forze di t.º minore parallele eguaglia la somma dei momenti delle forze tutte.

Ciò posto prendiamo la (10) e consideriamo i momenti delle forze contenute vi relativamente al piano (x, y) di cui le X, a &c sono parallele ad esso; essendo le X, a, X, b, applicate in a, b ed essendo essi nel piano (x, y) i loro momenti rispetto a q.to piano saranno nulli; il momento poi della X, c sarà $h\,X_{,c}$. Il momento poi della X sarà zX, $z'X'$ &c e però avremo la

$$(13).\quad h\,X_{,c} = Xz + X'z' + X''z'' + \&c = \Sigma\, zX.$$

Dalla (11) prendendo i momenti relativi al piano (x, y) è evidente che i momenti delle $Y_{,a}$, $Y_{,b}$ sono zero, e però si avrà

(14) $Y_{,c}\, h = zY + z'Y' + z''Y'' + \text{ec} = \Sigma zY$. Prendendo i momenti delle (11) e (12) relativi al piano (y, z), i momenti delle $Y_{,b}$, $Y_{,c}$ sono zero e così quelli di $Z_{,b}$, $Z_{,c}$ e però si avranno le

(15) $h\, Y_{,a} = xY + x'Y' + x''Y'' + \text{ec} = \Sigma xY$,

(16) $h\, Z_{,a} = xZ + x'Z' + x''Z'' + \text{ec} = \Sigma xZ$.

Se si volessero i momenti delle (10) (12) relativi al piano (x, z) i momenti delle $X_{,a}$ $X_{,c}$ $Z_{,a}$ $Z_{,c}$ sono nulli e però avremo le

(17) $h\, X_{,b} = yX + y'X' + y''X'' + \text{ec} = \Sigma yX$

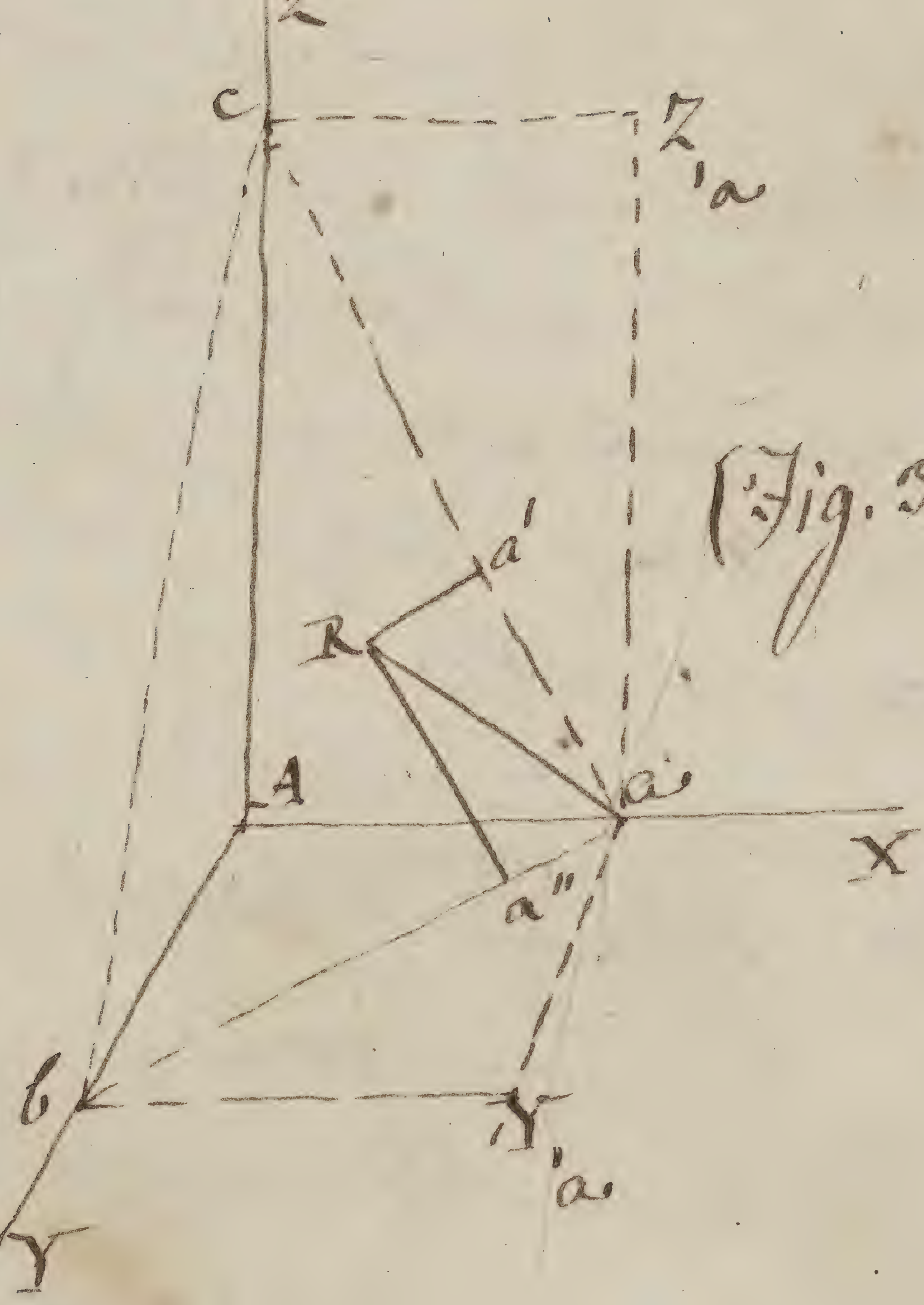
(18) $h\, Z_{,b} = yZ + y'Z' + y''Z'' + \text{ec} = \Sigma yZ$; si osservi che i momenti della (12) rispetto al piano (x, y) e quelli della (11) relativamente all' (x, z) provengono dal moltiplicare le lettere grandi per le stesse lettere piccole ed

(135.)

allora riescono indeterminati questi momenti e di questi momenti non ci curereme poichè indeterminati (*)

(*) perchè le forze sono perpend. al piano

§. 110. Le forze tutte applicate ina ridurre si possono ad una sola applicata al punto stesso. Lo stesso dicasi delle forze applicate in b, c. Per la qualcosa tutte le forze P, P', P" e Q riducansi a tre sole applicate in a, b, c. Potremo dunque conchiudere che l'equazioni di equilibrio di queste tre forze sono le condiz. per l'equilibrio del sistema. Tre forze non possono equilibrarsi se non sia una eguale ed opposta alla risultante delle altre due che esser deve nel loro piano, stal quale deve esistere l'equivalente che le si oppone. Dunque sarà condiz. d'equilibrio dalle tre forze applicate in a, b, c che siano sullo stesso piano, il quale sarà il piano del triangolo abc. Questa verità si verifica



(Fig. 36)

indipendentemente dall'
essere i punti a, b, c equi
distanti da A. La risultan-
te delle $X_{,a}$ $Y_{,a}$ $Z_{,a}$ dovendo
essere sul piano abc potrà
scomporsi in 2 dirette secon
do ab, ac. Sia (Fig. 36)
aR questa risultante
e siano aa', aa'' le compo-
nenti di lei. Se poi scom-
porre si voglia la for-
za R in tre secondo ac,
ab, ed aA, le due prime
situate sul piano abc e
la terza fuori di esso, la
risultante essendo deve
la diagonale di un pa-
rallelepipedo la cui altez-
za sia nulla e nulla
sarà la componente
secondo aA; dunque conver-
rà cercare l'espressione
di questa forza che debb'
esser nulla. Alla forza
$X_{,a}$ si aggiunga ${}_{x}Y_{,a} + {}_{x}Z_{,a}$ che
agisca secondo la direzione
da A verso a, e per l'equi
librio si dovrà ~~aggiungere~~
levare $-({}_{x}Y_{,a} + {}_{x}Z_{,a})$.
Ciò fatto le $X_{,a}$, $Y_{,a}$, $Z_{,a}$ ap-
plicate in a vengono sur-

rogate dalle forze
$X_{,a} + {}_{x}Y_{,a} + {}_{x}Z_{,a}$ che agiscono
da A verso a; poi dalla
$-({}_{x}Y_{,a} + {}_{x}Z_{,a})$ che agisce in
verso opposto cioè da a verso
A. Dunque si avrà
$Y_{,a}$ e $Z_{,a}$ da aggiungersi.
Componiamo $-{}_{x}Y_{,a}$ colla
$Y_{,a}$ applicato in A e la 2.ª
parallela ad Ab, la direzio-
ne della quale è verso $Y_{,a}$
che è nel piano (x, y).
Essendo $Ab = Aa = aY_{,a}$;
se la forza $-{}_{x}Y_{,a}$ venga da
a A rappresentata, la $Y_{,a}$
verrà presentata da $Ab =$
$aY_{,a}$ e di conseguenza la
risultante di queste due
forze agirà nella dire-
zione ab; similmente
per essere $aA = Ac = h$, la
risultante delle $-{}_{x}Z_{,a}$
e $Z_{,a}$ agirà nella direzio-
ne ac; le due $X_{,a}$ e ${}_{x}Y_{,a}$
$+{}_{x}Z_{,a}$ agiscono secondo Aa
e però la loro risultan-
te sarà la somma loro
$X_{,a} + {}_{x}Y_{,a} + {}_{x}Z_{,a}$ che deve
esser nulla, dunque avre-
mo l'equazione di condi-
zione
(9) $X_{,a} + {}_{x}Y_{,a} + {}_{x}Z_{,a} = 0.$

similmente alla $Y,_b$ appli-
cata in b ed agente second.
Ab si aggiunga la forza
$y^X,_b + y^Z,_b$ e dappoi per non
alterare il sistema s'ap-
plichi al punto b la medi-
forza ed agente secondo
bA; per la qual cosa le
$X,_b$, $Y,_b$, $Z,_b$ vengono surro-
gate dalle
$Y,_b + y^X,_b + y^Z,_b - (y^X,_b + y^Z,_b) +$
$X,_b + Z,_b$ che agisce nella
direzione bA. Inoltre da
$X,_b$ parallela ad AX e $Z,_b$
parallela AZ.

Come si è fatto si di-
mostrerebbe che la ri-
sultante delle forze che
agiscono secondo Ab è la
loro somma, la quale
dovendo esser nulla, dà la

(20) $Y,_b + {}_yX,_b + {}_yZ,_b = 0$

rispetto a c si avrà la

(21) $Z,_c + {}_zX,_c + {}_zY,_c = 0$. Le
tre (19) (20) (21) debbono
aver luogo affinchè le
3 applicate in a, b, c
stiano sul piano abc.

137.

Lezione 36.

§. 111. Verificate le (19) (20) (21)
le forze applicate in a, b, c
giacciono sul piano del trian-
golo. Ciascuna di esse forze
si potrà scomporre in 2 agen-
ti secondo i lati del triango-
lo; avremo dunque sei forze
riducibili due a due ad una
sola agente secondo i lati del
prefato triangolo, e con ciò
si hanno tre forze situa-
te sul piano del triango-
lo e che agiscono nella di-
rezione di lei. Ma le forze
che agiscono in siffatte di-
rezioni (dei lati) non pos-
sono equilibrarsi scambievol-
mente se non si elidano
poichè non sarebbe la ri-
sultante di 2 opposta ed
eguale alla terza, dunque
bisogna aggiungere le con-
dizioni che le forze che
agiscono sui lati sia-
no da se —

§. 112. Per determinare così fatte
condizioni osserviamo ciò
che succede agli estremi
di un lato ab p. e.
la forza che agisce da
a verso b si è veduto esse-
re $-\frac{T}{x'a}$, e l'altra T_{1a};
l'una agisce da a verso
A e l'altra da a verso T_{1a}
e giacciono sul piano (p. 4)

La forza applicata in b è la risultante delle due $_{y}X_{,b}$ $X_{,b}$; la prima agente da b verso A e l'altra da b verso $Y_{,a}$ che è applicata in b e giace sul piano (x, y). Esse agiscono sul punto b, e immaginando che i punti delle due risultanti sieno uniti in uno sulla ab e poi scomponendole nelle sue componenti è necessario all'equilibrio che $_{x}Y_{,a}$ $X_{,b}$ sieno eguali e che $Y_{,a}$ e $-_{y}X_{,b}$ sieno opposte ed eguali, e però avremo

(22) $_{x}Y_{,a} = X_{,b}$,

(23) $Y_{,a} = {}_{y}X_{,b}$; ma discorsi analoghi hanno luogo per ciascheduno lato del triangolo, dunque pel lato bc, avremo le

(24) $_{z}Y_{,c} = Z_{,b}$

(25) $Y_{,c} = {}_{y}Z_{,b}$; per il lato ac

(26) $_{x}Z_{,a} = X_{,c}$ e la

(27) $Z_{,a} = {}_{z}X_{,c}$; mediante le (22) fino alla (27) compresavi; le equazioni (19), (20), e (21) diventano

(28) $X_{,a} + X_{,b} + X_{,c} = \Sigma X = 0$,

(29) $Y_{,a} + Y_{,b} + Y_{,c} = \Sigma Y = 0$,

(30) $Z_{,a} + Z_{,b} + Z_{,c} = \Sigma Z = 0$.

Si ponga mente che nelle (22), (24) e (28) gl'indici di X, Y, Z sono destinati a mostrare le direzioni delle forze, e però sussisteranno levati gl'indici, e però avremo le tre equazioni

(31) $Y_{,a} = X_{,b}$,

(32) $Y_{,c} = Z_{,b}$,

(33) $Z_{,a} = X_{,c}$; dipendentemente da queste equazioni e dalle (13) fino alle (18) inclusivamente ottengosi le

(34) $\Sigma zX = \Sigma xZ$,

(35) $\Sigma zY = \Sigma yZ$,

(36) $\Sigma xY = \Sigma yX$, che unite alle (28)(29)(30) danno le sei equazioni per l'equilibrio trovate al §. 91.

La ragione del detto al §. 109 in ultimo si è che sono indeterminati perchè le forze sono perpendicolari al piano.

Capitolo X.°

Delle condizioni di equilibrio quando il solido non è interamente libero nello spazio ma rimane da ostacoli = invariabili impedito =

§. 113. Prendiamo in considerazione i casi a cui si riducono.

1.° Siavi un punto fisso nel sistema o nel solido, intorno al quale il solido o il sistema possa muoversi. L'origine delle coord.e è arbitraria e perciò poniamo le coord.e ortogonali nel punto fisso. —

Allora vi può essere equilibrio senza che le

(1) $X_1 = 0$,

(2) $Y_1 = 0$,

(3) $Z_1 = 0$,

(4) $L_1 = 0$,

(5) $M = 0$,

(6.) $N = 0$, siano necessarie la loro esistenza simultanea quando v'ha un punto fisso. Si osservi che $X = \Sigma X$, $Y = \Sigma Y$, $Z = \Sigma Z$;

Difatti quantunque il punto fisso da sè è incapace di produrre alcuna azione, può ancora annullare la risultante che passa da esso. —

(141)

Questo punto adunque può tener la vece di novelle forze del sistema, e qualunque sieno queste forze la risultante deve passare per lui e di conseguenza potremo surrogare la risultante che tenga la vece del punto fisso, ed inallora il sistema si può considerare affatto libero e si avranno per esso le sei equazioni scritte.

La forza che dovendo passare per l'origine A, darà luogo a tre componenti secondo gli assi che chiameremo $_1X$, $_1Y$, $_1Z$ e non s'introdurranno coppie, e le sei equazioni d'equilibrio saranno

(7.) $X_1 + _1X = 0$,

(8.) $Y_1 + _1Y = 0$.

(9.) $Z_1 + _1Z = 0$. Oltre di queste si avranno le (4)(5)(6) che non cambiano per la non introduzione di coppie.

Qualunque sieno le X_1, Y_1, Z_1, le $_1X$, $_1Y$, $_1Z$ elidono queste forze e possono essere qualunque perchè la resistenza del punto è indeterminata, e perciò si possono porre

eguali e in direzion contraria e però si avrà

$X_1 = -{}_1X$,

$Y_1 = -{}_1Y$,

$Z_1 = -{}_1Z$; dunque le (7) (8) e (9) si considerano come verificate: ma le (4) (5) e (6) non soffrono alcuna alterazione per la introduz.e delle V, dunque le (4) (5) e (6) sono le sole condizioni di equilibrio in tal caso. —

Dunque, per l'equilibrio di un solido o di un sistema di punti invariabile che non può rotare che intorno ad un punto fisso, è necessario che la somma dei momenti delle forze rispetto a 3 assi ortogonali condotti pel punto fisso sia zero rispetto a ciascun asse e però il corpo o sistema sarà in equilibrio. —

§. 116. Allorchè tutte le forze applicate al solido od al sistema sono parallele concepire si possono due piani che passino pel punto fisso, e si può intendere composta ciascun

(143.)

coppia in due sopra questi due piani §. 57 onde per l'equilibrio basta che la somma dei momenti delle coppie situate su ciascun piano sia nulla rispetto ad un asse perpend.e al piano.

Se le forze sieno parallele e sul med.o piano sul quale sia il punto fisso, le coppie introdotte sono sul med.o piano ed in questo caso è necessario che la somma dei momenti sia nulla rispetto ad un'asse perpend.e al piano.

Nel caso adunque delle forze parallele nello spazio bastano 2 delle (4) (5) e (6).

Se dippiù le forze e il punto fisso sieno sul med.o piano, una sola di queste basta. Se ad es. le forze sieno parallele ai piani (x, y) (x, z) basterà per l'equilibrio che il solido o sistema non possa ruotare intorno l'asse delle x, e delle y per la qual cosa bastano le (5) e (6).

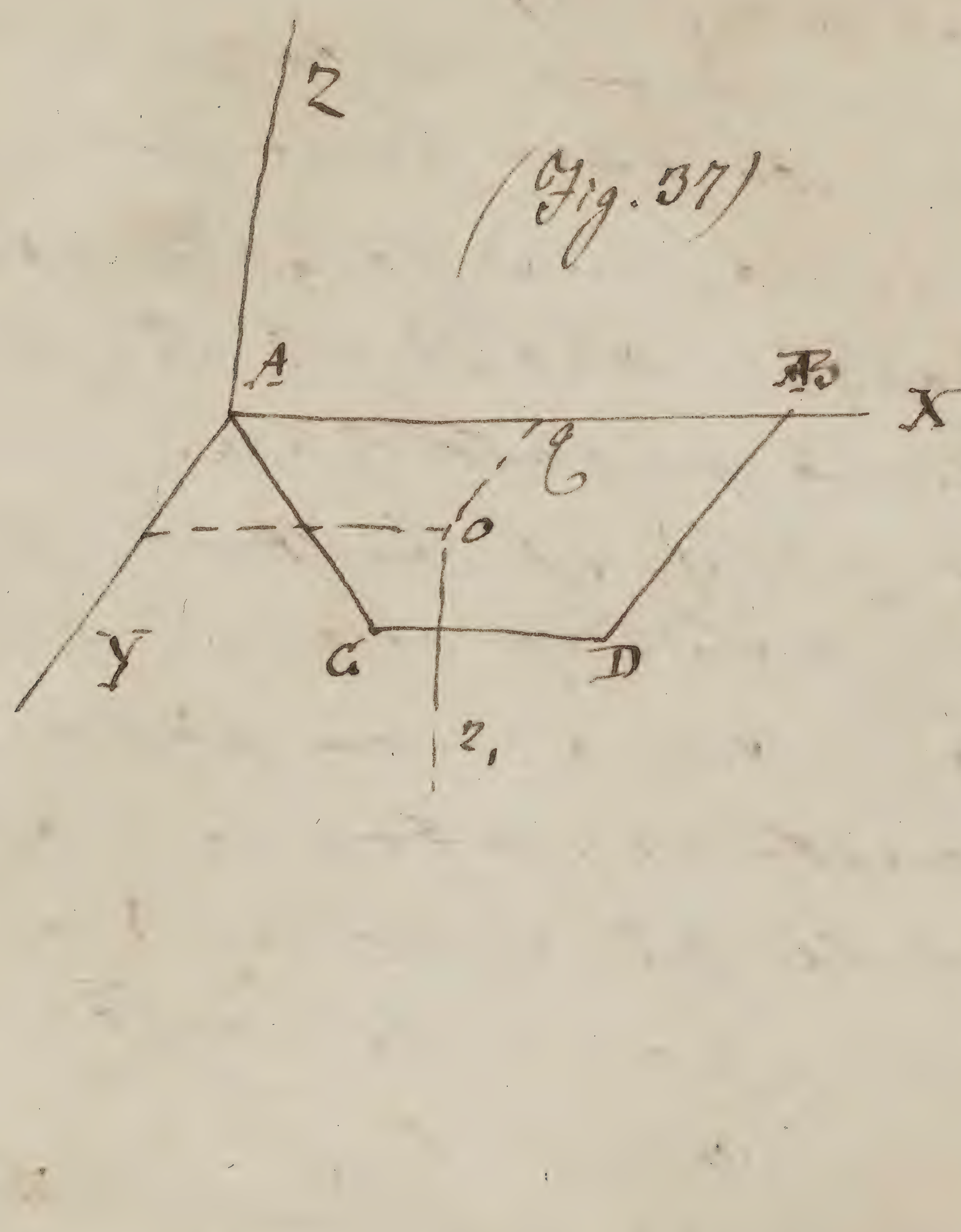
§.115. Al §. 100 si è dimostrato che sussistendo le (4) (5) e (6.) le forze del sistema

(144.)

hanno una risultante che passa per l'origine delle coord. e nel nostro caso pel punto fisso. Se si suppone che un sistema od un solido non possa essere in equilibrio intorno ad un punto fisso a meno che le forze che sollecitano il corpo o sistema ~~non~~ passi pel punto ~~del sistema~~ fisso esso sarà in equilibrio e perciò le (4) (5) e (6) sono le condizioni dell'equilibrio.

§. 115. 2.° Caso.

Supponiamo che il solido o sistema non possa (fig. 37) ruotare che intorno la AB che unisce i punti A, B che prenderemo per asse delle X essendo in A l'origine delle coordinate. I punti fissi A, B tengon la vece di 2 forze che chiameremo V, V' immediatamente applicate ai punti A, B. Introducendo queste forze nel sistema o nel solido si può esso considerare affatto libero, ma quando ciò è si debbono avere le 6 equazioni; dunque dopo quest'introdu-



(145.)

si dovranno avere le 6 equazioni: osserviamo che la r applicata al punto A dà luogo alle componenti
${}_{,}X, {}_{,}Y, {}_{,}Z$; così la r' alle ${}_{''}X, {}_{''}Y, {}_{''}Z$ rispetto ai rispettivi assi x, y, z.

Questa forza ${}_{''}X$ è sull'asse delle X, e le ${}_{''}Y, {}_{''}Z$, giacciono sui piani (x,y) (x,z) rispettivamente. La ${}_{''}X$ trasportata all'origine non introduce coppia alcuna: ma le ${}_{''}Y, {}_{''}Z$ trasportate all'origine introducono due coppie sui piani $(x,y)(x,z)$: posto $AB = a$, i momenti delle coppie sono

$a_{''}Y$, $a_{''}Z$; ma questi due momenti agiscono in senso contrario e perciò $a_{''}Z$ sarà positivo, l'altro sarà negativo, quindi le equazioni d'equilibrio saranno

(10) $X_{1} + {}_{1}X + {}_{''}X = 0$

(11) $Y_{1} + {}_{1}Y + {}_{1}Y = 0$

(12) $Z_{1} + {}_{1}Z + {}_{1}Z = 0$; la (4) non cambia, e però

(4) $L_{1} = 0$.

(13) $M + a_{''}Z = 0$

(14) $N - a_{''}Y = 0$. Le ${}_{''}X, {}_{''}Y, {}_{''}Z$ tengono la vece delle resistenze dei punti fissi; dunque ~~sole~~ le (10) (11) (12) (13) (14) si possono porre verificate

Dunque nel caso dell'~~asse~~ asse fisso le cond.e è la (u) cioè che posse che la somma dei momenti relativi all'asse stesso sia nulla da se.

§. 117. Se i due punti che si sono supposti fissi si potesseso muovere nella direzione della retta che unisce questi due punti, allora le X, Y sarebbero zero ed oltre alla (u) dovrebbe sussistere la (s)

In questa supposizione adunque, oltre essere nulla la somma dei momenti relativi all'asse di rotazione è necessario che si abbia qta cond.e

§. 118. Se nel sistema o nel solido vi fossero tre punti fissi che non fossero sulla medesima retta in allora non vi sarebbe movimento.

§. 119. 3.º Caso. Figuriamoci che il solido si appoggi su di un piano che supporremo l'(x, y) e che si appoggi con un suo punto solo che coincida coll'origine A degli assi ortogonali.

Facilmente si concepirà

che quando una forza preme un piano e la sua direzione sia obliqua al piano, essa può scomporsi in 2 l'una ad esso perpendicolare, e l'altra sul piano. La perpend.e al piano viene elisa dalla resistenza del piano, e l'altra diretta sul piano ottiene il suo effetto prescindendo dalle resistenze. Il piano resistendo non può totalmente distruggere che le forze a lui perpendicolari, e però la resistenza del piano si dovrà considerare come una forza eguale e contraria a quella che esso distrugge.

Sia $OZ_{\prime}$ la resistenza che oppone il piano la quale considerare si può diretta secondo AZ. Però introducendo questa forza si dovranno avere le sei equazioni d'equilibrio

(fig. 37.)

(1) $\Sigma X_1 = 0$

(2) $\Sigma Y_1 = 0$

(15) $Z_1 + Z = 0$

(4) $L = 0$

(5) $M = 0$

(6) $N = 0$. La (4) (5) e (6) ci dicono che debb'esservi risultante unica e la (4)

(148.)

Posta essa R, si è veduto che $\theta R\hat{}X = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}$

$$\theta R\hat{}Y = \frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}$$

Ma per la (1) e (2) si ha $X_1 = 0$, e però $\theta R\hat{}X = 0$; la (2) $Y_1 = 0$ e però $\theta R\hat{}Y = 0$, e però gli angoli $R\hat{}X$, $R\hat{}Y$ sono retti e però la risultante è perpendicolare al piano (x,y): la ~~componente~~ resistenza del piano che origina la Z_1 può essere qualunque: ma a verificare la (15) esser debbe di direzione opposta a Z_1 e dev'essere a lei eguale in quantità; conviene dunque che la Z_1 prema contro il piano il sistema.

Quando la Z_1 spingesse in maniera da gettare il corpo fuori del piano, vi bisognerebbero le 6 condizioni d'equilibrio —

§. 120. 2°. Caso. —

Supponiamo ora che il solido sistema s'appoggi al piano in 2 punti (fig 37.) A, B sulla AB che sia asse delle x, in A l'origine

(129.)

Il punto A fa nascere una resistenza equivalente a Z_1, e il punto B la fa nascere equivalenza a $_{\prime\prime}Z$ situate nel piano (xz) che trasportata in A da origine ad una coppia la cui energia viene misurata da $a'_{\prime\prime}Z$, posto $AB = a'$, e le condi. d'equilibrio in questo caso saranno

(1) $X_1 = 0$

(2) $Y_1 = 0$

(16) $Z_1 + _{\prime}Z + _{\prime\prime}Z = 0$

(4) $L_1 = 0$

(7) $M + a'_{\prime\prime}Z = 0$

(6) $N = 0$

Si osservi, che l'equazione di condizione $L_1 X, M_1 Y, N_1 Z$ resta verificata dipendentemente dalle (1) (2) e (6).

Si verifica ancora dipendentemente dalle (4) e (6) ed in ogni caso si ha risultante unica.

Detta R_1 questa risultante avremo la

(18) $R_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = \sqrt{Z_1^2} = Z_1$ per la (1) e (2).

Si osservi che non può essere $Z_1 = 0$, perchè se fosse $Z_1 = 0$ avendosi la (1) e (2) non vi sarebbe risultante unica, e poi la (16) riducesi alla

(19) $,Z + ,,Z = 0$, la quale non si può verificare perchè hanno lo stesso segno, e però quando $,Z = 0$ non v'è risultante unica.

Risulta quindi che la Z, è perpend.e al piano (x, y) sul quale sono i due punti A, B. La (16) poi ci mostra che la forza può esser qualunque ma però deve avere una direzione che spinga il solido contro il piano.

Riprendiamo le equazioni

(20) $L - zY_1 + yZ_1 = 0$

(21) $M - x.Z_1 - zX_1 = 0$

(22) $N - yX_1 + xY_1 = 0$, che sono le equazioni delle proiezioni sui piani coordinati ortogonali della risultante. Per determinare il punto ove la risultante incontra il piano (x, y) si deve porre $z = 0$ e supposto che le coord.e di un siffatto punto siano $x = x_1$, $y = y_1$, le due (20) e (21) si mutano nelle

(23) $L + y_1 Z_1 = 0$

(24) $M - x_1 Z_1 = 0$, d'onde

(25) $y_1 = -\frac{L}{Z_1}$

(26) $x_1 = \frac{M}{Z_1}$; ma $M = -a'\,,,Z$, dalla (11) dalla (16) $,Z = -,Z - ,,Z$, e (6) dunque si avrà

(151.)

(27) $y_1 = 0$

(28) $x_1 = \frac{a'\,{}_{,,}Z}{{}_{,}Z + {}_{,,}Z}$; la (27) ci mostra che il punto d'incontro della risultante sul piano (x, y) è sull'asse delle x cioè sulla retta che unisce i due punti d'appoggio. — Si ha $\frac{{}_{,,}Z}{{}_{,}Z + {}_{,,}Z} < 1$ e però $x_1 < a'$: la (28) adunque ci mostra che il prefato punto d'incontro cade fra i due punti d'appoggio, di quali punti ~~[illegible]~~ la distanza è mi[illegible] da a; la (16) e (17) si possono porre verificate da se e però le equazioni d'equilibrio saranno le (1) (2) (4) et (6).

Lezione 37 & classe S. 121.

~~la 38. Aspet.~~[10]

Supponiamo che il solido si appoggi al piano (x, y) con un certo numero di punti A, B, C, D che supporremo situati dalla medesima parte di BA. Sia a'' la distanza di C dal piano (z, y) sia b'' la distanza di C dal piano (x, z) essendo A l'origine. Sieno ${}_{,}Z$, ${}_{,,}Z$, ${}_{,,,}Z$, ${}_{,,,,}Z$ le rispettive resistenze dei punti A, B, C, D etc. La ${}_{,,,}Z$ trasportata in A introduce una coppia la quale si può scomporre

in 2 giacenti sui piani (y,z) (x,z). Il momento della componente sul piano (y,z) sarà $a''_{,,,}Z$, e sul piano (x,z) dell'altra sarà $b''_{,,,}Z$; essendo a'', b'' le distanze del punto dai due piani siano a''', b''' le distanze del punto D dai due stessi piani e i momenti delle 2 coppie pel trasportamento della $_{,,}Z$ all'origine sono $a'''_{,,,,}Z$, $b'''_{,,}Z$ che sono di direzione contraria ai momenti $b''_{,,,}Z$ $b'''_{,,}Z$; se s'introducano le forze che tengono le veci della resistenza, il solido si troverà si potrà considerare come libero e perciò dovranno aver luogo le equazioni d'equilibrio che sono le sei seg.ti

(1) $X_{,}=0$

(2) $Y_{,}=0$

(29) $Z_{,}+{}_{,}Z_{I}+{}_{,,}Z_{II}+{}_{,,,}Z_{III}+{}_{,,,,}Z_{IV}=0$

(30) $L-b''_{,,}Z-b'''_{,,,}Z-\mathcal{D}=0$

(31) $M+a'_{,,}Z+a''_{,,,}Z+a'''_{,,,,}Z=0$ $\mathcal{E}$

(6) $N=0$.

Le (1) e (2) ci mostrano che la risultante si riduce a $_{,}Z$, cioè ad una forza perpend.e al piano (x,y). Dalla (29) poi si vede

(153.)

che non può essere $Z_1 = 0$ poichè tutte le altre sono positive e perciò la somma loro non sarebbe zero. — E perciò essendo Z_1 negativo premerà contro il piano.

Per avere il punto ove la risultante incontra il piano (x, y) si dovrà porre nella (21) (25) $z = 0$, e dipendentemente dalle (29), (30), si avrà

$$y' = -\frac{L_1}{Z_1} = \frac{b''{}_{'''}Z + b'''{}_{''}Z_{\zeta}}{{}_{'}Z + {}_{''}Z + {}_{'''}Z + \zeta}$$

Osserviamo che i punti C, D, ζ sono tutti dalla stessa parte dell'asse delle x, e però le distanze b'', b''' ζ di essi punti dal piano (x, y) hanno tutte lo stesso segno; in egual maniera le ${}_{'}Z$, ${}_{''}Z$, ${}_{'''}Z$, Z_{ζ} hanno tutte lo stesso segno, dunque il segno di y' sarà il segno comune di b'', b''' e ζ. —

Si dovrà dunque concludere che il punto ove la risultante incontra il piano (x, y) è dalla stessa parte di AB come B, C, D e ζ. Si vede che l'asse delle x è arbitrario poichè si poteva scegliere un'altra retta che unisce due punti A, B, C, D e ζ —

(154)

e lascia gli altri dalla med.a parte.

Dunque è da conchiudersi che il punto ove la risultante incontra il piano (x, y) è situato rispetto a tali rette dalla med.a parte dei punti d'appoggio, onde esso cader deve entro il poligono che ha per vertici i punti d'appoggio di guisa che tutti gli altri punti sieno dalla stessa parte.

Le equazioni di condizione per l'equilibrio, sono poi (1) (?) ~~(4)~~ e (6).

§. 122. 6.° Caso.

Supponiamo un punto materiale animato da quante forze si vogliono P, P', P'' ec. il quale sia obbligato a moversi su di una data superficie.

Per l'equilibrio è necessario che la risultante delle P, P', P'' ec. sia perpend.e alla superficie affinchè sia da essa elisa. Si potrà dunque prescindere dalla resistenza della superficie aggiungendo una forza F sconosciuta e perpend.e alla superficie. Ciò fatto il punto si do=

vrà

considerare affatto libero e si avremo le tre condizioni trovate per un punto affatto libero, e sono

(32) $P^{\circ}\theta P^{\circ}\hat{X} + P\theta P\hat{X} + P'\theta P'\hat{X} + \frac{d}{e} = 0.$

(33) $P^{\circ}\theta P^{\circ}\hat{Y} + P\theta P\hat{Y} + P'\theta P'\hat{Y} + \frac{d}{e} = 0,$

(34) $P^{\circ}\theta P^{\circ}\hat{Z} + P\theta P\hat{Z} + P'\theta P'\hat{Z} + \frac{d}{e} = 0.$

La superficie sulla quale dee rimanere il punto sia data dalla

(35) $Q = f(x, y, z) = 0.$

Le derivate parziali di essa sono rappresentate dalle

(36) $\left(\frac{dQ}{dz}\right)\left(\frac{z'}{x'}\right) + \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0,$

(37) $\left(\frac{dQ}{dz}\right)\left(\frac{z'}{y'}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0,$ d'onde le

(38) $\left(\frac{z'}{x'}\right) = -\left(\frac{dQ}{dx}\right) : \left(\frac{dQ}{dz}\right),$

(39) $\left(\frac{z'}{y'}\right) = -\left(\frac{dQ}{dy}\right) : \left(\frac{dQ}{dz}\right).$

Dunque per il dimostrato al §. 424. C. sub., il piano tangente la superficie nel punto (x, y, z) verrà rappresentato dalla

(40) $(z_1 - z)\left(\frac{dQ}{dz}\right) + (x_1 - x)\left(\frac{dQ}{dx}\right) + (y_1 - y)\left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0$; pel §. 428. C. sub. si hanno le equazioni della projezione della normale sui tre piani coordinati, che sono

(41) $(x_1 - x)\left(\frac{dQ}{dz}\right) - (z_1 - z)\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0$

(42) $(y_1 - y)\left(\frac{dQ}{dz}\right) - (z_1 - z)\left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0$

(43) $(x_1 - x)\left(\frac{dQ}{dy}\right) - (y_1 - y)\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0$

Mediante il detto al §. 130 l.° sub. derivansi le tre seg.ti quantità

$$\pm \frac{z}{\left(\frac{dQ}{dz}\right)}\sqrt{\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dz}\right)^2},$$

$$\pm \frac{x}{\left(\frac{dQ}{dx}\right)}\sqrt{\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dz}\right)^2}$$

$$\pm \frac{y}{\left(\frac{dQ}{dy}\right)}\sqrt{\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dz}\right)^2}$$

che sono i valori della porzione di normale compresi fra il punto di contatto e i piani coord.i (x, y), (x, z), (y, z).

La forza F agisce nella direzione della normale alla superficie, e perciò l'angolo che fa la normale con l'asse della z è lo stesso di quello che fa la ~~normale~~ F con esso, e però pel (§. 120 Calcolo) si hanno le infrascritte equazioni

(44) $\cos F\hat{}Z = \pm\left(\frac{dQ}{dz}\right) : \sqrt{\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dz}\right)^2}$

(45) $\cos F\hat{}Y = \pm\left(\frac{dQ}{dy}\right) : \sqrt{\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \text{etc}}$

(46) $\cos F\hat{}X = \pm\left(\frac{dQ}{dx}\right) : \sqrt{\quad \text{etc}}$

Poniamo per semplicità la

(47) $V = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2+\left(\frac{dQ}{dy}\right)^2+\left(\frac{dQ}{dz}\right)^2}}$, e

le (44) (45) e (46) si mutano nelle

(48) $\theta F\hat{Z} = V.\left(\frac{dQ}{dz}\right)$,

(49) $\theta F\hat{Y} = V.\left(\frac{dQ}{dy}\right)$,

(50) $\theta F\hat{X} = V.\left(\frac{dQ}{dx}\right)$. L'uno dei segni di V è relativo alla posizione di normale che cade da una parte della superficie, cioè se sopra o sotto. Non conoscendosi secondo qual verso la forza F eserciti la sua azione rimarrà dubbio il segno di V. Ponendo nelle (32) (33) e (34) i valori dati dalle (48), (49), (50) si hanno le equazioni

(51) $FV.\left(\frac{dQ}{dx}\right) + P\theta P\hat{X} + P'\theta P'\hat{X} + \&c = 0$

(52) $FV.\left(\frac{dQ}{dy}\right) + P\theta P\hat{Y} + P'\theta P'\hat{Y} + \&c = 0$,

(53) $FV.\left(\frac{dQ}{dz}\right) + P\theta P\hat{Z} + P'\theta P'\hat{Z} + \&c = 0$. Mediante le quali si può eliminare FV, e le due equazioni risultanti saranno le due condizioni d'equilibrio del punto materiale

Se si cercasse in qual punto della superficie si deve trovare il punto materiale sotto l'azione delle F, F', F" ci basterebbe all'uopo conoscere le coordinate di tal punto. Noi abbiamo veduto che 2 sono le condi. d'equilibrio, e se a queste due uniremo la (35) equazione della superficie, si potranno determinare le 3 coord. ed in quel punto esso sarà in equilibrio.

§. 123. O se il punto materiale M si appoggi solo alla superficie, allora bastano le due prefate condizioni perchè il punto sia in equilibrio? No; ma è necessario che la forza normale lo spinga contro la superficie o concava o convessa. Ciò ci verrà indicato indagando il segno della forza F: al che supponiamo che l'asse delle x, al quale si riferiscono gli angoli F^X, F'^X ecc. cada sia su una porzione di normale, e gli altri due assi saranno sul

piano tangente, e si avrà
$T^\wedge Y = 90°$ e si avrà quin-
di la
(54) $\theta T^\wedge X = \pm 1$, il segno supe-
riore ha luogo nella 1ª
ipotesi, l'inferiore alla
2ª. Le (32), (33), (34), di-
vendano
(55) $\pm T \pm P\theta P^\wedge X + P'\theta P'^\wedge X + ec$
$= \pm T + \Sigma P\theta P^\wedge X = 0.$
(56) $P\theta P^\wedge Y + P'\theta P'^\wedge Y + ec =$
$\Sigma P\theta P^\wedge Y = 0.$
(57) $P\theta P^\wedge Z + P'\theta P'^\wedge Z + ec$
$= \Sigma P\theta P^\wedge Z = 0$. Le equa-
zioni (56) e (57) nelle qua-
li non entra la forza in-
cognita T, incognite sono
le equazioni per l'equilibrio
del punto materiale, e mo-
strano che le componenti
dirette nel piano tang.te
la superf.e si distruggo-
no fra loro indipend.te dalle
componenti normali $P\theta P^\wedge X$
$P'\theta P'^\wedge X$ ec; ma questa
è la cond.e affinchè il pun-
to non scorra sulla superf.e
La (55) determina T
e fa conoscere ancora il
suo segno.

(fig. 38)

Si presenti per TT' il piano
tangente della superf.e di
cui la sezione che passi
la normale MN sia pre-

sentata da $\overline{MN}$; se F sia positivo $\Sigma F \cos F\hat{}X$ sarà diretta da M verso N.

Se il punto poggiasse in M dalla parte concava della superficie la F' avrebbe la direzione da N in M e $\Sigma F \cos F\hat{}X$ dovrebbe avere la direz.e opposta da M in N. Questa risultante è la misura della pressione sopportata dalla data superficie.

Se il punto poggia dalla parte convessa la press.e si eserciterà dal di dentro al di fuori e viceversa se poggia sul convesso.

§. 124. 7.° Caso.

Poniamo ancora che il punto materiale M sia soggetto a restare su due superf.e cioè sulla loro intersecaz.e ossia su di una curva a piana o a doppia curvatura.

In tale ipotesi basta all'equilibrio del punto che la risultante delle forze possa scomporsi in 2 perpendicolari alle date superficie. Essendo qui due resistenze, e però per avere il punto libero si vorranno due forze sconosciute di grandezza

e però introducendole si avranno le equazioni d'equilibrio le quali saranno

(58) $F\theta F^{\wedge}X + F'\theta F'^{\wedge}X + P\theta P^{\wedge}X + P'\theta P'^{\wedge}X + \&c = F\theta F^{\wedge}X + F'\theta F'^{\wedge}X + \Sigma P\theta P^{\wedge}X = 0,$

(59) $F\theta F^{\wedge}Y + F'\theta F'^{\wedge}Y + P\theta P^{\wedge}Y + P'\theta P'^{\wedge}Y + \&c = F\theta F^{\wedge}Y + F'\theta F'^{\wedge}Y + \Sigma P\theta P^{\wedge}Y = 0,$

(60) $F\theta F^{\wedge}Z + F'\theta F'^{\wedge}Z + P\theta P^{\wedge}Z + P'\theta P'^{\wedge}Z + \&c = F\theta F^{\wedge}Z + F'\theta F'^{\wedge}Z + \Sigma P\theta P^{\wedge}Z = 0$

Poniamo

(61) $Q = 0$

(62) $Q' = 0$, le due equazioni delle superf.^e e poniamo inoltre

(63) $V = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dz}\right)^2}}$

(64) $V' = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{dQ'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ'}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dQ'}{dz}\right)^2}}$

avremo come davanti le

(65) $\theta F^{\wedge}X = V.\left(\frac{dQ}{dx}\right),$

(66) $\theta F^{\wedge}Y = V.\left(\frac{dQ}{dy}\right),$

(67) $\theta F^{\wedge}Z = V.\left(\frac{dQ}{dz}\right),$

(68) $\theta F'^{\wedge}X = V'.\left(\frac{dQ'}{dx}\right),$

(69) $\theta F'^{\wedge}Y = V'.\left(\frac{dQ'}{dy}\right),$

(70) $\theta F'^{\wedge}Z = V'.\left(\frac{dQ'}{dz}\right)$ sost.^e

questi valori nelle (58)(59) e (60) ed eliminato di poi Π, V, Π', V' la risultante sarà la cond.e a cui Π, Π' soddisfar debbono a tener in equilibrio il punto M.

Quando esso non è dato di situazione, se si vorrà conoscere esso allora si avrà l'equaz.e di cond.e e poi le due equazioni delle superf.e e così si avranno le coord.e del punto che si cerca

Lezione 38
la 39. Ripet.e

§.125. Si prendano gli assi delle (y z) sopra un piano che passi per la normale alle 2 superficie l'asse delle x sarà la tangente comune delle due superficie. Le forze Π, Π' saranno adunque perpendicolari all'asse delle x di guisa che si avrà $\cos\Pi\hat{x}=0$, $\cos\Pi'\hat{x}=0$ per la qual cosa la (58) si muta in quella

(71) $P\cos P\hat{x} + P'\cos P'\hat{x} + \&c$
$= \Sigma P\cos P\hat{x} = 0$

che è l'equazione di cond. che deve aver luogo nella fatta ipotesi:

Essa ci mette davanti che la somma delle componenti tangenti la

(163.)

curva è nulla il che è necessario perchè il punto materiale non possa scorrere su di una tal curva.
Mediante le (59) e (60) si potranno determinare T, T' e le loro direzioni. — Poi si prendano 2 forze eguali ad T, T' applicate al med.° punto, e ridotte ad una sola, la forza che ne nasce e che è la risultante di T, T' e misura la pressione sull'intersecaz.e delle superf.e alla quale la risultante è perpend.e
Se il punto non facesse che poggiare sulla curva senza essersi attaccato sarebbe necessario che la forza premesse il punto. —

Capitolo XI

Delle pressioni contro gli ostacoli che impediscono il moto libero di 1 punto del solido in equilibrio

§.126. Quantunque nel 3° Capo §. 113 siasi supposta illimitata la resistenza del punto fisso ed indeterminata la direz.e della sua azione, nulladimeno, allorchè le forze applicate al solido si fanno equilibrio in questo punto non è necessario che una resistenza. Questa resistenza attualmente presa in senso contrario è la pressione che sul punto fisso si esercita dalle forze sollecitanti il corpo. Al §. 113 si è essa rappresentata per $-V$, e si sono trovate le

(1) $X_1 + {}_1X = 0$,

(2) $Y_1 + {}_1Y = 0$,

(3) $Z_1 + {}_1Z = 0$. Dalle quali

$X_1 = -{}_1X$,

$Y_1 = -{}_1Y$,

$Z_1 = -{}_1Z$, e le $-{}_1X$, $-{}_1Y$, $-{}_1Z$ sono le componenti di V nella direz.e dei tre assi ortogonali. Dietro ciò si avrà

$$\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = \sqrt{{}_1X^2 + {}_1Y^2 + {}_1Z^2}$$

(165.)

ma V = 1.° membro, dunque $V = \sqrt{{}_{,}X^2 + {}_{,}Y^2 + {}_{,}Z^2}$, cioè la resistenza eguale alla risultante delle forze del sistema trasportate parallele al punto fisso.

§. 127. Se un corpo non possa muoversi che intorno ad una retta inflessibile che unisce due punti d'illimitata resistenza, le pressioni contro ai due punti altro non sono che le V, V' prese con segno contrario.

Le componenti contro i punti nelle direz.i dei tre assi ortogonali sono $-{}_{,}X$, $-{}_{,}Y$, $-{}_{,}Z$, $-{}_{,,}X$, $-{}_{,,}Y$, $-{}_{,,}Z$ come dal §. 116.

A determinare queste 6 quantità si hanno le infrascritte equazioni che mettono davanti le condizioni d'equilibrio

(4) $X_{,} + {}_{,}X + {}_{,,}X = 0$,

(5.) $Y_{,} + {}_{,}Y + {}_{,,}Y = 0$,

(6) $Z_{,} + {}_{,}Z + {}_{,,}Z = 0$,

(7) $M + a_{,,}Z = 0$,

(8) $N - a_{,,}Y = 0$; e però queste dettero espresse verificate e le 6 pressioni che si vogliono determinare, il che mostrerebbe che il problema fosse indeterminato, o almeno che si po-

tesse disporre a volontà di una componente. —

Ma osserviamo, che $_{,}X, _{,,}X$ entrano solo nella (4) e quindi le (5) (6) (7) (8) bastano a determinare le altre quantità. —

Difatti dalle (7) (8) si ha

$_{,,}Z = -\frac{M}{a}$,

$_{,,}Y = \frac{N}{a}$, per cui la (5) e (6) si riducono alle

$Y_{,} + _{,}Y + \frac{N}{a} = 0$,

$Z_{,} + _{,}Z - \frac{M}{a} = 0$, e quindi avremo le

(9) $-_{,}Y = \frac{aY_{,} + N}{a}$

(10) $-_{,}Z = \frac{aZ_{,} - M}{a}$; dalla (4) si ha

$-(_{,}X + _{,,}X) = X_{,}$; è dato adunque la somma delle due componenti $-_{,}X - _{,,}X$, e di conseg.^a in generale una di esse rimane indeterminata. Le due forze $-_{,}Y$ e $-_{,}Z$ che agiscono secondo gli assi delle Y e delle Z e sono applicate sul punto A (fig 37) si compongono in una sola $\sqrt{_{,}Y^2 + _{,}Z^2}$ perpend. all'asse fiss. ed applicata in A, che fa con gli assi delle y e z gli angoli di quali $\frac{-_{,}Y}{\sqrt{_{,}Y^2 + _{,}Z^2}}$, $\frac{-_{,}Z}{\sqrt{_{,}Y^2 + _{,}Z^2}}$

sono i cosseni. Del che mostrasi che le pressioni in A e B sono necessar. determinate in grandezza e direzione: le due pressioni -v', -v' dovranno dunque risolversi di guisa, che essendo ciascheduna scomposta in altre due una secondo l'asse di rotaz. e l'altra perpendic. ad esso stesso le perpendic. abbiano i valori determinati e le altre costanti [illegible] eguali all'[illegible].

§. 128. Per vedere d'onde derivi in generale una così fatta determinaz. che dipende da x, x, alle quali i punti A, B fissi devono opporre nella retta che li congiunge, si osservi che i due punti si suppongono uniti da una retta inflessibile, e quindi essi si prestano reciproco appoggio, dimodochè ciascuno trova da se st. mezzo dell'altro una resistenza per l'equilibrio, perchè la somma di qste resistenze sia sufficiente p l'equilibrio.

§. 129. Allorchè il corpo si appoggia ad un piano con quanti

ti punti si voglia A, B, C, D &c. §. 121, le resistenze altro non sono che ,z ,,z ,,,z &c. per determinare le quali si hanno le

(11) $z_{,} + {}_{,}z + {}_{,,}z + \&c = 0$,

(12) $I_{,} - b''{}_{,,}z - b'''{}_{,,,}z - \&c = 0$,

(13) $M + a'{}_{,,}z + a''{}_{,,,}z + a'''{}_{iv}z + \&c = 0$.

Inoltre si ha la cond.e che ,z ,,z, &c. sieno tutte dello stesso segno. Dunque in generale si dovrà conchiudere che in tal caso il problema è indeterminato se i punti son più di 3.

Quando sono tre, avremo le tre equazioni

(14) $z_{,} + {}_{,}z + {}_{,,}z + {}_{,,,}z = 0$

(15) $I_{,} - b''{}_{,,,}z = 0$.

(16) $M + a'{}_{,,}z + a''{}_{,,,}z = 0$. Se il punto C cade come gli altri due sull'asse delle x, allora $b'' = 0$, e ,,,z sparirà dalla (15). In tal caso a determinare le ,z ,,z ,,,z non avremo che le (14) e (16) che non bastano all'uopo. Dunque anche in tal caso il problema riesce indeterminato.

(169.)

Nel caso generale converrà che siano date le pressioni di tutti i punti salvo 3 che non sieno sulla medesima retta, le di cui pressioni verranno determinate dalla (14) (15) (16) nelle differenti supposizioni che si facevano.

§. 130. Si è al §. 60 sciolto un problema che dipende dalla (fig.ª 11) allorchè si hanno i tre punti d'appoggio A, B, C, e P P', P'' le pressioni contro di loro esercitate, essendo R, la risultante applicata in G, si è vedu. che si hanno le eguagl.

(17) $P = \frac{BGC}{ABC} R,$

(18) $P' = \frac{ACG}{ABC} R,$

(19) $P'' = \frac{ABG}{ABC} R;$ se i tre punti A B, C sieno sulla medesima retta si ha $ABC = 0$, $BCG = 0$ $ACG = 0$, $ABG = 0$, e quindi $P = \frac{0}{0}$, $P' = \frac{0}{0}$ $P'' = \frac{0}{0}$ e il problema riesce ind.º Sommando le (17) (18) (19) si ha

$P + P' + P'' = \frac{BGC + ACG + ABG}{ABC} R,$ $= R$, come dev' essere

§. 131. Le equazioni di cond.e (1)(2)(3)
debbono sussistere in ogni caso
d'equilibrio fra le forze che
animano il corpo il quale
poggia sul piano su quan-
ti punti A, B, C, D &c; i
ma quando i punti son
tre ovvero anche più di 3
che sono sulla med.a retta
facendo astrazione dalle fi-
siche proprietà del corpo,
il calcolo non dà ciascun
pressione sul punto d'ap-
poggio quantunque essi
si risentano veramente.
Tutti i corpi sono più
o meno flessibili ed ela-
stici, e quando premo-
no con diversi loro pun-
ti un piano, la pres-
sione totale si distri-
buisce sui punti in
una maniera parti-
colare che dipende
dalle qualità dei corpi
e dalle tre equazioni
d'equilibrio che aver
debbono luogo. Per aver
dunque da che determi-
nare ciascuna pressione
dipend.te dalle qualità
fisiche dei corpi tro-
vare tante equazioni
che unite a quelle di
equilibrio fossero tante
quanti i punti d'appog-

e che fossero idonei alla determinazione delle proposte questioni di Fisica &c.

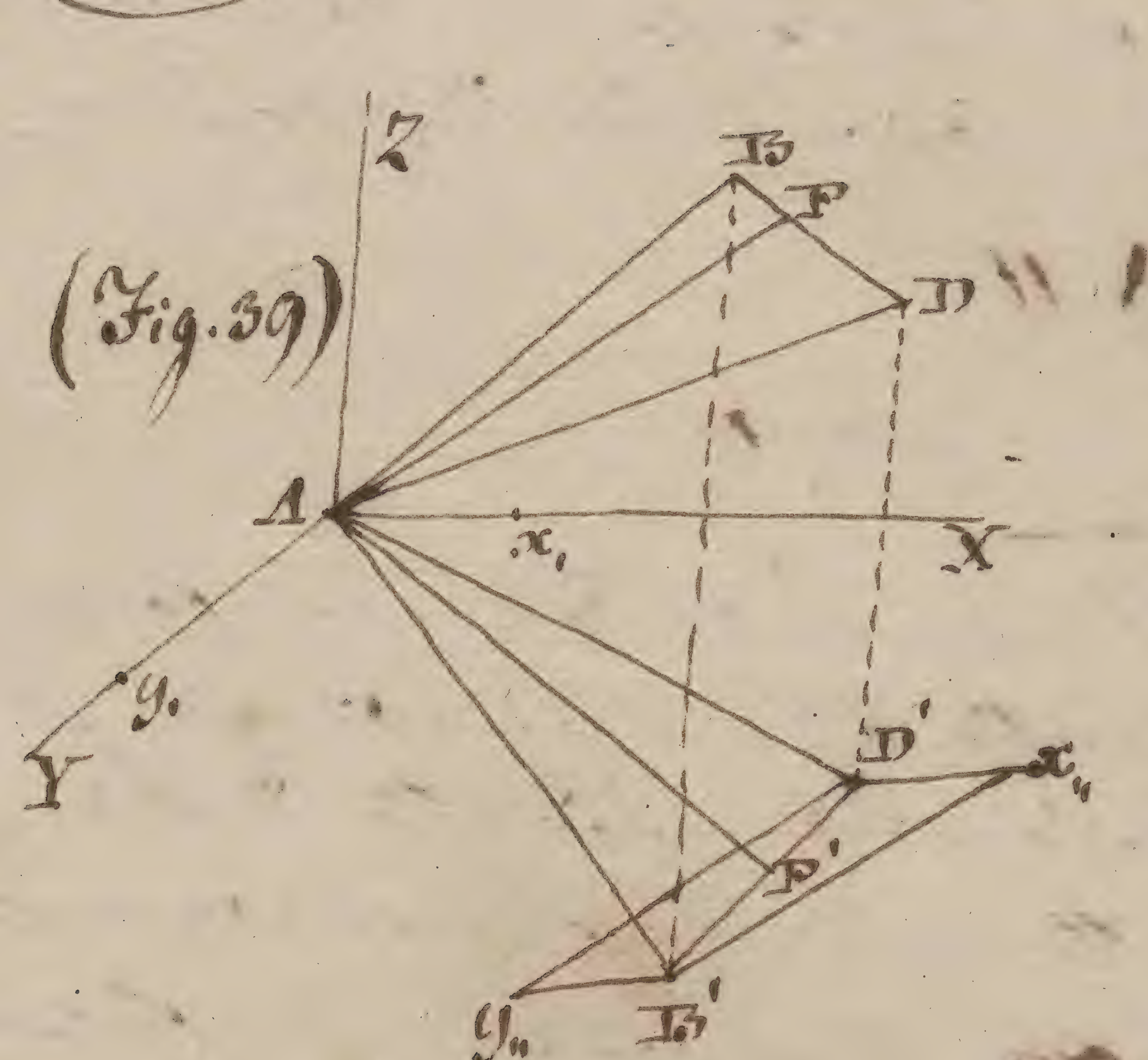
Capitolo XII.

(1.a parte)

Dei momenti relativi ad un punto

§.132. Il momento di una forza rispetto ad un punto, ha per valore il prodotto della retta che rappresenta colla sua lunghezza la forza, nella perpendicolare che dal punto si conduce sulla direzione di lei §. 21. Così fatto momento misura l'energia della coppia che si ha trasferendola ad un punto, e però il momento di una forza è doppio dell'area di un triangolo formato dalla perpendic.re altezza e forza. —

Dunque il detto al §. 28. &c. si adatta ai momenti. Poniamo che x, y, z siano le coordinate ortogonali del punto d'applicazione del centro dei momenti; il momento di P, sarà pP. Sia (fig. 34) l'intensione di P rappresentata da BD, e condotta da A la AP perpendicolare a BD, sarà AP = p, e il momento di P relativo ad A come centro



(Fig. 39)

sarà doppio il valore dell'
area del triangolo ADB.
Dagli estremi della BD
si protraggano sul piano
(x.y) le perpendicolari
BB', DD' e uniti i punti
d'incontro B'D' sarà B'D'
la projezione di BD.
Siano $Ax_1 = P\cos P\hat{X}$ e
$Ay_1 = P\cos P\hat{Y}$ le
componenti di P secon-
do gli assi AX ed AY ap-
plicate in A. Mediante
l'introduzione di 2 coppie
si può trasportare il
loro punto d'applicazio-
ne da A in D', e siano $D'x_{11}$
e $D'y_{11}$. Compiuto il paral-
lelogrammo D'B', sarà
D'B' risultante delle $D'x_{11}$,
$D'y_{11}$ la prima $= P\cos P\hat{X}$
e la 2.a $= P\cos P\hat{Y}$. Da A
si protragga AF' perpend.
a B'D', e sarà AF'.B'D' il
momento della forza B'D':
così $D'x_{11} = YP\cos P\hat{X}$, $xD'y_{11} = xP\cos P\hat{Y}$, sono
momenti delle forze $D'x_{11} = AX$
e $D'y_{11} = P\cos P\hat{X}$, si osservi
che le azioni dei due mo-
menti $YP\cos P\hat{X}$, $xP\cos P\hat{X}$
sono contrarj e però la
loro somma, è
$YP\cos P\hat{Y} - xP\cos P\hat{X}$ ma il
momento della risultante
eguaglia la somma dei mo-

(173.)

menti delle componenti relativi al punto stesso, dunque l'area del triangolo, è la metà della somma dei momenti. Ma AP'D' è la projezione del triangolo APD; ~~dunque la projezione è doppia dell'area del triangolo obbiettivo~~.

Lo stesso si direbbe rispetto agli altri piani. Dunque

$y P \cos P\hat{}X - x P \cos P\hat{}y$

$x P \cos P\hat{}Z - z P \cos P\hat{}X$

$z P \cos P\hat{}Y - y P \cos P\hat{}Z$ sono le projezioni sui piani coordinati del momento P.p.

Dunque quello che si è detto all' Introd. Cap. citato si adatta ai momenti.

Lezione 40.

Ricordiamo che

$L = \Sigma P(z \cos P\hat{}Y - y \cos P\hat{}Z)$

$M = \Sigma P(x \cos P\hat{}Z - z \cos P\hat{}X)$

$N = \Sigma P(y \cos P\hat{}X - x \cos P\hat{}Y)$

Se π rappresenti la perpendicolare ad un piano che passi pel centro dei momenti condotta dall'origine e D sia la somma dei momenti projettati su questo piano, per ciò al N. 670 I. avremo

(1) $D = L \cos \pi\hat{}X + M \cos \pi\hat{}Y + N \cos \pi\hat{}Z$

Un teorema analogo si è dimostrato al N. 167.

Ora tutti i piani che passano pel centro dei momenti, uno ve n'ha la cui somma è massima ed $= \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$

(176)

Sia π' la perpend. condotta dal piano della massima somma delle projezioni dei momenti, e la situazione di lui viene data dalle

(2) $\theta \pi'{}^{\wedge} X = \dfrac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$,

(3) $\theta \pi'{}^{\wedge} Y = \dfrac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$,

(4) $\theta \pi'{}^{\wedge} Z = \dfrac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$. —

Sia δ l'angolo che il piano che passa per l'origine delle coordinate cui π è perpendicolare fa col piano al quale è perpendicolare π', la somma delle projezioni sul piano di cui π è perpendicolare sarà presentata da

$\sqrt{L^2+M^2+N^2} \cdot \theta\delta = \sqrt{L^2+M^2+N^2} \cdot \theta \pi^{\wedge}\pi'$. Si osservi che L, M, N rappr. rispett. le somme dei momenti sui piani (y, z) (x, z) (x, y) e considerare si possono come tre momenti ovveramente come l'energia di tre coppie essistenti in tre piani. — Il piano sul quale trovasi la massima somma dei momenti dicesi piano principale, e la

(175)

massima somma, momento principale. Dalla scritta equazione si vede che se i due piani sono ad angolo retto la mass.a somma è nulla, e si mantiene la stessa per tutti i piani che fanno lo stesso angolo col piano principale.

§. 133. Cambiando il centro de' momenti, per ogni punto ove esso si trasporti si troverà sempre il piano principale relativo a questo punto. E' facile a vedere che il limite in più non esiste, ma si può bensì cercare la situazione del centro dei momenti per il quale può aver luogo un minimo. Se $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ il momento principale $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$ è nullo, e le forze del sistema hanno una risultante. Cambiando origine e conservando i nuovi assi paralleli ai primi; dette x_1, y_1, z_1 le coordinate della nuova origine, sul quale si vuol trasportare il centro dei momenti de' relativi ~~punti d'appl.e delle~~ P, P' ecc

allora a vece di x, y, z si deve porre $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, onde avvene per L', M', N' ciò che divente L, M, N, si avrà

(5) $L' = P\left((z - z_1)\,\theta\,\widehat{PY} - (y - y_1)\,\theta\,\widehat{PZ}\right) + P'\left((z' - z_1)\,\theta\,\widehat{P'Y} - (y' - y_1)\,\theta\,\widehat{P'Z}\right) + \ldots$

(6) $M' = P\left((x - x_1)\,\theta\,\widehat{PZ} - (z - z_1)\,\theta\,\widehat{PX}\right) + P'\left((x' - x_1)\,\theta\,\widehat{P'Z} - (z' - z_1)\,\theta\,\widehat{P'X}\right) + \ldots$

(7) $N' = P\left((y - y_1)\,\theta\,\widehat{PX} - (x - x_1)\,\theta\,\widehat{PY}\right) + P'\left((y' - y_1)\,\theta\,\widehat{P'X} - (x' - x_1)\,\theta\,\widehat{P'Y}\right) + \text{ecc}$

ovvero

(8) $L' = P(z\,\theta\,\widehat{PY} - y\,\theta\,\widehat{PZ}) + P'(z'\,\theta\,\widehat{P'Y} - y'\,\theta\,\widehat{P'Z}) + \text{ecc}$

(9) $M' = P(x\,\theta\,\widehat{PZ} - z\,\theta\,\widehat{PX}) + P'(x'\,\theta\,\widehat{P'Z} - z'\,\theta\,\widehat{P'X}) + \text{ecc} + z_1(P\,\theta\,\widehat{PX} + P'\,\theta\,\widehat{P'X} + \text{ecc}) - x_1(P\,\theta\,\widehat{PZ} + P'\,\theta\,\widehat{P'Z} + \text{ecc})$;

(10) $N' = P(y\,\theta\,\widehat{PX} - x\,\theta\,\widehat{PY}) + P'(y'\,\theta\,\widehat{P'X} - x'\,\theta\,\widehat{P'Y}) + \text{ecc} + x_1(P\,\theta\,\widehat{PY} + P'\,\theta\,\widehat{P'Y} + \text{ecc}) - y_1(P\,\theta\,\widehat{PX} + P'\,\theta\,\widehat{P'X} + \text{ecc})$;

ovveramente

(11) $L' = L + y_1 Z_1 - z_1 Y_1$

(12) $M' = M + z_1 X_1 - x_1 Z_1$

(13) $N' = N + x_1 Y_1 - y_1 X_1$.

Se abbiasi $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$, le (11) (12) (13) si riducono alle

(14) $L' = L$, ~~+y~~

(15) $M' = M$

(16) $N' = N$.

stanti queste equazioni, i se-
condi membri delle (2) (3)
e (6) che danno i coseni
non variano. Il momento
principale si mantiene
il medesimo qualunque
sia la situazione del cen-
tro dei momenti. Ma quan-
do $X_1 = 0, Y_1 = 0, Z_1 = 0$, le
forze P, P', P'' ecc. non
hanno risultante uni-
ca; dunque se le forze
non abbiano risultante
unica nelle fatte ipotesi,
si il momento principa-
le è costante e giacciono
su piani paralleli e si
riferiranno a qualunque
punto dello spazio si
trasporterà il ~~mom~~
centro dei momenti.

§. 126. Il momento principa-
le relativo al nuovo cen-
tro è dato dalle

$$(17)\quad \sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2} = \sqrt{(L + y_1 Z_1 - z_1 Y_1)^2 + (M + z_1 X_1 - x_1 Z_1)^2 + (N + x_1 Y_1 - y_1 X_1)^2}$$

sost. i valori ...

Questa è una funzione
di $x_1\, y_1\, z_1$ che determi-
nare si deve di guisa
che il momento princi-
pale relativo al nuovo
centro sia minimo, e

(178.)

però eguagliare allo zero le derivate del 2.° membro all'uopo. Prendendo queste derivate si avrà

(18) $(N + x_1 Y_1 - y_1 X_1) Y_1 - (M + z_1 X_1 - x_1 Z_1) \times Z_1 = 0.$

(19) $(L + y_1 Z_1 - z_1 Y_1) Z_1 - (N + x_1 Y_1 - y_1 X_1) \times X_1 = 0.$

(20) $(M + z_1 X_1 - x_1 Z_1) X_1 - (L + y_1 Z_1 - z_1 Y_1) \times Y_1 = 0.$ Ovvero aggiungendosi

(21) $x_1 (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) = x_1 X_1^2 + y_1 X_1 Y_1 + z_1 X_1 Z_1 + M Z_1 - N Y_1$

(22) $y_1 (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) = y_1 Y_1^2 + z_1 Y_1 Z_1 + x_1 Y_1 X_1 + N X_1 - L Z_1$

(23) $z_1 (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) = z_1 Z_1^2 + x_1 X_1 Z_1 + y_1 Y_1 Z_1 + L Y_1 - M X_1$

Ma X_1, Y_1, Z_1, rappresentano le somme delle componenti delle forze del sistema secondo gli assi coordinati; e queste forze trasportate all'origine hanno una risultante che eguaglierà la somma dei loro quadrati presane la radice, e si avrà $R = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$, e posto R^2 invece dei quadrati nelle (21) (22) (23) avremo le

(24) $x_1 R^2 = X_1 (x_1 X_1 + y_1 Y_1 + z_1 Z_1) + M Z_1 - N Y_1.$

(25) $y_1 R^2 = Y_1(x_1 X_1 + y_1 Y_1 + z_1 Z_1) + NX_1 - LZ_1$

(26) $z_1 R^2 = Z_1(x_1 X_1 + y_1 Y_1 + z_1 Z_1) + LY_1 - MX_1$. Col mezzo delle quali si dovrebbero determinare le coord.e x_1, y_1, z_1 per aver il centro del momento principale. Ma basta che queste sussistano indipendentemente l'una dall'altra e nello stesso tempo.

Per ciò sapere basterà far una combinazione con 2. di queste e ne deve venire una equazione identica.

Moltiplicate rispettivamente queste equazioni per X_1, Y_1, Z_1 la somma dei prodotti riducesi alla

(27) $R^2(x_1 X_1 + y_1 Y_1 + z_1 Z_1) = (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)(x_1 X_1 + y_1 Y_1 + z_1 Z_1) + MX_1 Z_1 - NX_1 Y_1 + NX_1 Y_1 - LY_1 Z_1 + LY_1 Z_1 - MX_1 Z_1 - - = R^2(x_1 X + y_1 Y + z_1 Z)$ che è vera per identità di termini. Dunque dovrem concludere che una delle (24) (25) (26) è necessaria conseg.a delle altre 2 e però non sono idonee alle

(180)

determinaz.^e delle coord. del centro dei momenti a cui corrisponde il minimo. —

Dunque converrà dire che vi siano più centri che corrispondano al piano dei momenti principali. —

Combinando 2 a 2 le (24), (25), (26) si eliminerà successivamente $x_1X_1 + y_1Y_1 + z_1Z_1$, — e si avranno le infrascritte equazioni: —

dalle (24)(25) $x_1Y_1R^2 - y_1X_1R^2 = MY_1Z_1 - NY_1^2 - NX_1^2 + LX_1Z_1$,

dalle (24) e (26) $x_1Z_1R^2 - z_1X_1R^2 = MZ_1^2 - NY_1Z_1 - LX_1Y_1 + MX_1^2$ —

dalle (25) e (26) $y_1Z_1R^2 - z_1Y_1R^2 = NX_1Z_1 - LZ_1^2 - LY_1^2 - MX_1Y_1$, ovvero

$x_1Y_1R^2 - y_1X_1R^2 = MY_1Z_1 - N(R^2 - Z_1^2) + LX_1Z_1$

$x_1Z_1R^2 - z_1X_1R^2 = M(R^2 - Y_1^2) - NY_1Z_1 - LX_1Y_1$,

$y_1Z_1R^2 - z_1Y_1R^2 = NX_1Z_1 - L(R^2 - X_1^2) + MX_1Y_1$ ovvero avremo

(28) $x_1Y_1 - y_1X_1 - N = \frac{LX_1 + MY_1 + NZ_1}{R^2}Z_1$

(29) $z_1X_1 - x_1Z_1 + M = \frac{LX_1 + MY_1 + NZ_1}{R^2}Y_1$

(30) $y_1Z_1 - z_1Y_1 + L = \frac{LX_1 + MY_1 + NZ_1}{R^2}X_1$

equazioni che derivano dalle (24) (25) e (26) che non sussistono indipendentemente l'una dall'altra, dunque tali saranno le (28) (29) (30) che rapp.e le projezioni sui piani coordinati della retta dei centri principali minimi. Ma quando le forze hanno risultante unica, allora

(31) $L_1X_1 + MY_1 + NZ_1 = 0$ pel §. 98. Dunque allorchè le P, P', P'' hanno risultante unica le (28) (29) (30) si riducono alle

(32) $x_1Y_1 - y_1X_1 + N = 0$,

(33) $z_1X_1 - x_1Z_1 + M = 0$,

(34) $y_1Z_1 - z_1Y_1 + L_1 = 0$; dunque in questo caso le projezioni sui piani coordinati della linea dei centri principali vengono presentate dalle (32) (33) (34). Ma si è vedu.o al §. 98 che sono pure le direzioni delle forze sollecitanti il sistema purchè $X', Y', Z' = 0$.

Lezione 41.

Il momento principale che ha le coord.e x_1, y_1, z_1 è presentato dalla

$$(17)\ \sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}=\sqrt{(L+y_1Z_1-z_1Y_1)^2+(M+z_1X_1-x_1Z_1)^2+(N+x_1Y_1-y_1X_1)^2}$$

In virtù delle (11) (12) (13) si ha che essa è $=0$.

Quando adunque le forze P, P', P'' ec. hanno risultante unica cioè sussiste la (31) senza che sia $X_1=0$, $Y_1=0$, $Z_1=0$, i centri dei momenti minimi sono nulli e sono sulla direz.e della risultante.

Se non sussiste la (31) e perciò ne anche le (32) (33) e (34), si ha

$$(35)\ \sqrt{(L+y_1Z_1-z_1Y_1)^2+(M+z_1X_1-x_1Z_1)^2+(N+x_1Y_1-y_1X_1)^2}=\frac{\sqrt{(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2)(LX_1+MY_1+NZ_1)^2}}{R^2}=\frac{LX_1+MY_1+NZ_1}{R};$$

ma quando vi ha risultante unica esser debbe $LX_1+MY_1+NZ_1=0$, dunque la condizione consiste in ciò che il momento principale minimo esser deve nullo.

(183.9) (5.)

§.135. Poniamo la

(36) $\sqrt{(LX_1+MY_1+NZ_1)(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2)}=$ $=R$; innalzando a quadrato si avrà la

(37) $(LX_1+MY_1+NZ_1)(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2)=R^2$;

che rappresenta una superficie cilindrica di cui la direttrice è un circolo, e la generatrice una retta parallela a quella data dalle (28) (29) e (30).

Per ciò dimostrare basta provarlo per una particolare situazione degli assi. —

Poniamo che l'asse coord. delle X sia parallelo alla direzione di R, ed allora si avrà $X_1=R$, $Y_1=0$, $Z_1=0$, e quindi dalle fatte ipotesi dalla (37) si avrà dalla (35)

(38) $(M+z_1R)^2+(N-y_1R)^2=R^2-L^2$

che rappresenta un circolo sul piano (y,z) e però rappresenterà ancora la superficie cilindrica elevata su di esso, e le (28) (29) (30) in tal caso si riducono alle $-y_1R+N=0$, e

$z_1R+M=0$, $L=L_1$; le 2 prime rappresentano le projezioni sui piani (x,y) (x,z) di una retta parallela all'asse delle X. —

§. 136. Confrontando la (2) (3) e (4) colle (84) (85) (86) del §. ... ed osservando che π' è perpend. al piano della mass. somma dei momenti, e che G. è perpendicolare al piano della coppia risultante, inoltre che G, L, M, N rappresentano i valori numerici delle stesse quantità, si dimostra che il piano della coppia risultante è parallello al piano principale. Ma quando le forze hanno risultante unica, la direzione di lei riuscir deve parallella al piano della coppia risultante, dunque se essa c'ha dev' esser parallella al piano del momento principale comunque sia situato il centro dei momenti nello spazio.

§. 137. Sia π' perpend. ad un piano che passa per l'origine che verrà presentato dalla

(39) $\cos\pi'\hat{X} . x + \cos\pi'\hat{Y} . y + \cos\pi'\hat{Z} . z = ...$

come si ved. all' Introd. Se in queste si sostituiscono i valori dei coseni dati dalle

(185.)

(21)(3)(4) si ha la

(40) $L_1 x + My + Nz = 0$. Le equazioni delle projezioni sui piani (x,z) (y,z) della risultante R_1 delle forze, sono le

(41) $M - x_1 Z_1 + z X_1 = 0$,

(42) $L_1 - z Y_1 + y Z_1 = 0$, e debbe aver luogo l'equazione di cond.

(43) $L X_1 + M Y_1 N Z_1 = 0$. come al §.98. La cond. perchè la retta presentata dalle (41)(42) sia parallela al piano delle (40) si è ved. d. che deve aver luogo la

(44) $N + \frac{L X_1}{Z_1} + \frac{M Y_1}{Z_1} = 0$, che togliendo il denom. viene la (43) e però resta verificata la condizione. —

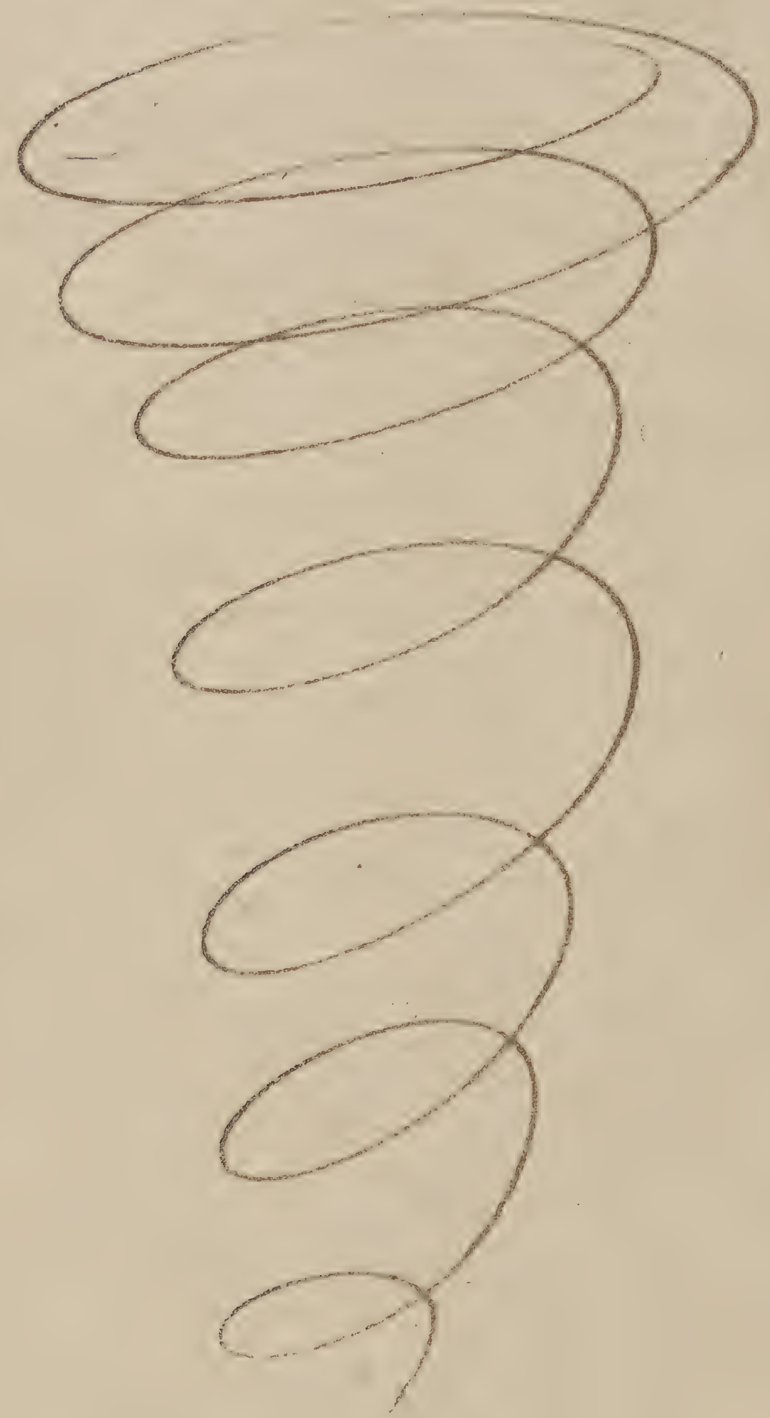
Perchè la risultante sia situata sul piano principale deve sussistere la

(45) $L_1 \frac{M}{Z_1} - M \frac{L_1}{Z_1} = 0$, che è verificat. Dunque si deb. be concludere che tal risultante giace sul piano principale.

§.138. Se $L_1 = 0$, $M = 0$ $N = 0$ le forze hanno una risultante unica che passa l'origine come si è ved. e si ha

$\sqrt{L_1^2 + M^2 + N^2} = 0$ come dev'esser

e si è dimostrato al S. 136.



(187)

Capitolo XVI.

Della determinazione dei centri di gravità

§. 139. La gravità è la cagione per cui i corpi abbandonati a se stessi cadono verso il centro della terra, la quale produce moto, e però la considereremo come una forza o potenza.

La gravità agisce su tutte le molecole di un corpo come lo conferma le esperienze di una palla di piombo ed una piuma nel vuoto.

Laonde conchiudere si debbe che la gravità si esercita sopra ciascuna molecola dei corpi.

Essa varia dall'equatore ove è minima fino al polo dove è massima.

Inoltre l'intensione della gravità diminuisce conservandosi la molecola alla stessa distanza dall'equatore diminuisce in ragion reciproca dei quadrati della distanza dal centro della terra.

Ma nelle molecole che si considerano nella statica non danno luogo

a variazioni calcolabili, ora la considereremo costante.

§. 140. La direzione della gravità è presentata dalla direzione di un filo a piombo in equilibrio, ovveramente dalla perpendicolare alle acque stagnanti.

La direzion della gravità in un luogo dicesi verticale, e il piano sottoposto orizzontale.

La figura della terra è pressocchè sferica, di modo che mutandosi nella superficie terrestre le situazioni delle molecole cambiano le verticali e i piani orizzontali; ma le distanze che si calcolano sono piccoli in confronto del raggio terrestre 6'366198 metri; così le direzioni delle verticali sono tra se parallele concorrendo in un angolo piccolissimo.

Supporremo adunque che tutte le molecole di un corpo siano sollecitate da forze eguali parallele ed agenti nella med. direzione, e quindi potremo applicare il detto per le forze parallele alla gravità.

§. 141. Concluderemo che la direzion

189.

delle forze di gravità di un corpo è verticale e parallela alla direzione della gravità. La sua intensione è ciò che dicesi peso del corpo. Laonde il peso di un corpo è proporzionale al N°. delle molecole del corpo cioè alla massa. Conviene distinguere il peso da gravità.

§. 142. Si è veduto al §. 38 che le forze parallele applicate a diversi punti formanti un sistema invariabile hanno un centro, cioè un punto pel quale passano le loro successive risultanti allorchè si cambia situazione alle forze conservandole però sempre parallele, e però si un corpo pesante esiste un punto pel quale passa la direzione del suo peso, allorchè si cambia la situazione di lui relativamente ad un piano orizzontale.

Difatti, nelle diverse direzioni, la gravità delle molecole non cambiano e però neppure il punto d'applicazione della loro risultante. Ma tal pun-

to dicesi centro d'inerzia da
Eulero, ma più comunemente
centro di gravità.

§. 143. Se il centro di gravità sia
fisso esso sarà in equilibrio
qualunque sia la posizione
che le si dia poichè la ri-
sultante passerà sempre
pel centro fisso ed ivi resti-
elisa. È poi evidente che
ciascun corpo ha il suo cen-
tro di gravità.

§. 144. Poichè il centro di gravità
di un corpo è il centro delle
forze parallele applicate
ad ogni punto di lui che
si considerano senza erro-
re eguali, ne conseguita
§. 81 che la sua distanza da
un piano sarà eguale
alla somma delle ~~forze~~ distanze divise
pel loro numero; dunque
l'intensione dipende solo dalla
posiz.e delle molecole, perciò
è anche detto il centro di gravità
centro di massa o di figura.

§. 145. Della stessa guisa ~~[illegible]~~ considerando
si possono le forze di gravità
le quali sollecitano un corpo
presentate dalla risultante
ed il centro di gravità come
un punto nel quale tutta
la massa sia unita. Così se
in un corpo si vuole aver

191.°

riguardo alla gravità, si potrà considerare come una forza applicata al suo centro, ed eguale al peso del corpo; e combinando questa forza con le altre si potrà considerare come prior di gravità e da essa prescindere.

§.146. Allorchè si può considerare il corpo come un sistema di corpi composti di parti delle quali si conoscono i centri di gravità rispettivi, agevole riesce di determinare il centro di gravità di tutto il corpo, e a dir vero essendo il centro di gravità il punto d'applicazione della risultante delle forze di gravità tutte, basterà trovare la risultante dei diversi suddetti corpi, e quindi il punto d'applicazione cercato.

Laonde se conosconsi i centri di gravità de' diversi corpi, si considereranno in essi applicati i rispettivi pesi e così dopo si trova il centro di gravità del sistema come per le forze parallele e ciò si potrà fare colla composizione delle forze parallele o coi momenti come si è fatto al §. — La distanza dell centro delle forze pa-

valelle da un piano si trova dividendo la somma dei momenti delle forze per rispetto al piano, ~~divisa~~ la somma ~~per la somma~~ delle forze se il piano è verticale, la distanza del centro di gravità del sistema dal piano eguaglia la somma dei momenti dei pesi nelle rispettive distanze dal piano, divisa la somma, per la somma dei pesi: ma le masse sono proporzionali ai pesi, dunque la distanza del centro di gravità di un corpo da un piano, eguaglia la somma delle masse divisa pel loro numero. —

Lezione 41ª

§. 147 Appoggio al detto al §. 146 la posiz.e del centro di gravità di un corpo non dipende che da quelle delle sue molecole e però dipende esso 1°. Dalla figura del corpo cioè dalla figura o spazio occupato dal corpo, che ne determina il volume 2°. Dalla sua densità relativa delle differenti parti — e di vero se il volume restando il medesimo le molecole si accostino più dall'una che dall'altra parte la forza di gravità che agisce su di loro non essendo più scompartita nello

stessa maniera cambierà la situazione della risultante e però del centro di gravità del corpo. E però si dovrebbe avere riguardo non solo alla figura, ma alla maniera con cui varia la densità del corpo.

Per rendere il problema più semplice si suppongono i corpi uniformemente densi in tutti i punti, ed allora la posizione del centro di gravità del corpo non dipenderà che dal volume, cioè alle masse si potranno sostituire i volumi.

§.148. Calcolando le distanze del centro di gravità da tre piani qualunque che porremo ortogonali, conosceremo la di lui situazione

§.149. Allorchè il piano rispetto al quale si computano i momenti passa pel centro di gravità, sarà nulla la somma dei momenti relativi al piano stesso, e però la somma dei momenti delle masse che sono da una parte di tal piano eguaglia la somma dei momenti della parte opposta. —

e per converso quando tal somma sia nulla il centro di gravità è sul piano stesso.

§. 150. Deriva quindi che se i centri delle parti di un sistema siano sul medesimo piano, il centro di gravità del sistema sarà sul medesimo piano, e se sulla medesima retta, sarà sulla medesima retta.

Poichè tutti i corpi hanno i loro centri di gravità sul piano e però i momenti delle loro masse al piano saranno nulli, e però ancora nulla sarà la distanza del centro di gravità del sistema dal piano &c.

Così per la retta, se si facciano passare per essa due piani i centri di gravità saranno su di essi piani. Ma il centro di gravità del sistema deve trovarsi su tutti due. Dunque

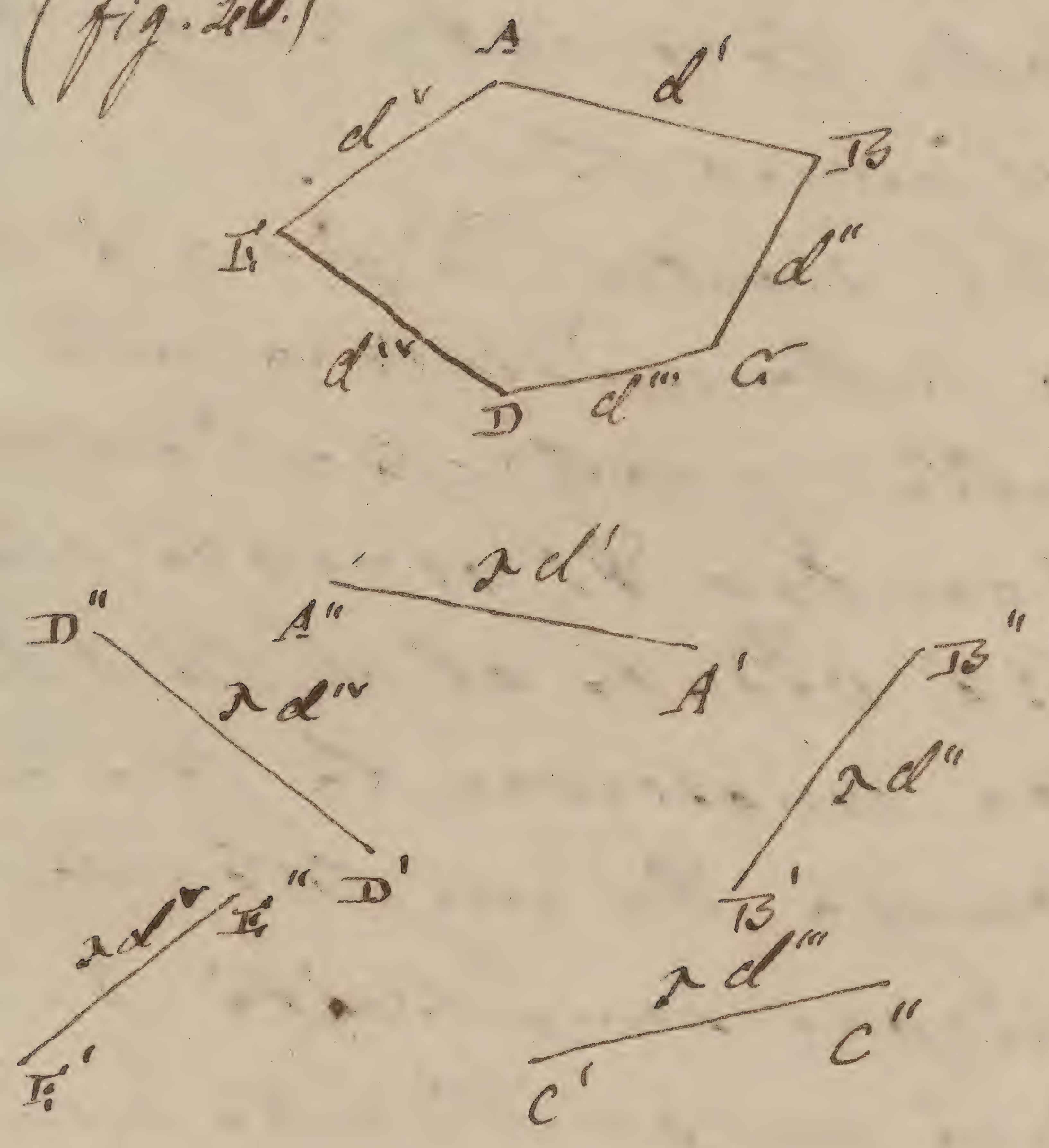
§. 151. Quando tutti i centri di gravità dei corpi si trovano sul medesimo piano innallora basta per trovare il centro di gravità determinarne la sua distanza

re da due piani. E però se si prendano i due piani perpendicolari, in tal caso sarà noto il centro di gravità del sistema quando si conoscano le distanze dalle loro intersecazioni col piano 1.° ——

§.152. Se i centri di gravità sieno sulla medesima retta, sulla quale esser debbe il centro di gravità come si è veduto al §.149 basta conoscere la sua distanza da un solo piano che per semplicità si prenderà perpend.e alla retta dei centri. E però le distanze dei rispettivi centri dal piano sarà la stessa che la somma dei momenti delle masse relativi al punto e divisa per la somma delle masse.

§.153. Prima di venire alla determinazione dei centri di gravità porremo davanti alcuni teoremi per tale determinazione, i quali derivano da ciò che si è detto nell'introduzione al Calcolo sui poli-

(fig. 40)



goni a semplici o doppia inclinaz.e

Sia fig. 42 il poligono EABCD, e si prendan nello spazio tanti punti A', B', C', D', E' cioè tanti quanti sono i vertici del poligono, e da essi si protraggano le A'A'' parallele AB, ec.: sia A'A'' = λd' posto AB' = d' ec. e così sia B'B'' = d''λ

C'C'' = λd'''
D'D'' = λ d'''
E'E'' = λ d^{iv}

Siano $(x', y', z'), (x'', y'', z'')$ $(x''', y''', z'''), (x^{iv}, y^{iv}, z^{iv})$ ec. le coord.e dei punti A', B', C', D' ec. e siano $(x_1', y_1', z_1'), (x_1'', y_1'', z_1'')$ $(x_1''', y_1''', z_1''') (x_1^{iv}, y_1^{iv}, z_1^{iv})$ le coordinate dei punti A'', B'', C'', D'' ec. Posti gli assi coord.i ortogonali dipend.e dall'i.a si avranno le seg.ti equazioni

$x_1' = x' + \lambda d' \theta d'\hat{x},$

$x_1'' = x'' + \lambda d'' \theta d''\hat{x},$

$x_1''' = x''' + \lambda d''' \theta d'''\hat{x},$

197.°

$$x_{,}^{iv} = x^{iv} + \lambda d^{iv}\theta d^{iv}\hat{x},$$

$$y_{,}' = y' + \lambda d'\theta d'\hat{y},$$
$$y_{,}'' = y'' + \lambda d''\theta d''\hat{y},$$
$$y_{,}''' = y''' + \lambda d'''\theta d'''\hat{y},$$
$$y_{,}^{iv} = y^{iv} + \lambda d^{iv}\theta d^{iv}\hat{y}.$$

$$z_{,}' = z' + \lambda d'\theta d'\hat{z}$$
$$z_{,}'' = z'' + \lambda d''\theta d''\hat{z}$$
$$z_{,}''' = z''' + \lambda d'''\theta d'''\hat{z}$$
$$z_{,}^{iv} = z^{iv} + \lambda d^{iv}\theta d^{iv}\hat{z}$$

---

e quindi sommando si ha

$$x_{,}' + x_{,}'' + x_{,}''' + x_{,}^{iv} + \&c = x' + x'' + x''' + x^{iv} + \&c + \lambda(d'\theta d'\hat{x} + d''\theta d''\hat{x} + d'''\theta d'''\hat{x} + d^{iv}\theta d^{iv}\hat{x})$$

$$y_{,}' + y_{,}'' + y_{,}''' + y_{,}^{iv} + \&c = y' + y'' + y''' + y^{iv} + \&c + \lambda(d'\theta d'\hat{y} + d''\theta d''\hat{y} + d'''\theta d'''\hat{y} + d^{iv}\theta d^{iv}\hat{y})$$

$$z_{,}' + z_{,}'' + z_{,}''' + z_{,}^{iv} + \&c = z' + z'' + z''' + z^{iv} + \&c + \lambda(d'\theta d'\hat{z} + d''\theta d''\hat{z} + d'''\theta d'''\hat{z} + d^{iv}\theta d^{iv}\hat{z})$$

Ma

$$d'\theta d'\hat{x} + d''\theta d''\hat{x} + d'''\theta d'''\hat{x} + d^{iv}\theta d^{iv}\hat{x} + \&c = 0,$$

$$d'\theta d'\hat{y} + d''\theta d''\hat{y} + d'''\theta d'''\hat{y} + d^{iv}\theta d^{iv}\hat{y} + \&c = 0$$

$$d'\theta d'\hat{z} + d''\theta d''\hat{z} + d'''\theta d'''\hat{z} + d^{iv}\theta d^{iv}\hat{z} \&c = 0,$$ dunque

si avranno le equazioni

198.°

(1.) $x'_1 + x''_1 + x'''_1 + x^{\text{iv}}_1 + \&c = x' + x'' + x''' + x^{\text{iv}} + \&c$

(2.) $y'_1 + y''_1 + y'''_1 + y^{\text{iv}}_1 = y' + y'' + y''' + y^{\text{iv}} \&c$

(3.) $z'_1 + z''_1 + z'''_1 + z^{\text{iv}}_1 = z' + z'' + z''' + z^{\text{iv}} \&c$

Da queste equazioni per dimostrato al N.° 71. oppure, che se per le e per i punti presi a volontà nello spazio si protraggano delle rette parallele ai lati di un pentagono, ed a loro proporzionali, il centro di gravità di un sistema di pesi eguali sarà lo stesso se sieno applicati in A', B', C', D', E', oppure in A'', B'', C'', D'', E''. È facile a vedersi, che ciò che si è detto per un pentagono a semplice e doppia inclinazione si può ritenere per un poligono qualunque nello spazio, e per quanti punti corrispondenti, e però il centro di gravità di un sistema di pesi eguali è lo stesso se siano applicati agli estremi delle rette proporzionali, oppure alle altre parti

199.°

§. 154. Se i punti ove cominciano le rette siano sui lati del poligono, si potrà conchiudere che se dei pesi eguali sui lati di un poligono scorrono nello stesso tempo sopra le direzioni di lati stessi delle lunghezze proporzionali a' lati del poligono, il centro comune del sistema resterà immutabile. —

§. 155. Figurando che tutte le rette partano da un punto solo nello spazio, il punto sarà il centro di gravità di se stesso, e però si potrà conchiudere, che se da un punto qualunque nello spazio si protraggano delle rette parallele e proporzionali ai lati di un poligono chiuso a semplice o doppia curvatura, questo punto sarà il centro di gravità di tanti pesi eguali attaccati alle estremità delle rette. —

Dal detto al §. 153 155. risulta che un tal punto è il centro comune di gravità dei pesi eguali attaccati alle estremità delle rette che partendo dal punto G

§. 156. Ogni figura nella quale si trova un punto pel quale protraendo un piano qualunque la taglia in due parti simmetriche, esso è il centro di gravità.

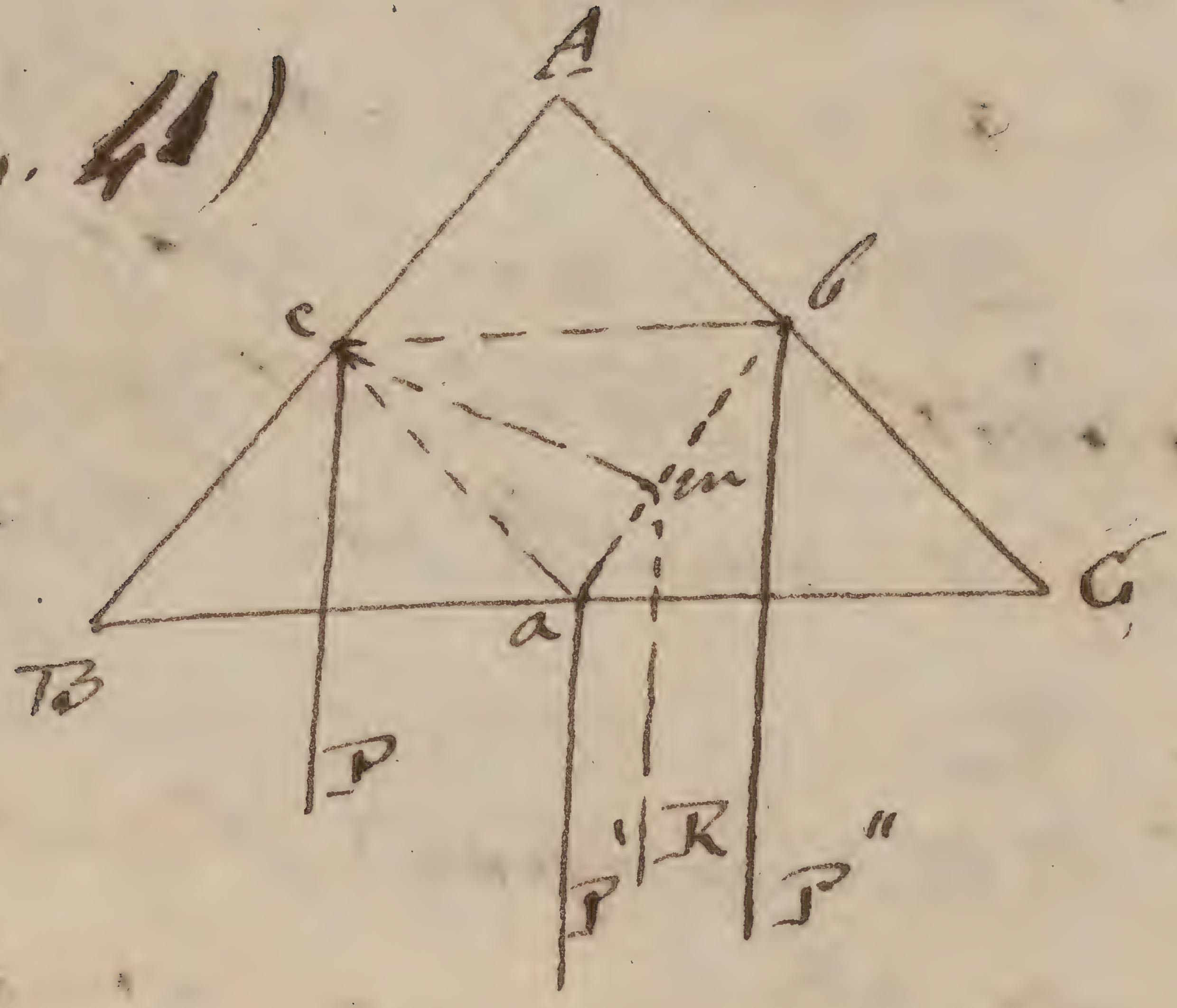
§. 157. ~~Il centro.~~ Deriva quindi 1°. Che il centro di gravità di una retta è nel suo mezzo. 2°. Che il centro di gravità dell'area di un parallelogrammo è nell'intersecazione delle diagonali. 3°. Che il punto ove si tagliano le quattro diagonali di un parallelepipedo è il suo centro di gravità così pel perimetro di un circolo, sfera, cilindro.

§. 158. Per trovare in generale il centro di gravità di un poligono o in generale di un sistema di quante rette si vogliono disposte fra loro, si considera ciascuna di raccolto il peso di essa raccolta alla sua metà e però si avranno tanti punti dei quali si troverà la risultante, o coi momenti o colla composizione e così si avrà il punto cercato.

N. 159. Determiniamo dietro particolari considerazioni il centro di gravità del perimetro d'un triangolo.

Sia (fig. 40) il triangolo ABG del quale si dividano per metà i lati in c, b, a e considerare si potrà raccolto in essi il peso delle rispettive rette, e siano rappresentate da cp, ap', bp'' che saranno proporzionali ai lati del triangolo ABG, e sia P = AB, P' = BG, P'' = AG. Congiunti i punti a, b, c, la risultante delle P', P'' sarà in un punto della ab tale che sia AG : BG :: am : mb; ma si ha ac : bc :: AG : BG dunque ac : bc :: am : mb; ma quando ciò è la mc divide per metà l'angolo acb, dunque la risultante delle P, P', P'' avrà il suo punto d'applicazione in un punto della cm che divide per metà l'angolo acb. — Componendo la P colla P'' la risultante sarà applicata in un punto della bc; componendo questa colla P' essa si troverebbe similmente applicata in un punto della retta che divide

(Fig. 41)



de per metà l'angolo cab: e però il centro di gravità del perimetro del triangolo sarà sull'intersecazione di queste due rette mentre similmente si proverebbe per la retta dividente per metà l'altro angolo. Dunque esso centro di gravità sarà il centro del circolo inscritto nel triangolo abc. —

§. 160. Per determinare il centro di gravità del perimetro di un poligono rettilineo, si può esso scomporre in tanti triangoli, e quindi trovando il centro di gravità di ciascuno si avrà il centro di gravità del poligono. —

Lezione 44. §. 161. Determiniamo il centro di gravità dell'area di un triangolo. —
la 45. ripetiz.e

Osserviamo che se la distanza del centro di gravità dell'area di un triangolo da un lato di lui sta una certa porzione della perpendicolare che dall'angolo opposto si fa cadere su di lui: se si considererà un altro lato ed un altro angolo, è evidente che le altre porzioni dovranno essere parti simili di queste. Siano a, a', a'' le perpendicolari

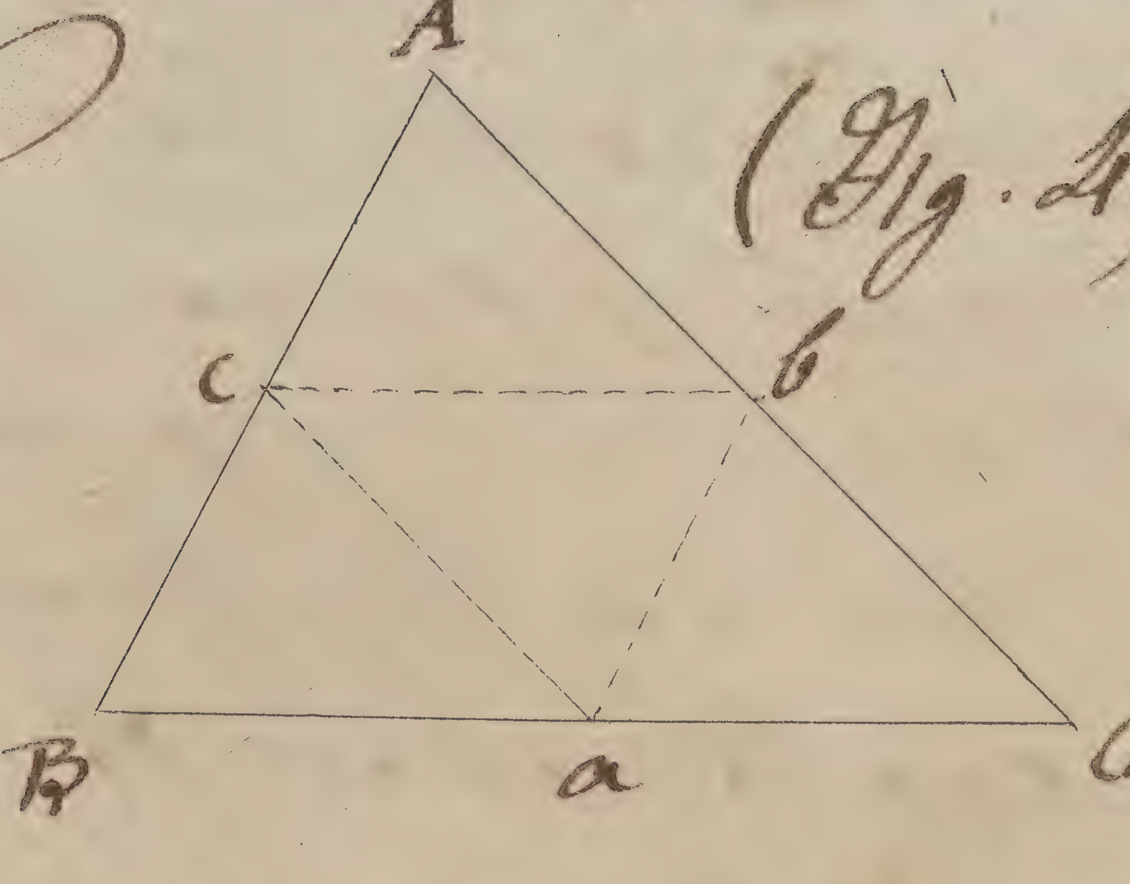
(203.)

che da ciascun angolo del triangolo si fanno cadere sui lati opposti, e ponendo che $\frac{a}{m}$ sia la distanza del centro di gravità del △ dal lato a cui a è perpendicolare, per il detto $\frac{a'}{m}$, $\frac{a''}{m}$ saranno le distanze dagli altri due lati, inoltre essendo ciò indipendente dalla forma del triangolo m si conserverà sempre lo stesso.

Se abbiansi 2 triangoli, uno de' quali abbia i lati rispett.e doppj dell'altro, i 2 triangoli saranno simili, e però saranno tra se come i quad.i dei lati omologhi cioè uno sarà quadruplo dell'altro; ma i lati dell'uno sono doppj di quelli dell'altro dunque anche l'altezza sarà doppia. Dunque se $\frac{a}{m}$ è la distanza del centro di gravità per l'altro sarà $\frac{2a}{m}$ cioè doppia della prima poichè m si conserva lo stesso.

Sia fig (21) il triangolo ABC di cui si voglia determinare il centro di gravità

(284.)



(Fig. 21)

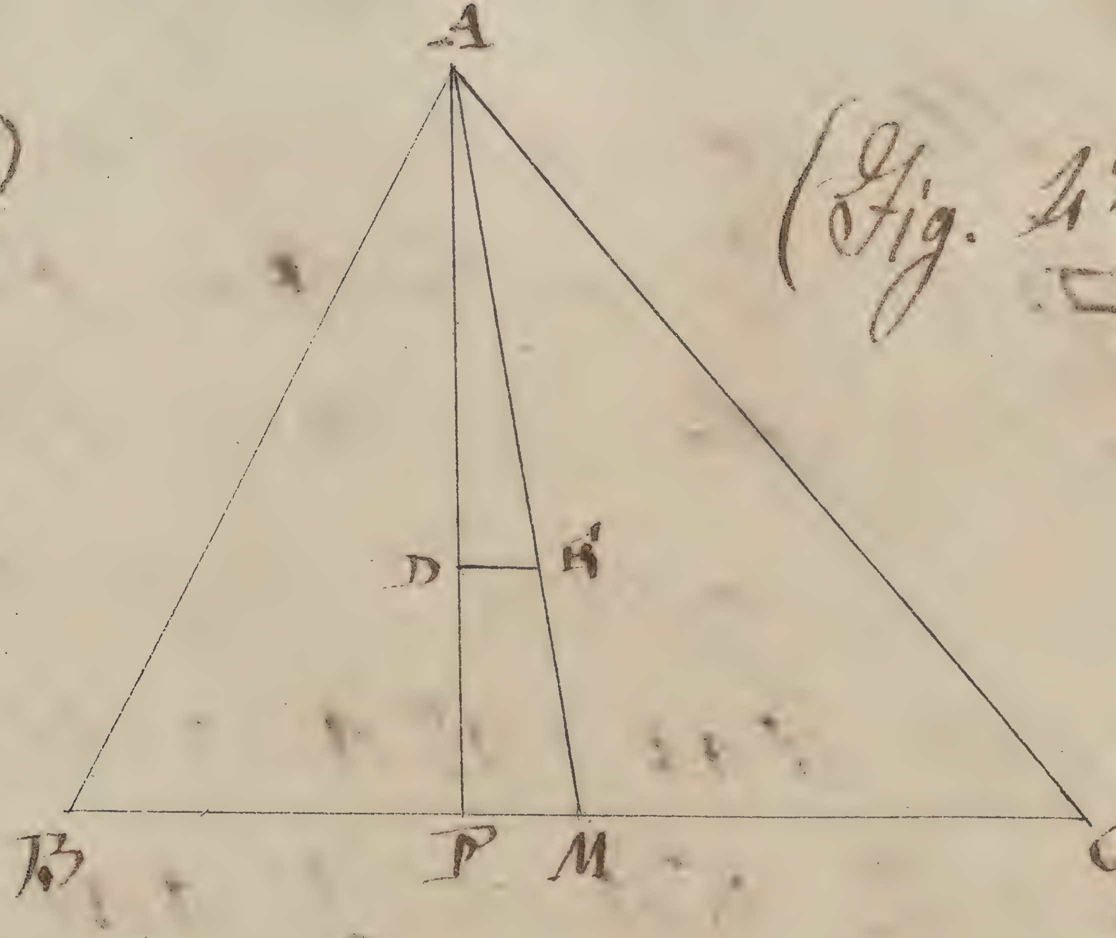
Si dividano per mezzo i lati in a, b, c ed uniti colle rette ab, bc, ac, sarà il △° diviso in 4° in cui lati ed altezze saranno le metà di quelli del △° ABC in corrispondenza. Poniamo BC la base, e Ca, Ba, Cb, Cb. Poniamo T l'area del BAC, H la sua altezza e G la distanza del suo centro di gravità da BC; e t, h, g siano le quantità analoghe per uno dei 4 triangoli in cui resta diviso il ABC. — Si avrà $T = 4t$, $H = 2h$ $G = 2g$. Si osservi che le distanze da BC dell'area dei due triangoli Bac, acC sono eguali a g: la distanza da BC del △° abc è $h - g$: quella del △° cAb è $h + g$. Prendendo i momenti relativi a BC si avrà

$TG = tg + tg + t(h-g) + t(h+g) = 2t(g+h)$. Moltiplicando per 2, si ha

$2TG = 4t(2g + 2h)$; ma $2g = G$, e $2h = H$, dunque

$2TG = T(G + H)$

$G = \frac{1}{3}H$. Si dovrà dunque concludere che il centro di gravità di un triangolo è dist. dalla base $\frac{1}{3}$ altezza



(Fig. 42)

si osservi la (42).

Se dal vertice del △. ABG si conduca al mezzo del lato BG la AM essa dovrà contenere il centro di gravità del △. Per la stessa ragione, esso dovrà essere sopra le altre due rette che dagli altri 2 angoli si conducono alla metà dei lati opposti; e però sarà all'intersecazione comune.

Da A si conduca la perpendicolare AP, e presa $PD = \frac{1}{3} AP$ si conduca DE parallela a BG, e poi E sarà il centro di gravità. Ma dai triangoli simili ADE, APM si ha $ME = \frac{1}{3} AM$. Dunque il centro di gravità di un triangolo è situato alla terza parte della retta condotta da un angolo alla metà del lato opposto a partire dal lato e ai $\frac{2}{3}$ dal vertice.

§.162. Se tre masse uguali abbiano i loro centri di gravità applicati in A, B, G ai tre vertici del triangolo A B G. Dico che il loro centro di gravità sarà quello del triangolo.

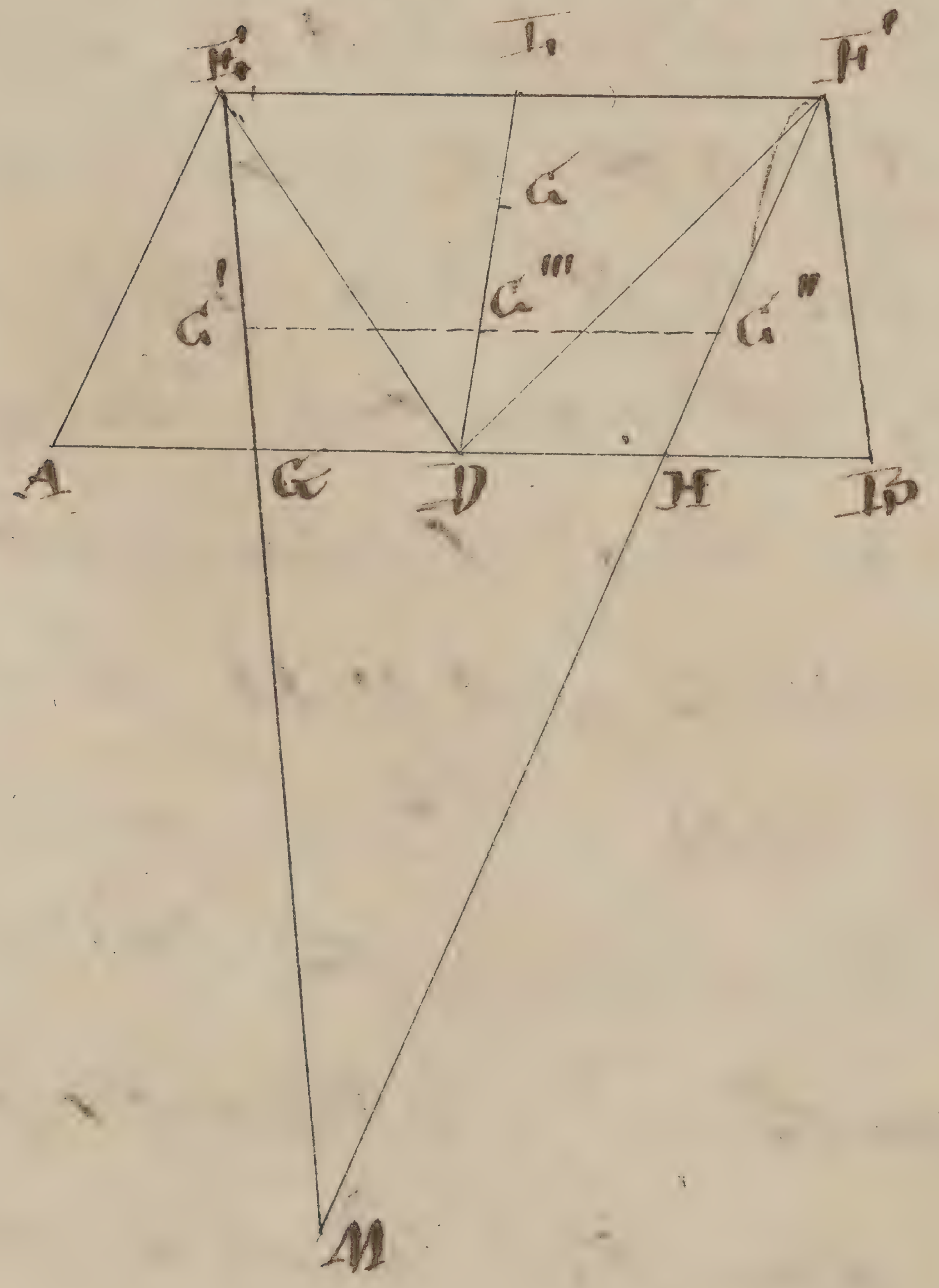
Infatti componendo le due in B, C la risultante cadrà alla metà di BC ed = 2a se a = massa; e però dovrà essere EM : EA :: 1 : 2, e poichè $ME = \frac{1}{2} EA = \frac{1}{3} AM$ come

una è doppia dell'altra

~~Fig.~~ Quindi si può concludere che la distanza del centro di gravità di un triangolo da un piano eguaglia la somma delle distanze dei tre vertici divisa per 3 pel §. 81.

§. 163. Determiniamo il centro di gravità dell'area di un trapezio AEFB (fig. 43)

(Fig. 43)



Si uniscano i mezzi I, D dei due lati paralleli EF AB, e si protraggano le ED, FD, e le EG, FH ai punti di mezzo G, H delle AD, DB, e si prolungano ad incontrarsi in M.

Il Δ.° EDF ha il centro di gravità in G essendo $GI = \frac{1}{3} ID$. I centri di gravità dei triangoli ADE, DBF sono in G', G'' essendo $G'G = \frac{1}{3} GE$ $G''H = \frac{1}{3} FH$: si ha

G'G : G''H :: EG : HF;

ma GH è parallela ad EF dunque

EG : FH :: GM : HM,

G'G : G''H :: GM : HM e però G'G'' parallela a GH ed è

partita per metà dalla L.D. —

I due Δ^i AE'D, BF'D sono uguali, e però la risultante delle forze presentate dai loro pesi debbe passare per G''' mezzo di G'G'' sulla L.D. Componendo adunque la risultante delle forze applicate in G'G'' con quella che passa per G sarà la risultante sulla L.D.

Ciò posto si osservi la (144) fig.

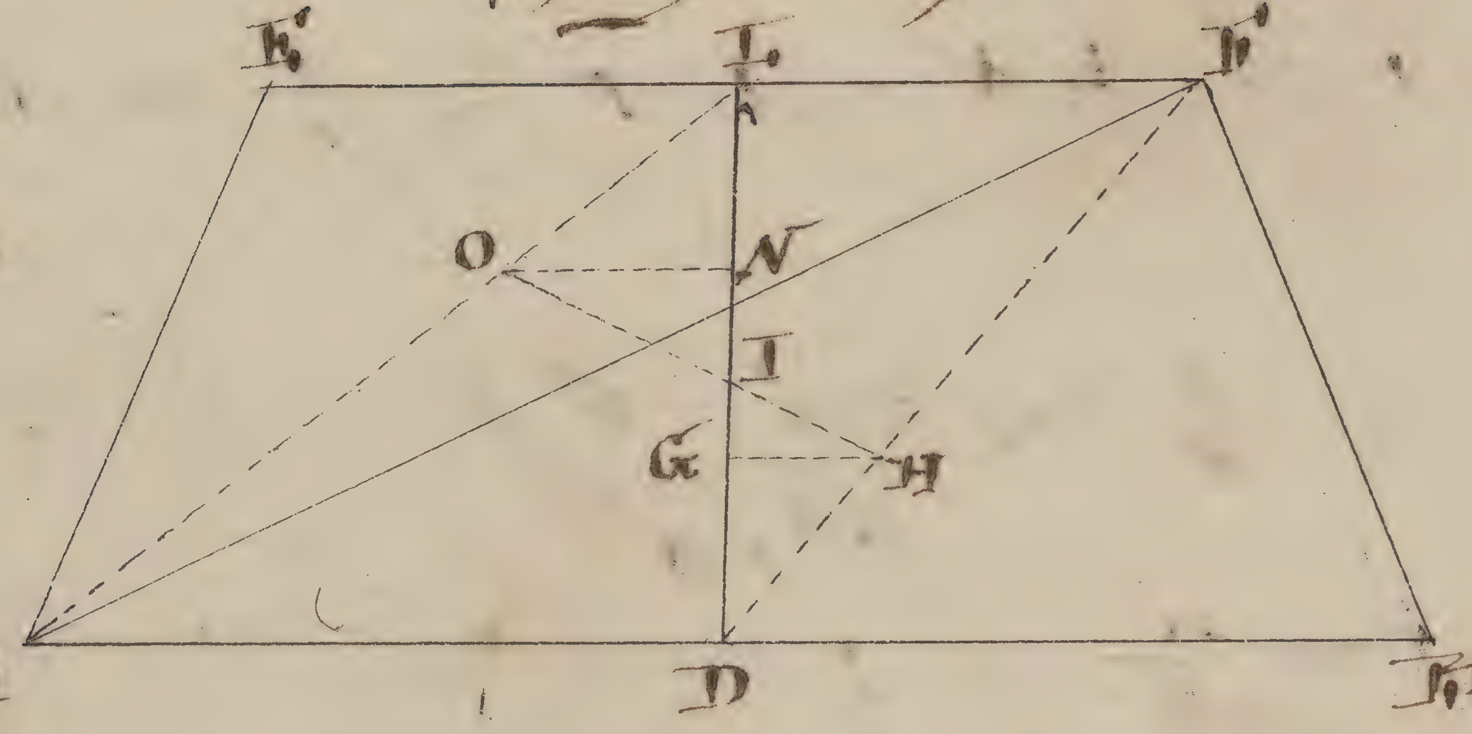
Si divida la L D in tre porzioni eguali L N, N G, G D e si protragga la AF diagonale e la AL, DF. Condotte da N, G le N O, G H parallele ad AB i due triangoli AEF, AFB hanno i rispettivi centri di gravità in O, H perchè $OL = \frac{1}{3} AL$, $DH = \frac{1}{3} DF$ e però il centro di gravità del trapezio si troverà sulla OH: ma si è dimostrato che dev'essere ancora sulla L D, dunque sarà in I. E per esser tale si debbe avere

$OI : IH :: \overset{\Delta}{AFB} : \overset{\Delta}{AEF}$

posto $EF = b$, $AB = b'$, si avrà

$OI : IH :: b' : b$

(Fig. 144)



Essendo simili i triangoli
ONI e GHI si ha
~~OI : HI~~ :: NI : GI e quindi
NI : GI :: b' : b, onde
NI + GI : IN :: b' + b : b';
ma NI + GI = NG = $\frac{1}{3}$ ID
= $\frac{1}{3}$ m posto ID = m;
si avrà dunque
$\frac{1}{3}$ m : NI :: b' + b : b' dalla
quale $NI = \dfrac{\frac{1}{3} m b'}{b' + b}$ ed
$II = IN + NI = \frac{1}{3} m + \dfrac{\frac{1}{3} m b'}{b' + b}$
$= \frac{1}{3} m \dfrac{(2b' + b)}{b' + b}$. se b = 0
$II = \frac{2}{3} m$; che è un triangolo.

Se b = b' si ha
$II = \frac{1}{2} m$ come dovea essere
poichè si ha un parallelogrammo.

§. 162. Determiniamo la distanza del centro di gravità della superficie di una piramide dalla sua base escludendone la base stessa.

Sia a, a', a'' — & le altezze, e b, b', b'', le basi di triangoli che formano la superficie della piramide.

I centri di gravità di questi triangoli sono distanti dalle loro basi

un terzo della altezza.—

Siano q, q', q'' &c gli angoli d'inclinazione delle faccie della piramide colla base, e le perpendicolari protratte dai centri di gravità dei triangoli della base, saranno presentate da

$\frac{a}{3}\theta q$

$\frac{a'}{3}\theta q'$

$\frac{a''}{3}\theta q''$

Sia p la distanza del centro di gravità della superficie della piramide dalla base.—

Il momento rispetto alla base sarà

$p\left(\frac{ab}{2}+\frac{a'b'}{2}+\frac{a''b''}{2}+\text{\&c}\right) = \frac{ab}{2}\cdot\frac{a}{3}\theta q+\frac{a'b'}{2}\frac{a'}{3}\theta q'+\frac{a''b''}{2}\frac{a''}{3}\theta q''+$ &c da cui si ha

$$p=\frac{\frac{ab}{2}\cdot\frac{a}{3}\theta q+\frac{a'b'}{2}\frac{a'}{3}\theta q'+\text{\&c}}{\frac{ab}{2}+\frac{a'b'}{2}+\frac{a''b''}{2}+\text{\&c}}$$

Ma $a\theta q$, $a'\theta q'$ &c esprimono l'altezza della piramide, dunque posta A si ha $A=a\theta q=a'\theta q'$ $=$ &c; si ha sosto

$p=\frac{1}{3}A$. Dal che si vede che la distanza che si cerca è alla terza parte dell'altezza dalla base—

La stessa cosa vale per la superficie convessa del cono poichè le cose dette non dipendono dalla grandezza di triangoli, e però si può al cono. Se la piramide si compone di triangoli eguali, la base sarà un poligono regolare nel centro del quale cadrà la perpendicolare, ed in allora si ha la sua situazione precisa. ___

Lo stesso vale pel cono retto. ___

§. 165. Mettiamo davanti un metodo generale che dipende dal calcolo integrale e che serve a determinare il centro di gravità delle linee piane e a doppia curvatura. Al §. 82 si sono trovate le infrascritte equazioni

(4) $R.p = Px + P'x' + P''x'' + \ldots = \Sigma Px$

(5) $R.q = Py + P'y' + P''y'' + \ldots = \Sigma Py$

(6) $R.r = Pz + P'z' + P''z'' + \ldots = \Sigma Pz$, ove $p, x, x', x'' \ldots$; $q, y, y', y'' \ldots$; $r, z, z', z'' \ldots$; rappresentano le rispettive distanze dai piani (y, z) (x, z) (x, y) della risultante R, delle forze P, P', P''; e delle forze medesime.

Supponendo le figure omogenee di guisa che le due

stà sia la stessa in tutte le parti, ai pesi P, P', P'' &c si possono sostituire i volumi, e posti V, v, v', v'' &c onde alle (4) (5) e (6) si possono surrogare le

(7) $Vp = vx + v'x' + v''x'' + \&c$

(8) $Vq = vy + v'y' + v''y'' + \&c$

(9) $Vr = vz + v'z' + v''z'' + \&c$

Queste equazioni sono vere posto che le p, x, x', x'' &c q, y, y', y'' &c r, z, z', z'' &c siano applicate ai centri di gravità dei pesi o delle masse a cui i volumi sono proporzionali nella fatta ipotesi; ma sono indipend.te dai volumi v, v', v'' &c e considerandoli rispett.i indeterminatam.e piccoli cioè che siano concentrati nei rispett.i centri di gravità.

Deriva quindi il metodo di determinare il centro di gravità di una linea obbiettiva di cui $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ è l'elemento, e detta L la lunghezza di tal linea si ha

(10) $L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

(212)

che riducesi a contenere una sola variabile mediante le projezioni della linea sui due piani ortogonali, o dalle equazioni di 2 superficie per cui ne vengano le projezioni —

Le somme dei momenti rispetto ai piani coordinati (y, z), (x, z), (x, y) sono

$\int x\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$,

$\int y\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$,

$\int z\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, e queste funzioni similmente si riducono a contenere una variabile e diff.

(11) $p\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \int x\sqrt{dx^2+dy^2}$

(12) $q\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \int y\sqrt{dx^2+dy^2}$

(13) $r\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \int z\sqrt{dx^2+dy^2}$

Trovando i valori di p, q, r si hanno le

(14) $p = \dfrac{\int x\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$

(15) $q = \dfrac{\int y\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$

(16) $r = \dfrac{\int z\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$

che si debbono estendere gl'integrali per tutta l'estensione dell'oggetto.

Allorchè la linea è piana si ha

$$(17)\quad p = \frac{\int x\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

$$(18)\quad q = \frac{\int y\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

Lezione 46

§. 166. Determiniamo colle formole generali il centro di gravità di una retta nello spazio. — Sia rappresentata dalle due projezioni sui piani coordinati e siano

(19) $y = mx + n$,

(20) $z = m'x + n'$, sui piani (x, y) (x, z); prend.° i diff.i si avrà

(21) $dy = m\,dx$,

(22) $dz = m'dx$; l'espress.e del diff.le di una retta ottiensi e

(23) $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = dx.\sqrt{1+m^2+m'^2}$; ed integrando, e posta L la lunghezza della linea si avrà

(24) $L = \int dx\sqrt{m^2+m'^2+1} = x\sqrt{1+m^2+m'^2} + C$; inoltre si ha

(25) $\int x\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{x^2}{2}.\sqrt{1+m^2+m'^2} + C_1$,

(26) $\int y\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \left(\frac{mx^2}{2} + nx\right)\sqrt{1+m^2+m'^2} + C_2$

(27) $\int z\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \left(\frac{m'x^2}{2} + n'x\right)\sqrt{1+m^2+m'^2} + C_3$, dove C, C_1, C_2, C_3 sono le costanti —

$+dz^2$

$+dz^2$

$+dz^2$

e determinare le quali fieno a, b i valori di x negli estremi della retta e gl'integrali presi fra siffatti limiti saranno presentati

(28) $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=(a-b)\sqrt{1+m^2+m'^2}$,

(29) $\int x\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)\sqrt{1+m^2+m'^2}$,

(30) $\int y\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\left(m\frac{a^2-b^2}{2}+n(a-b)\right)\sqrt{1+m^2+m'^2}$,

(31) $\int z\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\left(m'\frac{a^2-b^2}{2}+n'(a-b)\right)\sqrt{m^2+m'^2+1}$, che fatte sostituzioni nelle (14) (15) (16) ne vengono le

(32) $p=\frac{a^2-b^2}{2(a-b)}=\frac{a+b}{2}$,

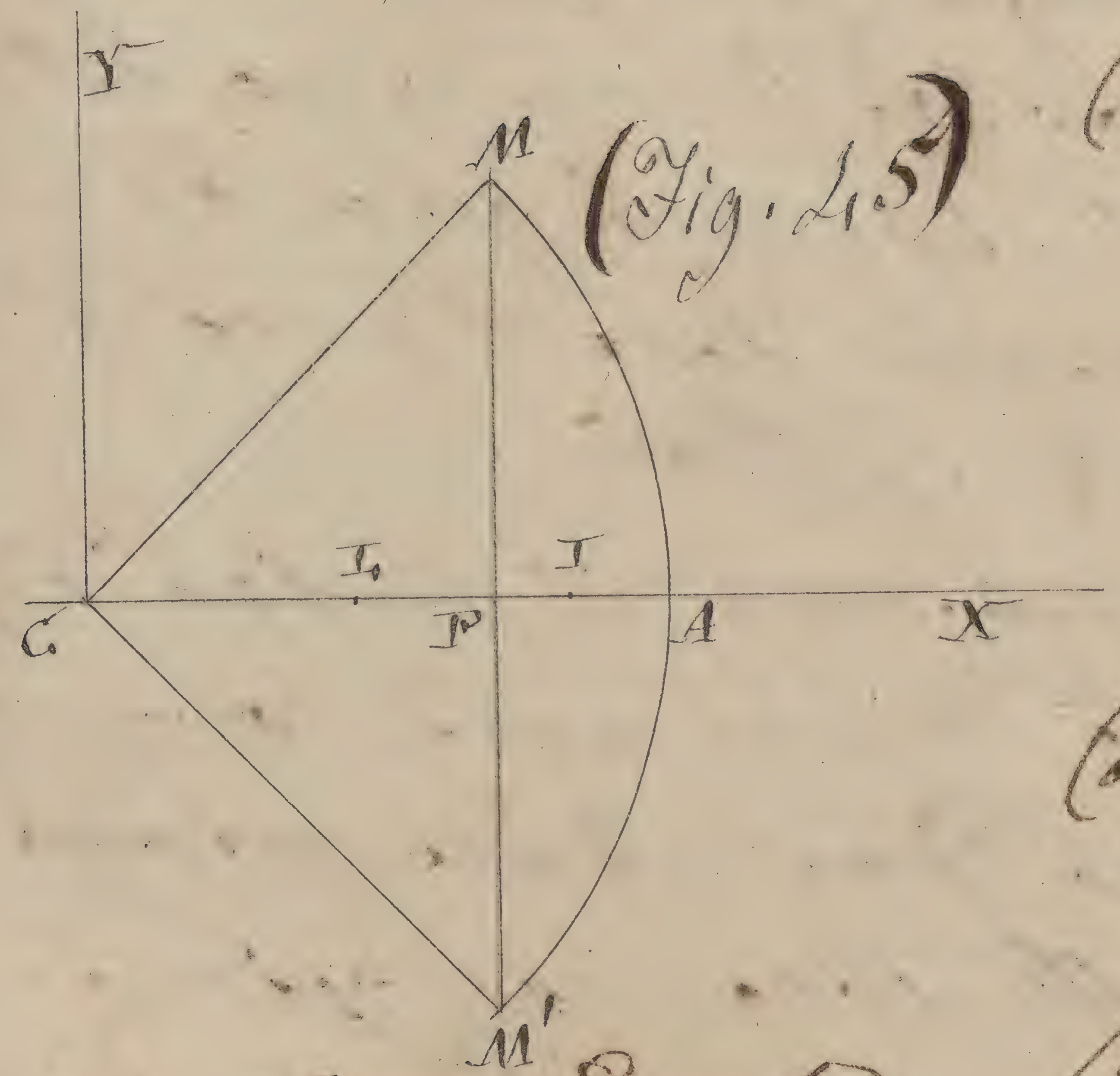
(33) $q=m\frac{a^2-b^2}{2(a-b)}+n=\frac{m(a+b)}{2}+n$

(34) $r=m'\frac{a+b}{2}+n'$ che appartengono al punto di mezzo della retta obbiettiva che ha per estremi $x=a$, $x=b$, e però il suo centro di gravità sarà nel suo mezzo. Si ha quindi il mezzo per determinare il centro di gravità del contorno di un poligono a semplice o doppia inclinazione —

§. 167. Determiniamo il centro di gravità dell'arco di circolo MAM' (fig. 65).

Poniamo in C centro del circolo l'origine delle coord.

215.



(Fig. 45)

quando le coordinate non sono rettangole $x^2+y^2=v^2$ rappresenta un' iperbole equilatera

e il circolo stesso verrà presentato dalla

(35) $x^2+y^2=v^2$, essendo $v=AC$ che divide per mezzo MM' e su di esso dovrà cadere il centro di gravità. Sia $MA=s$, e si avrà

(36) $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$; ma dalla (35) si ha

(37) $y=\sqrt{v^2-x^2}$, e però differ.°

(38) $dy=-\dfrac{x\,dx}{\sqrt{v^2-x^2}}$, e sostit.° nella (36) si avrà

(39) $ds=\pm dx\sqrt{1+\dfrac{x^2}{v^2-x^2}}=$ $\pm dx\sqrt{\dfrac{v^2}{v^2-x^2}}$; e si dovrà prendere il meno poichè al crescere dell'arco diminuisce x, si avrà dunque la

(40) $\int x\sqrt{dx^2+dy^2}=-v\int\dfrac{x\,dx}{\sqrt{v^2-x^2}}=$ $v\sqrt{v^2-x^2}+C$, e però la

(41) $\beta=\dfrac{v\sqrt{v^2-x^2}+C}{s}=\dfrac{vy+C}{s}$ dipend.^{te} dalla (35).

A determinare C si osservi che quando $x=-v$ si ha la circonferenza ed in tal caso $\beta=0$, e però $C=0$, quindi si avrà la

(42) $\beta=\dfrac{vy}{s}$ integrale determinato; da cui si ottiene $\dfrac{2s}{v}=\dfrac{2y}{\beta}=\dfrac{2y}{CI}$; ovvero $\dfrac{MAM'}{AC}=\dfrac{MM'}{CI}$; quindi

MAM' : AG :: MM' : GI ; la distanza dunque del centro di gravità di un'arco dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l'arco il raggio e la corda.

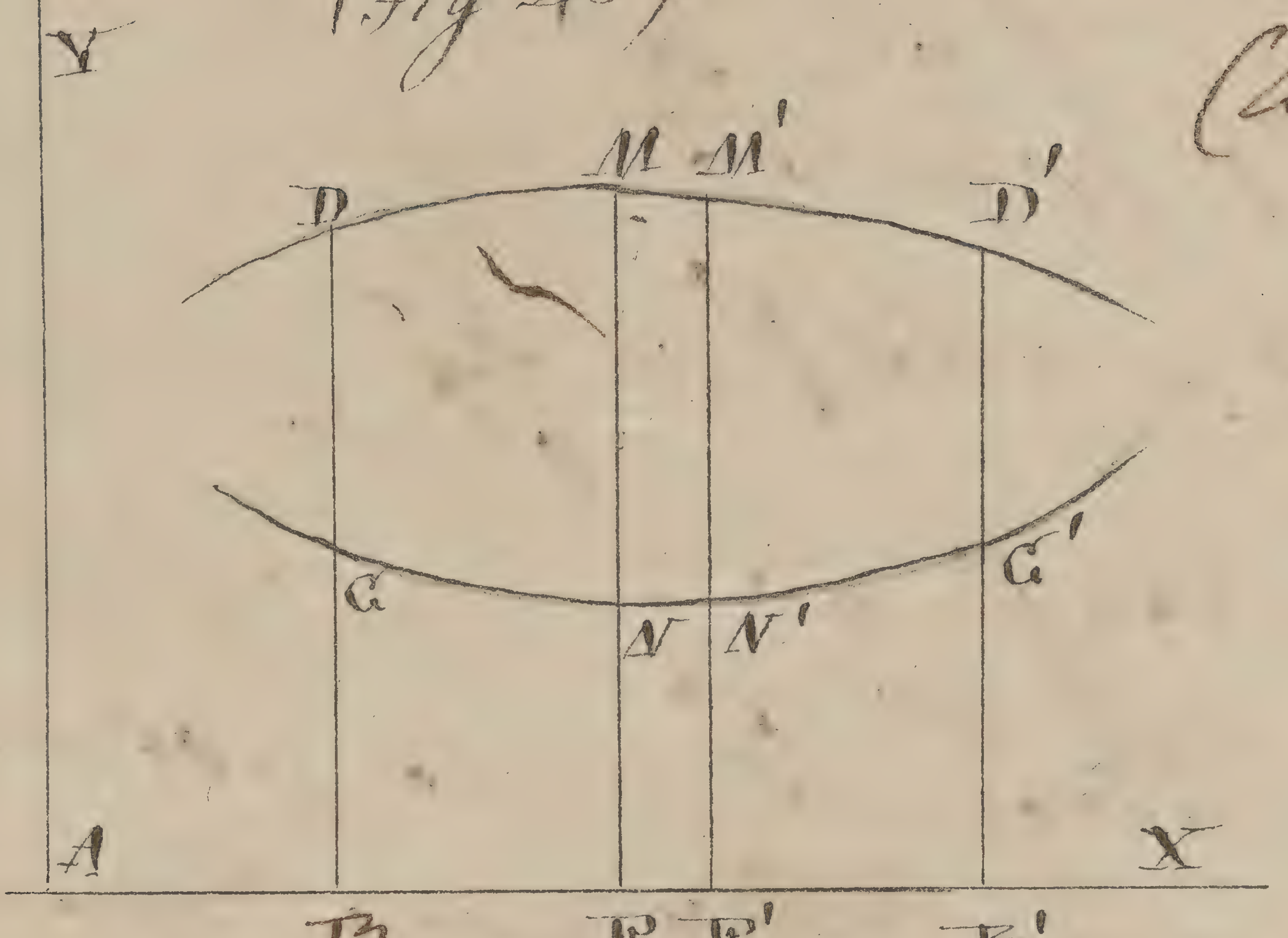
§. 168. Cerchiamo il centro di gravità di un'area compresa fra due linee piane date dalle loro equazioni.

Sieno esse date dalle

(43) $y = \varphi(x)$

(44) $y_1 = \varphi_1(x)$ essendo la stessa ascissa. Essendo le equazioni delle curve DMD', GNG' riferite agli stessi assi AX, AY ortogonali (Fig. 46).

(Fig 46)



Sia AP = x l'ascissa comune alla quale corrispondano le ordinate

$y = MP$, $y_1 = NP$.

Sia l'area GDD'G' di cui si vuole il centro di gravità.

Supponiamo che alle ordinate BD, B'D' che terminano l'area, corrispondano le ascisse AB = a, AB' = b; sia l'area rappresentata da λ e pel dimostr. l.c. si avrà

(45) $\lambda = \int (y - y_1)\,dx$, ovvero si avrà sostit. la

(46) $\lambda = \int (\varphi(x) - \varphi_1(x))\,dx$, che si deve estendere da $x = a$ ad $x = b$; sia NMM'N' l'ele

(218.)

mento dell'area, cioè paralle coord.^{e} PM, P'M' indeterm.^{e} vicine.
Il centro di gravità di questi elementi sarà nel suo mezzo poichè si può considerare come un rettangolo.
Sarà dunque il centro di gravità dell'elemento alla distanza $\frac{NM}{2}$ dalle 2 basi, e però la distanza di lui dall'asse AX verrà rappresentata da $\frac{MN}{2} + NP = \frac{MP-PN}{2} + NP = \frac{y-y_1}{2} + y_1 = \frac{1}{2}(y+y_1)$.
La distanza poi dall'asse delle y, è $x+dx$; ma dx è indeterminatamente piccola, dunque non potendo si assegnare la dist.^{za} fra x e dx si prende x.
Si avrà dunque le equaz.

(27) $p\lambda = \int(y-y_1)\,x\,dx = \int(\varphi(x)-\varphi_1(x))\,x\,dx$

(28) $q\lambda = \frac{1}{2}\int(y-y_1)(y+y_1)\,dx = \frac{1}{2}\int(y^2-y_1^2)\,dx = \frac{1}{2}\int(\varphi(x)^2-\varphi_1(x)^2)\,dx$. La soluz.^{e} del problema dunque dipende dall'integrazione delle funzioni

$(y-y_1)\,dx$, $(y-y_1)\,x\,dx$, $(y^2-y_1^2)\,dx$, che si riducono ad essere funzioni di x, ed inallora si devono prendere gl'integrali da $x=a$, $x=b$.
Allorchè un'asse taglia l'area in parti eguali ed

lora il centro di gravità sarà lo di esso, ed il problema intero non dipende che da 2 integrazioni, e si avrà soltanto p e q da determinare e le equazioni (46), (47), (48), si riducono alle

(49) $\lambda = \int y\,dx$,

(50) $p\lambda = \int yx\,dx$,

(51) $q\lambda = \frac{1}{2}\int y^2\,dx$,

quando l'asse delle x sia una retta che chiude lo spazio, e allora $y_1 = 0$, — ovvero

(52) $\lambda = \int \varphi(x)\,dx$

(53) $p\lambda = \int x\,\varphi(x)\,dx$

(54) $q\lambda = \frac{1}{2}\int \varphi(x)^2\,dx$. —

(Fig. 47)

§. 169. Facciamo applicazione alla determinazione del centro di gravità dell'area d'un triangolo.

Sia (fig. 47.) il triangolo ABG di cui A sia il vertice e esso AY parallelo a BG, ed AX sarà perpendicolare a BG che tagli in D prolungata la BG. In questo caso le linee che terminano l'area sono le AB, AG che passano per l'origine A e che saranno presentate dalle equazioni

(55) $y = mx$

(56) $y_1 = m'x$ che tengono le vece

della (63)(64); sarà quindi

(57) $\lambda = (m-m')\int x\,dx = \frac{1}{2}(m-m')x^2 + C.$

(58) $p\lambda = (m-m')\int x^2 dx = \frac{1}{3}(m-m')x^3 + C'.$

(59) $q\lambda = \frac{1}{2}(m^2-m'^2)\int x^2 dx = \frac{1}{6}(m^2-m'^2)x^3 + C''.$

Questi integrali si devono estendere da $x = 0$, fino ad $x = AD = a'$; avremo dunque gl'integrali determinati

(60) $\lambda = \frac{1}{2}(m-m')a'^2,$

(61) $p\lambda = \frac{1}{3}(m-m')a'^3,$

(62) $q\lambda = \frac{1}{6}(m^2-m'^2)a'^3$; e quindi

(63) $p = \frac{2}{3}a'$

(64) $q = \frac{1}{3}(m+m')a'$. Prendiamo $AF = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}a'$, e da F innalzata su AD la perpendicolo FG, si prenda $FG = \frac{1}{3}(m+m')a'$, e G sarà il centro di gravità del triangolo. Se si conduca la AGF, il punto F è alla metà di BC; di fatti essendo $AF = \frac{2}{3}a'$, si avrà (a) dalle (55) e (56) si ha

$y = BD = m.a'$,

$y_1 = CD = m'a'$, e però

$q = \frac{1}{3}(BD+CD)$; ma in conseg.^{e} della (64) si ha

$AF : FG :: AD : DF$ ovvero

$\frac{2}{3}AD : \frac{1}{3}(BD+CD) :: AD : DF$

dunque $DF = \frac{1}{2}(BD+CD)$, ovvero $FG + GD = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}CD$

(a) $\frac{2}{3}a' : \frac{1}{3}(m+m')a' :: a' : x = \left(\frac{m+m'}{2}\right)a'$; ma $CD = m'a'$ dunque $FG = \left(\frac{m+m'}{2}\right)a' - m'a' = \left(\frac{m-m'}{2}\right)a'$. Così si trova $BD = ma'$, e $FB = BD - FD = ma' - \left(\frac{m+m'}{2}\right)a' = \left(\frac{m-m'}{2}\right)a'$ che sono eguali. Come ...

(221.)

eguale a $\frac{1}{2}BG + \frac{1}{2}GD + \frac{1}{2}GD$ $= \frac{1}{2}BG + GD$ e però $FG = \frac{1}{2}BG$ ~~$FG = \frac{1}{3}BG$~~ : ma $AG : AF ::$

(a) $AE : AD :: AG : AF$;

$AF : AD :: \frac{2}{3}AD : AD$ (a); dunq. $AG = \frac{2}{3}AF$, e però $FG = \frac{1}{3}AF$. Come si è veduto

§. 170. Sia la

(65) $y = \varphi(x)$ l'equazione di una linea piana, e l'elemento dell'area di questa linea sarà $\varphi(x)dx$. Sieno p, q le distanze del centro di gravità di essa dagl'assi, e si avrà

(66) $p = \frac{\int \varphi(x) x dx}{\int \varphi(x) dx}$

(67) $q = \frac{\int \varphi(x)^2 dx}{\int \varphi(x) dx}$; si osservi che le coord. x, y del centro di gravità dell'area obbiettiva sono le stesse del centro di gravità della proiezione; oltre p', q' le corrispondenti distanze della proiezione essa sarà data da $\theta\omega\varphi(x)dx$, l'elemento, e però si avranno le

(68) $p' = \frac{\theta\omega \int \varphi(x) x dx}{\theta\omega \int \varphi(x) dx} = \frac{\int \varphi(x) x dx}{\int \varphi(x) dx}$

(69) $q' = \frac{\theta\omega \int \varphi(x)^2 dx}{\theta\omega \int \varphi(x) dx} = \frac{\int \varphi(x)^2 dx}{\int \varphi(x) dx}$,

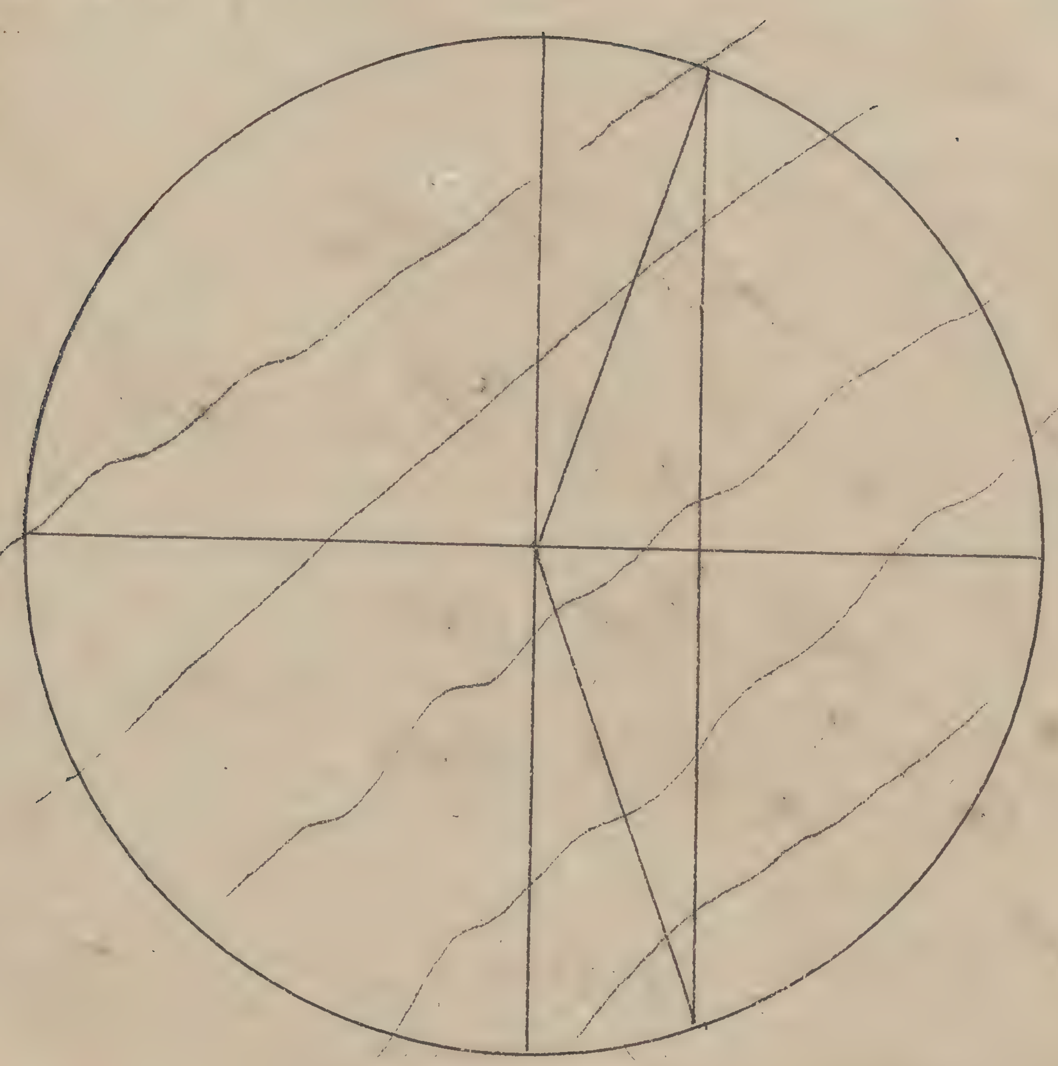
laonde $p = p'$, $q = q'$, cioè che il centro di gravità di una figura piana è il centro di gravità della proiezione

Lezione 2.7.

§. 171. Si osservi la (fig. 2.1)

Supponiamo che l'area $BDD'B'$ ruoti intorno all'asse AX generando un solido di rivoluzione. Se s'immagini un piano perpend. ad AX, l'intersezione di esso col solido sarà un circolo che ha il suo

(222.)



centro di gravità sull'asse, e però sull'asse AX sarà il centro di gravità del solido. —

Basterà dunque determinare la distanza dall'asse AY.

Sia dunque AB = x che aumenti di dx indeterm.^{te} piccola. Il solido di rivoluzione generato dalla linea BMD' viene presentato da $\pi\int y^2 dx$, e quello generato dalla CNC' da $\pi\int y_1^2 dx$. Il solido generato dall'area sarà perciò

$\pi\int(y^2-y_1^2)dx$ supponendo che sia la

(69) $y = \varphi(x)$

(70) $y_1 = \varphi_1(x)$, il quale solido avrà il centro di gravità sull'asse AX. L'elemento di esso sarà

$\pi(y^2-y_1^2)dx$ che avrà anche esso il suo centro di gravità sull'asse AX.

La distanza del centro di gravità di quest'elemento dal piano (y, z) considerando dx indeterm.^{te} piccola si prende x, e che

$\pi\int(y^2-y_1^2)x\,dx$ rappresenti la somma di ~~gli elementi~~ momenti rispetto al piano $(y\,z)$.

L'integrale che deve si prendere da $x=a$, ad $x=b$. e si riduce a contenere una sola variabile per la (69) (70).

(223.)

Prendiamo per V il solido generato dall'area CDD'C', e si avrà

(71) $V = \pi \int (y^2 - y_1^2)\, dx$, e

(72) $V\rho = \pi \int (y^2 - y_1^2)\, x\, dx$, e però

(73) $\rho = \frac{\int (y^2 - y_1^2)\, x\, dx}{\int (y^2 - y_1^2)\, dx} = \frac{\int (\varphi(x)^2 - \varphi_1 \ldots}{\int (\varphi(x) \ldots}$

Ove si vede che se si prende CC' per asse delle x facendo $y_1 = 0$ si ha la rivoluzione intorno all'asse delle x.

La superficie generata dall'archetto MM' è $2\pi y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$, e però la superficie generata da DMD' sarà

(74) $P = 2\pi \int y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ che dovrà estendersi da $x = a$ ad $x = b$, e si riduce però a contenere una sola variabile sola; il centro di gravità dell'elemento $2\pi y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ sarà sull'asse AX, e figurandosi dx piccolissimo e chiamando ρ_1 la distanza dall'asse AY, si avrà

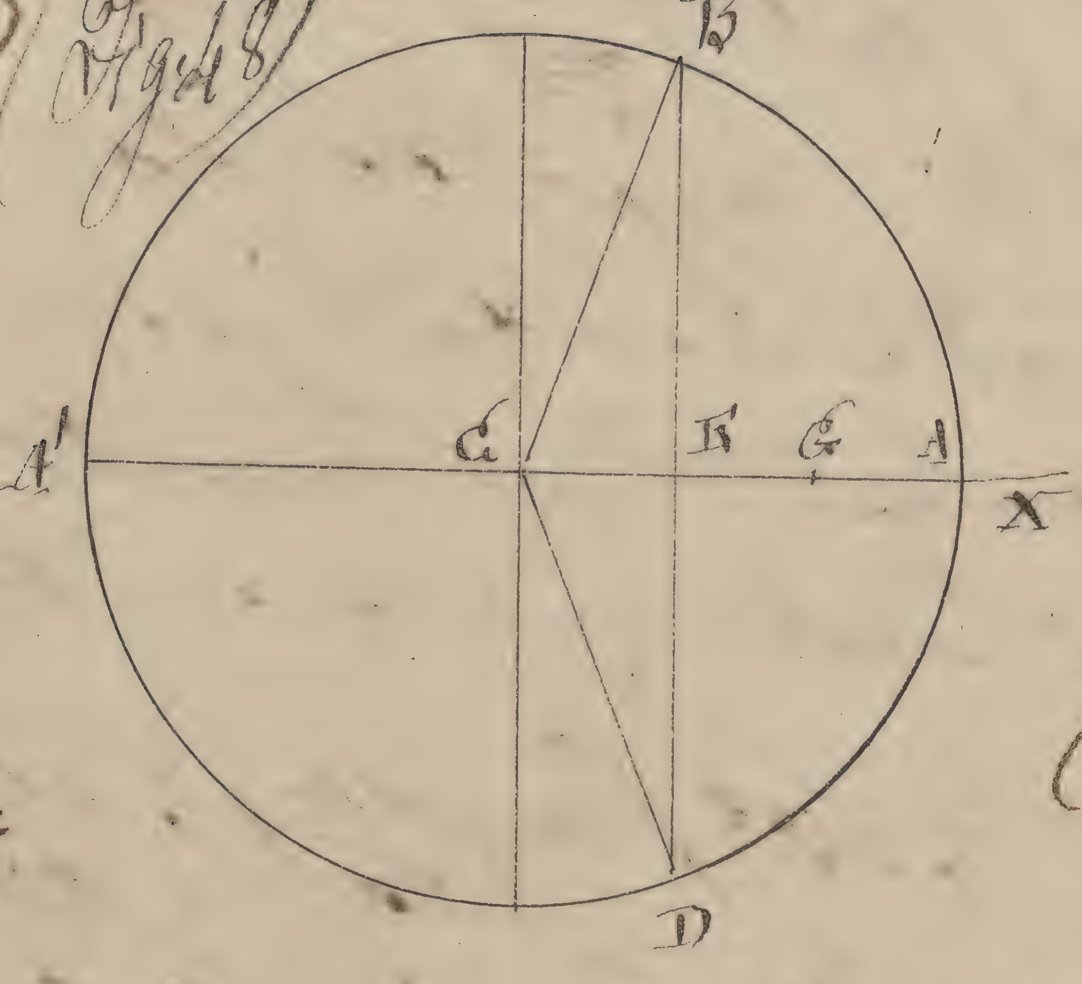
(75) $P\rho_1 = 2\pi \int xy (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$, e però

(76) $\rho_1 = \frac{\int xy (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\int y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$

Facciamo un esempio —

§. 172. Sia la linea generatrice l'arco di circolo AB (fig. 143) posta l'origine al centro e le coord. ortogonali

(22b.) (Fig. 48)



$(x))^2 x\,dx$

$\varphi_1(x))^2 dx$

l'equazione del circolo è

(77) $x^2+y^2=r^2$, d'onde

$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$,

$dy=\mp\frac{x\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$, onde la

(78) $\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$, e però avremo la

(79) $S=2\pi\int y(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} = 2\pi\int\frac{ry\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = 2r\pi\int dx = 2r\pi x + C$,

(80) $Sp_1 = 2\pi\int xy(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} = 2r\pi\int x\,dx = r\pi x^2 + C_1$.

I due trovati integrali estendere si debbono da $x=CE=a$, $x=CA=r$, e quindi avremo estendendo gl'integrali

(81) $S=2\pi r(r-a)$

(82) $Sp_1=\pi r(r^2-a^2)$ e quindi

(83) $p_1=\frac{1}{2}(r+a)=\frac{CA+CE}{2}=\frac{2CE+EA}{2}$, da ciò si vede che il centro di gravità generato dalla rotazione dell'arco BAD è nel mezzo di AE.

§. 173. Supponiamo che la

(84) $f(x,y,z)=0$ sia l'equazione della superficie d'un solido; e posta la

(85) $dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$, e detta F la superficie, avremo dal C. S. l'equazione

(86) $\int \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,.\,dx\,dy$, e quindi supposto dx indefinitamente piccola la distanza del centro di gravità dell'elemento, si avrà

(87) $P\rho = \int^2 x\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,.\,dx\,dy$.

Facendo lo stesso per gli altri piani si troveranno

(88) $P\varrho = \int^2 y\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,.\,dx\,dy$.

(89) $P r = \int^2 z\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,.\,dx\,dy$

Dunque la determinazione del centro di gravità di una superficie dipende da due integrali duplicati, presi fra limiti tali che comprendano l'intera superficie di cui vuolsi determinare il centro di gravità.

§. 172. Supponiamo che V rappresenti il volume di un solido omogeneo la cui superficie sia rappresentata dalla (84) e avremo le equazioni

(90) $V=\int^3 dx\,dy\,dz$, essendo dx, dy, dz indefinitamente piccoli, e si avrà

(91) $\rho V=\int^3 x\,.\,dx\,dy\,dz$,

(92) $\varrho V=\int^3 y\,dx\,dy\,dz$.

(93) $r V=\int^3 z\,dx\,dy\,dz$: anche questi integrali si debbo-

no

no estendere per tutto il solido di cui si vuole il centro di gravità.

§. 175. Se il corpo non sia omogeneo allora ai pesi non si possono sostituire i volumi. Supponiamo che essa densità varii per tutto il corpo di maniere che si possa considerare come funzione di x, y, z; e sia essa rappresentata da δ. Il peso dell'elemento $dx\,dy\,dz$ detta g la gravità sarà $g\delta\,dx\,dy\,dz$ che sarà il peso dell'elemento. Il peso totale del corpo sarà $\int g\delta\,dx\,dy\,dz$ ossia per essere g costante da $g\int\delta\,dx\,dy\,dz$.

Posta adunque la massa $M = \int^{3}\delta\,dx\,dy\,dz$, il peso del corpo verrà presentato da gM, e quindi

$pgM = g\int^{3} x\delta\,dx\,dy\,dz,$

$qgM = g\int^{3} y\delta\,dx\,dy\,dz,$

$rgM = g\int^{3} z\delta\,dx\,dy\,dz,$ ove levando g avremo, le

(94) $p.M = \int^{3} x\delta\,dx\,dy\,dz;$

(95) $q.M = \int^{3} \delta y\,dx\,dy\,dz;$

(96) $r.M = \int^{3} z\delta\,dx\,dy\,dz;$ che si debbono estendere per tutta la porz. del corpo ec.

(227.)

Per eseguire questa integrazione giova talvolta il trasformare le coord.e rettangole in polari come

§. 176. Scegliamo un solido simmetrico intorno ad un'asse su di esso giacerà il centro di gravità del solido. Sia l'asse delle z e posti gli assi coord.i ortogonali esso sarà perpend.e all'(x,y). Figuriamo due piani paralelli all (x,y) tra se vicinissimi oltre ogni limite. La porzione di solido compresa fra i due piani si può considerare come un cilindretto che abbia per base una sezione e altezza dz piccolissima. Sia Z la sezione; si avrà Zdz che ne rappresenterà il volume e sarà l'elemento del solido che sarà rappresentato da $\int Zdz$.

Sia z la distanza del centro di gravità del solido dal piano (x,y) si avrebbe $\int zZdz$ rappresentare il momento del solido.

Se q sia la distanza del centro di gravità dal piano (y,z) si avrà pei momenti

(97) $q\int Zdz = \int zZdz$ e però

(98) $q = \frac{\int zZdz}{\int Zdz}$.

§ 166. Per fare un'applicazione determiniamo il centro di gravità di una piramide a base qualunque. Se si tagli la piramide con un piano parallelo alla base la sezione è simile alla base, e però sulla linea condotta dal vertice al centro di gravità della base sarà il centro della piramide. Considerando i piani vicinissimi, anche in questo caso ha luogo la (98). Siano B l'area della base, ed A, A - z le distanze di Z e B dal vertice; e si avrà

$Z : B :: (A-z)^2 : A^2$

onde

(99) $Z = \frac{B(A-z)^2}{A^2}$, per il qual valore la (98) si muta nella

(100) $q = \frac{\int (A-z)^2 z\,dz}{\int (A-z)^2 dz}$, ovvero sviluppando

(101) $q = \frac{\frac{1}{2}A^2z^2 - \frac{2}{3}Az^3 + \frac{1}{4}z^4 + C}{A^2z - Az^2 + \frac{1}{3}z^3 + C_1}$

che estendere si debbe da $z = 0$, a $z = A$; ciò fatto si avrà la

(102) $q = \frac{1}{4}A$. Laonde la distanza del centro di gravità

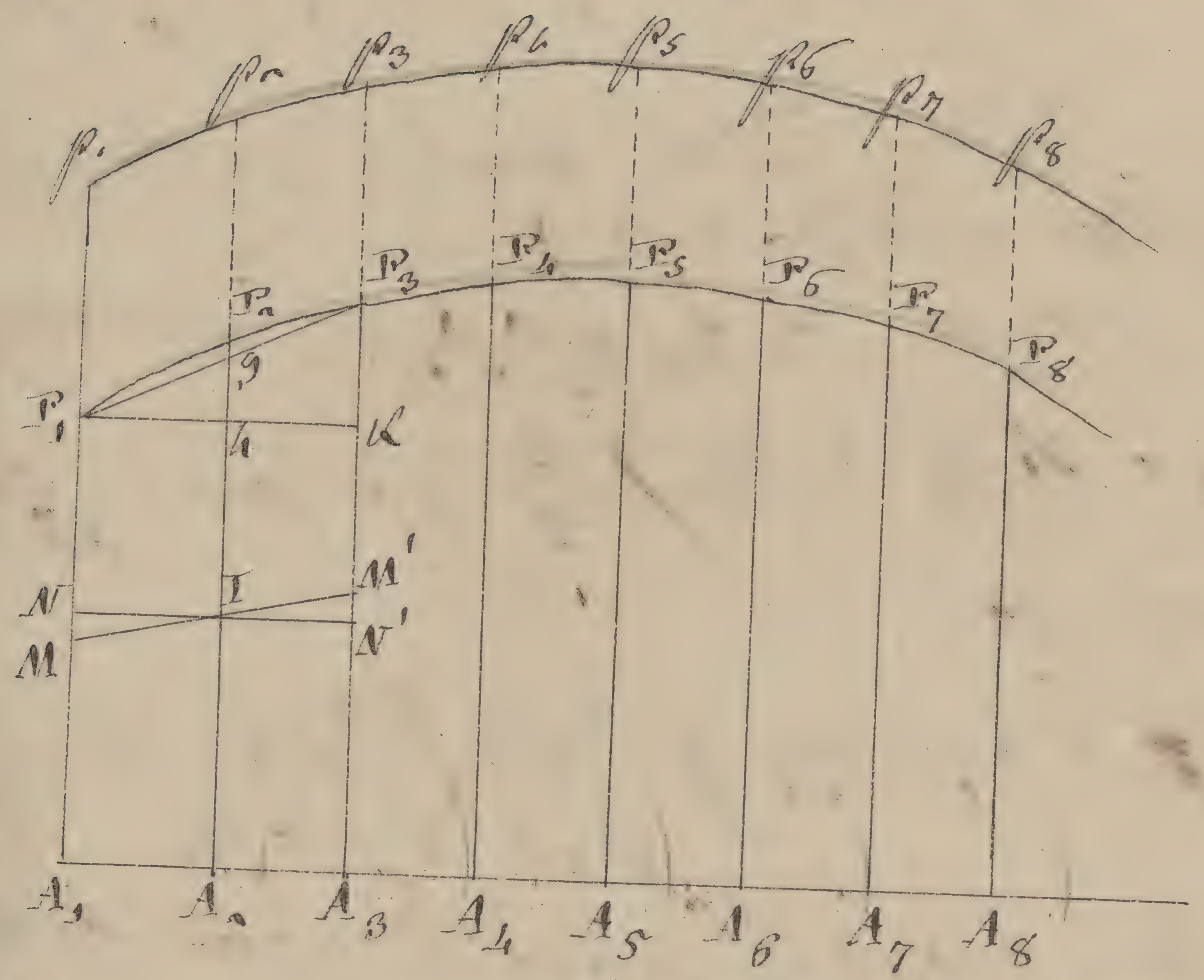
(229.)

di una piramide dalla base eguaglia $\frac{1}{4}$ dell'altezza. Se adunque a quest'altezza si conduca un piano il centro di gravità sarà su questo piano e precisamente nel punto che taglia il piano la retta che unisce il centro di gravità della base col vertice che è ad $\frac{1}{4}$ h. Ciò si adatta al cono. Siccome poi ogni poliedro si scompone in piramidi così si potrà determinare il centro di gravità di un solido qualunque

(230)

Capitolo XIV

Della maniera di determinare per approssimazione i centri di gravità



(Fig. 49)

§. 178. Poniamo (fig. 49) $A_1P_1 = y_1$, $A_2P_2 = y_2$, $A_3P_3 = y_3$, $A_4P_4 = y_4$. Sia I il centro di gravità del trapezio $A_1P_1P_3A_3$, il quale sarà situato sulla MM' che unisce i mezzi dei lati A_1P_1, A_3P_3. — Se si conduca la NN' parallela all'asse AX, si avrà $MI : IM' :: NI : IN'$, e quindi $MI + IM' : MI :: NI + N'I : NI$ ovvero $MM' : MI :: NN' : NI$; ma posto $MM' = m$, si ha

(1.) $MI = \frac{1}{3} m \left(\frac{2y_3 + y_1}{y_3 + y_1}\right)$ (x) come si è vid.° al §. 163 che è la distanza del centro di gravità del trapezio, da A_1P_1. —

da cui $m : \frac{1}{3} m \left(\frac{2y_3 + y_1}{y_3 + y_1}\right) :: NN' : NI$

(2) $NI = \frac{1}{3} NN' \left(\frac{2y_3 + y_1}{y_3 + y_1}\right)$

L'arco parabolico $P_1P_2P_3$ viene rappresentato da $(2y_2 - y_1 - y_3)\frac{2}{3}h$, ove $h = A_1A_2 = \frac{1}{2}NN'$. Si suppone in P_2 il vertice della parabola, e però il centro di gravità dell'area parabolica sarà sulla P_2A_2 che divide per metà A_1A_3. ~~L'area parab.~~ Il suo momento rispetto ad A_1P_1 sarà $(2y_2 - y_1 - y_3)\frac{2}{3}h^2$. — La superficie del trapezio $A_1P_1P_3A_3$ è $(y_1 + y_3)h$, che moltiplicata per la distanza del proprio centro di gravità da A_1P_1 sarà fatte le riduzioni $\frac{2}{3}(2y_3 + y_1)h^2$. —

(231.)

Lezione 48.

La distanza adunque dell'area $P_1P_2P_3A_1A_2A_3$ da A_1P_1 sarà

$$\frac{(2y_3 - y_1 - y_3)\frac{2}{3}h^2 + (2y_3 + y_1)\frac{2h^2}{3}}{(2y_2 - y_1 - y_3)\frac{2}{3}h + (y_1 + y_2)h}$$

$= \frac{4y_2 + 2y_3}{(y_1 + 4y_2 + y_3)} h$. Il valore dell'area $P_1P_2P_3A_3A_1$ è dunque $(y_1 + 4y_2 + y_3)\frac{h}{3}$, e per conseguenza

$$\frac{1}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)\frac{4y_2 + 2y_3}{y_1 + 4y_2 + y_3}h = (4y_2 + 2y_3)\frac{h^2}{3}$$ sarà il momento rispettivo.

Similmente, la distanza del centro di gravità dell'area $A_3P_3P_4P_5A_5$ è

$\frac{4y_4 + 2y_5}{y_3 + 4y_4 + y_5}h$, e però la distanza di lei da A_1P_1 sarà

$$\frac{4y_4 + 2y_5}{y_3 + 4y_4 + y_5}h + 2h =$$

$\frac{2y_3 + 12y_4 + 4y_5}{y_3 + 4y_4 + y_5} \times h$, la quale moltiplicata pel valore dell'area $A_3P_3P_4P_5A_5$ che è

$(y_3 + 4y_4 + y_5)\frac{h}{3}$ si avrà

$(2y_3 + 12y_4 + 4y_5)\frac{h^2}{3}$ che è il momento dell'area $A_3P_3P_4P_5A_5$ relativo ad A_1P_1. Similmente si troverebbe che il momento dell'area $A_5P_5P_6P_7A_7$ è

$$(4y_5 + 20y_6 + 6y_7)\frac{h^2}{3}$$

(232.)

laonde la distanza p da A_1P_1 del centro di gravità dell'area $A_1P_1P_2P_3 \ldots P_6P_7A_7$ sarà

$$(3)\quad p = \frac{(4y_2+2y_3)\frac{h^2}{3} + (2y_3+12y_4+4y_5)\frac{h^2}{3}}{(y_1+4y_2+4y_4+2y_5+4y_6+y_7)} \times \frac{+(4y_5+20y_6+6y_7)\frac{h^2}{3}}{\ldots)\frac{h}{3}} =$$

$$\frac{4y_2+4y_3+12y_4+8y_5+20y_6+6y_7}{y_1+4y_2+2y_3+4y_4+2y_5+4y_6+y_7} \times h$$

$$= \frac{0y_1+1.4y_2+2.2y_3+3.4y_4+4.2y_5+}{y_1+4y_2+2y_3+4y_4+2y_5+} \times \frac{5.4y_6+6y_7}{4y_6+y_7} \times h,$$

che è la distanza del centro di gravità dell'area $A_1P_1P_2 \ldots P_7A_7$ da A_1P_1.

...d A_1P_1.

Osserviamo che i coeff.i del numeratore sono quelli del denominatore moltiplicati rispett.e per 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Il ragionamento fatto per avere p fermandosi all'ordinata P_7A_7 si può proseguire oltre altre ordinate che sono tutte fra loro equidistanti, e in generale si avrà

n = numero delle ordinate a cui si ferma

$$(4)\quad p = \frac{0y_1+1.4y_2+2.2y_3+3.4y_4+4.2y_5+\ldots}{y_1+4y_2+2y_3+4y_4+2y_5} \times \frac{(n-1)y_n}{+\ldots+y_n}$$

dove n è dispari.

Supposto che al disotto dell'asse AX vi sia un'area eguale e simile a quella che è al disopra, il centro di gravità di amendue

(233.)

sarà sull'asse A X e per[?] bastevi avere la sua distanza da A, P, e che sarà data dalla (4).

§. 179. Facendo uso di un ragionamento analogo a quello che ha servito per determinare prossimamente i volumi dei solidi di rivoluz. indipendentemente dal valore approssimato dell'area generatrice, si rende manifesto che la distanza p_1 del centro di gravità dal piano del circolo ~~[illegible]~~ generato dalla rotazione dall'asse di rotazione A, P, si vede che bisognerà sostituire alle y, y_2 [?] i quadrati e però avremo la

(5) $$p_1 = \frac{0 y_1^2 + 1.4 y_2^2 + 2.2 y_3^2 + 3.4.y_4^2 + 4.2 y_5 \ldots}{y_1^2 + 4 y_2^2 + 2 y_3^2 + \cdots\cdots y_n^2}$$

Se il solido di cui si vuole il centro di gravità prossimamente, non sia di rivoluzione, dette s_1, s_2, s_3 —— s_n le sezioni del solido prodotte dalle intersecazioni di piani perpendicolari all'asse X ed equidistanti fra loro della p la distanza dalla prima sezione del centro di gravità del solido si avrà la ——

(6) $\frac{0 s_1^2 + 1 \cdot 4 s_2^2 + 2 \cdot 2 s_3^2 - - (n-1) s_n^2}{s_1^2 + 4 s_2^2 + 2 s_3^2 + - - s_n^2}$

Determinate di simile guisa le distanze del centro di gravità da tre piani perpendicolari, è chiaro che se dalle loro estremità si protraggano tre piani paralleli ai primi, il centro di gravità che si cerca sarà sulla intersecaz. comune. —

§. 160. Per fare alcune applicazioni della (5) prendiamo un cilindro di cui r sia il raggio della base e L l'altezza, e contentandosi di 2 divisioni, si avrà

(7) $p = \frac{0 r^2 + 1 \cdot 4 r^2 + 2 r^2}{r^2 + 4 r^2 + r^2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$.

Dunque il centro è alla metà dell'altezza. Come

— $(n-1) s_n^2 \, p$

§. 161. Il solido sia un cono che abbia per base il circolo del raggio r e L per altezza e prese due divisioni si avrà

(8) $p = \frac{0 \cdot 0^2 \cdot 1 \cdot 4 \left(\frac{r}{2}\right)^2 + 2 r^2}{0^2 + 4 \left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{3}{4} L$

come sappiamo essere.

§. 162 Il solido sia un tronco di cono di cui le basi sono i circoli dei raggi r, r', ed L è l'altezza compresa fra le basi di lui, e dalla

(8) si avrà

(9) $$p_1 = \frac{0v^2 + 1.4\left(\frac{v+v'}{2}\right)^2 + 2 \times v'^2}{v^2 + 4\left(\frac{v+v'}{2}\right)^2 + v'^2} \cdot \frac{I_1}{2}$$

$$= \frac{(v+v')^2 + 2v'^2}{(v+v')^2 - vv'} \cdot \frac{I_1}{4}$$ —

§. 183. La sferoide è un solido di rivoluzione generato da un semi-ellisse ruotante intorno ad un'asse in questo caso intorno all'asse minore. — L'equazione dell'ellisse riferita ad ~~[illegible]~~ un estr. asse maggiore è $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ da cui (10)

da cui $y_1 = 0$

$$y_2^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(2a\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{3}{4}b^2$$

$y_3^2 = b^2$, e però sost. nella (10.)

Il solido sia la mezza sferoide essendo a il mezzo diametro principale maggiore, e b il minore si avrà

$$\frac{0.0 + 1.4.\frac{3}{4}b^2 + 2b^2}{0^2 + 4.\frac{3}{4}b^2 + b^2} \times \frac{a}{2} = \frac{5}{8}a.$$

Le applicazioni fatte non esigono che si divida l'asse in 2. parti eguali. Nelle altre applicazioni quanto maggiore sarà la divisione, tanto maggiore sarà l'approssimazione

Capitolo XV.

Del Teorema Guldiniano

§. 186. Sia V il solido generato dall' (fig. 46) area CDMD'C' nella rivoluzione intorno all'asse AX, e si avrà

(1) $V=\pi\int(y^2-y_1^2)dx$ come si vede al §. 71. Chiamiamo λ l'area generatrice, e si avrà CDMD'C' $=\lambda$; sia q la distanza del centro di gravità dell'area λ dall'asse AX e si avrà

(2) $q\lambda=\frac{1}{2}\int(y^2-y_1^2)dx$ come al §. 168, e quindi

(3) $V=2\pi q\lambda$.

S'immagini per AX protratti due piani che facciano fra loro un angolo ω; la porzione del solido di rivoluzione compresa fra questi due piani si sta al solido intiero come $\omega : 2\pi$ circonf. intera. Chiamiamo V' tale porzione di solido, e per il detto si avrà

$V' : V :: \omega : 2\pi$; dalla quale ne nasce la

(4) $V'=\frac{V\omega}{2\pi}=\omega q\lambda$ dipend. dalla (3).

(237.)

Si osservi, che mentre l'area generatrice ruotando intorno all'asse AX genera la porzione di solido V, il centro di gravità descrive un'arco che ha il centro sull'asse AX e che ha per raggio q; e però $u q$ sarà la sua lung.^e Si dovrà dunque concludere dalla (4) che una porzione di solido generato da un'area ruotante intorno ad un'asse è espresso dall'area generatrice nel viaggio fatto dal centro di gravità. Proposiz.^e Guldiniana o centro-barica, da centros - centro baris peso.

§. 185. Presenti L una linea piana ed s la superficie generata dalla linea ruotante intorno all'asse delle ascisse e dipend.^e dal §. 165 si avrà

(5.^{a}) $Lq = \int y\sqrt{dx^2+dy^2}$ e

(6.) $s = 2\pi \int y\sqrt{dx^2+dy^2}$, e quindi

(7.) $s = 2\pi Lq$; detta s' la porzione di superficie compresa fra due piani protratti per l'asse di rotazione e fra se

(238.)

inclinati di un' angolo ω, si avrà

$S' : S :: \omega : 2\pi$, e però

(8) $S' = \frac{\omega S}{2\pi} = \omega q L$ per la (7).

Nasce quindi che la porzione di superficie generata da una linea piana intorno ad una retta situata nel piano di lei, eguaglia la lunghezza della generatrice moltiplicata per viaggio arco descritto dal centro di gravità della linea stessa

§. 186. Siano L, L_1, L_2, L_3 - &c le lunghezze di quante si voglia linee descritte sopra un piano, e siano S, S_1, S_2, S_3 - &c le superficie da esse rispettivamente generate nella rotazione intorno ad un'asse, e siano q, q', q'' &c le distanze rispettive dei centri di gravità delle linee L, L_1, L_2 &c dall'asse di rotazione e dipendendo dal §. 182 si avranno le equazioni

$S = 2\pi q L$

$S_1 = 2\pi q_1 L_1$

$S_2 = 2\pi q_2 L_2$

$S_3 = 2\pi q_3 L_3$, onde la

(239.)

(9.) $s + s_1 + s_2 + s_3 + \ldots = 2\pi(g I_1 + g_1 I_{,1} + g_2 I_{,2} + g_3 I_{,3} \ldots)$

Sia G la distanza dall'asse di rotazione del centro di gravità di tutte le linee, e pel §. 165 si avrà la

(10) $g I_1 + g_1 I_{,1} + g_2 I_{,2} + g_3 I_{,3} \ldots = (I_1 + I_{,1} + I_{,2} + I_{,3} + \ldots) G$; e

poi

(11) $2\pi(g I_1 + g_1 I_{,1} + g_2 I_{,2} + g_3 I_{,3} \ldots) = 2\pi G(I_1 + I_{,1} + I_{,2} + I_{,3} \ldots) = s + s_1 + s_2 + s_3 + \ldots$

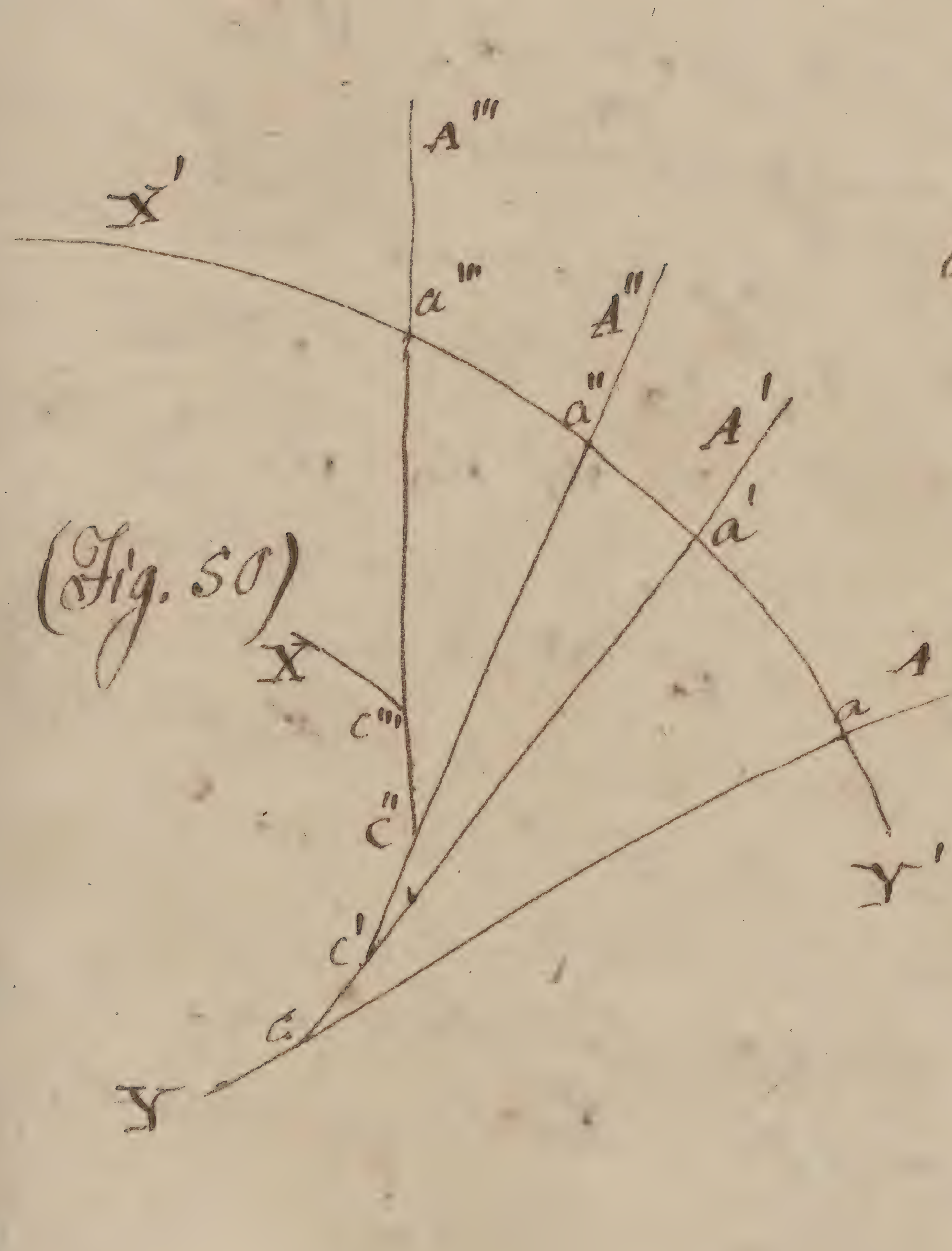
Dunque, allorchè più linee situate sul medesimo piano ruotano intorno ad un asse esistente sul piano stesso, la somma delle superficie generate uguaglia il prodotto della somma delle linee generatrici nella circonferenza descritta dal centro di gravità della loro somma.

Osserviamo che i valori di s, s_1, s_2 … si dovranno prendere coi segni, secondo che sono le coordinate positive o negative.

§. 187. Essendosi veduto al §. 186 che il volume di un solido generato dalla rotazione di una linea intorno ad l'asse di rotaz. eguaglia la superf. generatrice nel G si può dedurre generalmente che se un numero qualunque di superf. giacenti su di un piano ruotino intorno ad un asse locato su quel piano, la somma dei solidi generati, eguaglia la somma delle superficie moltiplicate per la circonferenza descritta dal centro commune di gravità

(fig. 50) §. 188. Sia YX' una evolvente piana, ed alla sua evoluta piana, ~~diasi~~ si sostituisca un poligono di un numero di lati indeterminatamente piccoli, ciascuno dei quali prolungato darà la direzione del raggio d'osculo, e la porzione compresa fra le due curve sarà il raggio d'osculo.

La evolvente e la evoluta piana sono sul med.o piano sul quale da G ad esso sia condotta una perpendicolare. Immaginiamo condotto un piano che tagli perpen-



(Fig. 50)

dicolarmente in a' l'evol-
vente, il quale passerà
per At, pel quale pas-
serà ancora la perpendicolare
condotta da c.

Se il piano mantenendo-
si sempre perpendicolare
all'evolvente passi da a in
a', in questa nuova po-
sizione passerà per c' e
per conseguenza in esso
vi sarà la perpendicolare
condotta da c'. L'areola
da esso descritta, si confon-
de con quella descritta
dal raggio ca. Il moto
adunque di questo piano
può concepirsi equivalen-
te al moto di rotazione
d'all'asse protratto per c perpen-
dicolare all'evolvente e
sua piano. Sul piano

Lezione 49.

perpendicolare all'evolvente
immaginiamo descritte delle linee
L, L_1, L_2 ecc. o delle super-
ficie S, S_1, S_2, S_3 ecc. di-
qualunque, e il centro di
gravità dell'una o dell'
altra nel prefato movi-
mento del piano descriverà
un'arco $= aa'$ e pel dimo-
strato la somma delle su-
perficie indeterminatamente
piccole sarà
$aa'(L_1 + L_1 + L_2 + \text{ecc.})$ e

(242)

l'altra

$aa'(S + S_1 + S_2 + \&)$. —

Il piano mobile arrivato in a' prosegua il suo moto mantenendosi perpendicolare all'evolvente e passi da a' ad a''. Questo movimento si potrà considerare come e però avremo come

$a'a''(I_1 + I_{1,} + I_{1,2} + \&)$ e

$a'a''(S + S_1 + S_2 + \&)$.

Immaginando un'altro movimento simile al fatto si avrà

$a''a'''(I_1 + I_{1,} + I_{1,2} + \&)$

$a''a'''(S + S_1 + S_2 + \&)$

$a'''a^{IV}(I_1 + I_{1,} + I_{1,2} + \&)$

$a'''a^{IV}(S + S_1 + S_2 + \&)$

---

e però

$(aa' + a'a'' + a''a''' + \ldots \&) \times$
$(I + I_{1,} + I_{1,2} + I_{1,3} + \ldots \&)$;

$(aa' + a'a'' + a''a''' + \ldots \&) \times$
$(S + S_1 + S_2 + S_3 + \ldots \&)$,

Sia λ la lunghezza dell'arco dell'evolvente dato e precisamente quello che passa nella rotazione il piano e però

$\lambda = aa' + a'a'' + a''a''' \&$.

e però si avrà

$\lambda \times (I + I_1 + I_{11} + \&c)$, la somma della superficie, e

$\lambda (S + S_1 + S_{11} + \text{---} \&c)$ la somma dei solidi.

Si ha quindi il seguente teorema più generale del Guldiniano.

Se un piano sul quale son descritte più linee o superficie si muova su una curva piana mantenendosi a lei perpendicolare, la somma delle superficie o dei solidi descritti dalle linee o superficie nel movimento del piano, eguaglia la somma delle linee o delle superficie moltiplicate per l'arco ...

§. 189. Facciamo un esempio della regola di Guldino determinando (fig. 45) la superficie generata dalla rotazione dell'arco (a)

La distanza IG del centro di gravità dell'arco MAM' è su questo raggio, e si ha la

(12) $IG = \frac{MM'}{MAM'} . AG$. Si osservi che IG rappresenta eziandio la distanza del centro di gravità dell'arco MAM' intorno l'asse GY. Nel moto di rotazione del piano dell'arco MAM', abbia questo passato un'arco $= \omega$, e l'arco descritto dal centro di gravità sarà $IG . \omega = \omega \frac{MM'}{MAM'} . AG$,

(a) MAM' intorno l'asse GY.

e però

$$MAM'\,\omega \cdot \frac{MM'}{MAM'}\,AG = \omega\, MM' \cdot AG.$$

superficie cercata. ———

Se $\omega = 2\pi$ e l'arco MM' sia la semicirconferenza, sarà $MM' = 2AG$, e però sostituendo si avrà $4\pi \overline{AG}^2$ che è la superficie di una sfera come già sapevamo. La circonferenza del circolo massimo della sfera è

$$2\pi AG \cdot \frac{AG}{2} = \pi \overline{AG}^2 .$$ ossia

Capitolo XVI°

Dell' equilibrio di un sistema variabile.

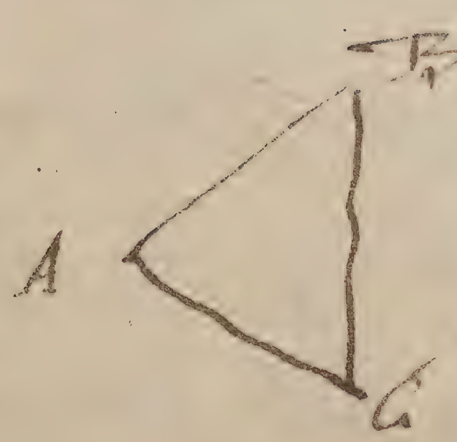
§. 190. Finora i punti di applicazione delle forze si sono supposti tali che le loro mutue situazioni si mantengono sempre le medesime. Se sotto l'azione delle forze soffrono cambiamento le mutue distanze dei punti ai quali le forze stesse sono applicate, si avrà un sistema di forma variabile.

Se delle forze qualunque si facciano equilibrio applicate ad un sistema variabile di punti, l'equilibrio non cesserà se si considera il sistema invariabile.

Da ciò si deduce che le condizioni trovate per un sistema di forma invariabile devono entrare nelle variabili.

Ma queste non bastano, e ve ne vogliono delle altre.

§. 191. Queste condizioni di un sistema variabile si sono presentate in diversi modi, ma si riducono intrinsecamente a questo, che le forze applicate



ai punti del sistema siano
scomponibili in forze appli-
cate ai punti d'applicazione
e dirette secondo le rette che uniscono i punti
e che le componenti siano
eguali ed opposte, vi sarà
equilibrio.
Ciò si è ved. al §. 111 ff
tre forze congiungendo i lo-
ro punti con tre rette. —

§. 192. Consideriamo ora un nu-
mero qualunque di forze
applicate ad un numero
qualunque di punti. —
Si prendano ad arbitrio
tre di questi punti, e si
uniscono 2 a 2 con delle
rette, cioè si formi un
triangolo. Se dagli altri
punti si protraggano a
ciascuno dei tre suddetti delle
rette, si formeranno tan-
te piramidi triangolari
che saranno di numero e-
guale a quello dei punti
meno tre. Il triangolo fatto
prima sarà la base di tut-
te le piramidi e gli altri
ad saranno i vertici. —
Ciò posto figuriamo le
forze applicate ai verti-
ci delle piramidi o la
risultante di quelle appl. a ciascun vertice ~~[illegible]~~
scomposta in tre secondo
le direzioni degli spigoli
della piramide a cui appar-
tiene. —

(227)

Così per le altre più.

Le tre risultanti delle forze applicate ai punti presi ad arbitrio si scompongano in forze agenti secondo gli spigoli stessi, eguali ed opposte alle prime che dai vertici della piramide hanno la direzioni delle prime ed in altre agenti sui tre punti.

Le forze secondo gli spigoli si possono omettere, perchè si è tener conto soltanto delle rimanenti che agiscono sui tre vertici della base.

Ora queste forze che agiscono sopra tre punti, per l'equilibrio conviene che si possano scomporre in forze eguali ed opposte lungo i tre lati.

§. 193. I tre punti che determinano la base comune delle piramidi danno tre mutue distanze. Sia n il numero dei punti d'applicazione delle forze, e le piramidi saranno $n-3$ ciascuna delle quali da tre mutue distanze dai punti della base, e però le mutue distanze saranno $3(n-3)+3=3n-6$

Dunque in ciascheduno

(218.)

di queste 3n-6 ~~mutue~~ distanze conviene che le componenti delle forze siano eguali. La condizione dunque unica e necessaria all'equilibrio è la possibilità che le forze applicate ai punti del sistema si scompongano nelle direzioni delle 3n-6 mutue distanze in forze eguali 2 a 2.

Ma al Cap.° IX si è dimostrato che da questa condizione derivano le sei equazioni che debbono aver luogo per l'equilibrio di un sistema invariabile, dunque le sei equazioni trovate e che ora abbiamo dimostrato appartenere a qualunque sistema invariabile, ~~dovranno~~ dovranno essere(a) allorchè le mutue distanze dei punti del sistema sono invariabili, la condizione generale basta all'equilibrio del sistema in qualunque modo venga essa adempiuta, vole a dire qualunque sia la direzione delle 3n-6 mutue distanze. Quando nessuna di queste è invariabile, ma è solo funzione delle loro lun-

(a) contenute nelle cond.i del sistema variabile. + S. 194.

sidono

ghezze la qual funzione
deve restar costante, al-
lora le indicate scomposizio-
ni, e che è necessaria a
qualunque siasi equilibrio
non basta sola al sistema
variabile, ma le forze
debbono avere una relazio-
ne che dipende dalla
funzione delle medesime
distanze che deve rima-
nere invariabile. —

§. 195. Siano 2 forze P, P' applica-
te agli estremi di una
corda pieghevole, ed una
terza R sia applicata
all'estremo di un'altra
corda unita alla prima
con un nodo fisso. —
Dalla fisica si sa che
le P, P', R, siano eguali
o no gli angoli che le 2
porzioni della corda fis-
sano coll'altra, si fa
equilibrio; ma se la ter-
za forza R sia applica-
ta alla corda mediante
un anello scorrevole
lungo di lei si è vedu-
to che non v'è equilibrio se l'an-
golo non è partito per mezzo
dalla direzione dell'altra
corda, da ciò si vede la
differenza

(250)

§. 196. La ragione che debbe regnare fra le forze opposte ed equali dirette secondo le 3n − 6 mutue distanze deducesi dalla funzione delle mutue distanze stesse che si deve considerare costante, e così si ottiene la legge fondamentale di qualunque sistema per l'equilibrio. Poichè se questa basta pel sistema variabile ed è indifferente per l'invariabile essa vale ~~pe~~ tutti i sistemi.

§. 197. Cominciamo a considerare quattro punti per avere un caso particolare, e si avranno 6 mutue distanze.

Sieno m, n, p, q, r, s queste mutue distanze, le quali si possono considerare come gli spigoli di una piramide triangolare di cui i punti sono i vertici. Si ha n = 4, le mutue distanze 3n − 6 = 6. Supponiamo il sistema riferito a 3 assi coordinati o x_1, y_1, z_1 siano le coordinate del vertice della piramide, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4 le coord. dei tre vertici base della piramide.

(251.)

si hanno le seguenti equazioni per l'introduzione ai Calcoli

(1.) $m = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$;

(2.) $n = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}$;

(3.) $p = \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 + (z_1 - z_4)^2}$;

(4.) $q = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}$.

(5.) $r = \sqrt{(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2 + (z_2 - z_4)^2}$;

(6.) $s = \sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 + (z_3 - z_4)^2}$.

Sia $f(m, n, p, q, r, s)$ la funzione delle mutue distanze dei quattro punti che si deve considerare invariabile. Dovrà dunque essere

(7.) $f(m, n, p, q, r, s) = U = 0$

Per quello che si è detto affinchè le forze applicate ai quattro punti siano in equilibrio, è necessario che scomposte ciascuna in tre secondo gli spigoli le due componenti secondo lo stesso spigolo riescano eguali ed opposte —

Lezione 20.

A determinare la ragione delle componenti intorno a ciascuno dei vertici della piramide supporremo che

dal punto (x_1, y_1, z_1) che è il vertice della piramide, sia variabile, e che gli (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) (x_4, y_4, z_4) siano immobili nello spazio. Questa supposizione non romperà l'equilibrio; i tre lati che concorrono in esso, sono n, m, p.

In questa supposizione nella (7) si dovranno considerare variabili le m, n, p, e costanti le altre. In tal caso la (7) rappresenterà una superficie di cui x, y, z, sono le coordinate, ciò che vuol dire che il punto si deve mantenere su questa superficie nella quale si dovrà mantenere per tutto il movimento. La cond.e d'equilibrio è che la risultante di tutte le forze che sollecitano il punto sia normale la superficie.

Prendiamo la derivata totale della $f(m, n, p, q, r, s)$ osservando che m, n, p, sono sole variabili, e sono funzioni di x_1, y_1, z_1, che variano sole; si avrà dunque

$$f'(m)\left(\frac{m'}{x_1'}\right) + f'(n)\left(\frac{n'}{x_1'}\right) + f'(p)\left(\frac{p'}{x_1'}\right)$$
$$+ f'(m)\left(\frac{m'}{y_1'}\right) + f'(n)\left(\frac{n'}{y_1'}\right) + f'(p)\left(\frac{p'}{y_1'}\right)$$

(253.)

$+f'(m)\left(\frac{m'}{z_1'}\right)+f'(n)\left(\frac{n'}{z_1'}\right)+f'(p)\left(\frac{p'}{z_1'}\right)$
$=\left(\frac{U'}{x_1'}\right)+\left(\frac{U'}{y_1'}\right)+\left(\frac{U'}{z_1'}\right)$ derivata totale nella fatta supposiz. Dipendendo dai valori di m, n, p dipendenti da x_1, y_1, z_1 avremo la seg.te espressione a vece dell'antecedente, che è

$$f'(m)\frac{x_1-x_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}$$
$$+f'(n)\frac{x_1-x_3}{\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2}}$$
$$+f'(p)\frac{x_1-x_4}{\sqrt{(x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2+(z_1-z_4)^2}}$$
$$+f'(m)\frac{y_1-y_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}$$
$$+f'(n)\frac{y_1-y_3}{\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2}}$$
$$+f'(p)\frac{y_1-y_4}{\sqrt{(x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2+(z_1-z_4)^2}}$$
$$+f'(m)\frac{z_1-z_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}$$
$$+f'(n)\frac{z_1-z_3}{\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2}}$$
$$+f'(p)\frac{z_1-z_4}{\sqrt{(x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2+(z_1-z_4)^2}}$$

le quantità che moltiplicano $f'(m), f'(n), f'(p)$ sono i coseni degl'angoli che le mutue distanze fanno cogli assi x, y, z.

(254)

Dunque se supporremo le forze che agiscono secondo le direzioni delle mutue distanze proporzionali ad $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$ esse avranno per componenti secondo gli assi delle x, y, z, le quantità $f'(m)\left(\frac{m'}{x_1'}\right)$, $f'(n)\left(\frac{n'}{x_1'}\right)$, $f'(p)\left(\frac{p'}{x_1'}\right)$ che agiscono sull'asse delle x e che si ridurranno ad una sola che sarà la somma loro $f'(m)\left(\frac{m'}{x_1'}\right) + f'(n)\left(\frac{n'}{x_1'}\right) + f'(p)\left(\frac{p'}{x_1'}\right)$; ma questa somma è derivata della funzione rispetto ad x_1 (7) equazione ~~...~~ dunque la ~~componente~~ ~~e risultante~~ secondo l'asse delle x della forza che agisce sul punto (x_1, y_1, z_1) verrà rappresentata da $\left(\frac{U_1'}{x_1'}\right)$; similmente si dimostra che $\left(\frac{U_1'}{y_1'}\right)$, $\left(\frac{U_1'}{z_1'}\right)$ sono le componenti secondo gli assi delle y, z della forza che sollecita il punto (x_1, y_1, z_1) dunque avremo

perchè $\left(\frac{m'}{x_1'}\right)$, $\left(\frac{n'}{x_1'}\right)$, $\left(\frac{p'}{x_1'}\right)$ sono i citati coseni

$$(8)\quad R_1 = \sqrt{\left(\frac{U'}{x_1'}\right)^2 + \left(\frac{U'}{y_1'}\right)^2 + \left(\frac{U'}{z_1'}\right)^2}$$

(255.)

che sarà la risultante delle forze che agiscono sul punto (x_1, y_1, z_1). —

Si hanno quindi le equazioni

(9.) $\theta R_1 \hat{} X = \left(\frac{U'}{x_1'}\right) : R_1$,

(10) $\theta R_1 \hat{} Y = \left(\frac{U'}{y_1'}\right) : R_1$,

(11.) $\theta R_1 \hat{} Z = \left(\frac{U'}{z_1'}\right) : R_1$; ma le equazioni delle projezioni sui piani (x, z) (y, z) della normale la superficie presentata dalla (7) sono

(12) $(x - x_1)\left(\frac{U'}{z_1'}\right) = (z - z_1)\left(\frac{U'}{x_1'}\right)$

(13) $(y - y_1)\left(\frac{U'}{z_1'}\right) = (z - z_1)\left(\frac{U'}{y_1'}\right)$

Dunque pel veduto nell' 8.° i coseni degli angoli che fa la normale cogli assi coordinati ortogonali delle x, y, z, sono presentati dalle (9) (10) (11) ricordandosi. Nasce quindi che la risultante delle forze proporzionali ad $f'(m)$ $f'(n)$, $f'(p)$ che agiscono sul punto (x_1, y_1, z_1) fa cogli assi coordinati gli angoli stessi che fa la normale nel punto

(x_1, y_1, z_1) della superficie che viene presentata dalla (7.)–

Posto adunque che le forze che agiscono sul punto $(x, y, z,)$ siano proporzionali alle $f'(u), f'(z), f'(p)$ la direzione della risultante si confonde con quella della normale. Ma questa è la condizione necessaria all'equilibrio ——

Adunque all'equilibrio del sistema di 4 punti dei quali il solo $(x, y, z,)$ si considera mobile, è necessario che questo sia sollecitato da forze proporzionali ad $f'(u)$ $f'(z)$ $f'(p)$.

§.198. Si vede che la scelta del punto variabile è arbitraria. Sia per es. quello a cui vanno a terminare le mutue distanze q, r; si proverebbe della stessa guisa che le forze che agiscono in queste direzioni esser dovrebbero proporzionali ad $f'(u)$ $f'(q)$ $f'(r)$. Così si troverebbe per le altre combinazioni. Ma si è veduto che non s'altera

per nulla, a supporre [il sistema] dei punti fissi ed un punto mobile; dunque dovremo concludere che le forze eguali ed opposte agiscono secondo le mutue distanze (a)
È dunque dimostrato, che se li punti sieno tra loro dipendenti per la condizione supposta

i punti non possono essere in equilibrio a meno che non sieno sollecitati gli uni verso gli altri nelle direzioni delle loro distanze da forze proporzionali alle derivate delle distanze prese della loro funzione che rimaner deve costante.

Questa condizione determina interamente le forze e però delle 6 forze si faranno equilibrio o no se soddisfaranno o no alla condizione stabilita.

§.199. Si è supposto che nelle (7) entrano le 6 distanze delle quali le tre m, n, p, variabili e le q, r, s costanti; supponiamo ora che

(a) debbono essere proporzionali ad $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$, $f'(q)$ ——— acciocchè vi sia equilibrio.

(258)

delle m, n, ga vi sono le sole m, n, cioè che l'equazione di condizione sia

(14) $f(m, n, q, v, s) = 0$. —

Figuriamo un piano che passi per m, n, q. Se l'angolo formato dalle due distanze m, n che passano per gli estremi punti... bisognerà che vi sia sempre fra m ed n la relazione data dalla (14) e costanti le q, v, s. I vertici successivi del triangolo descriveranno una linea che sarà nel piano condotto e sarà l'intersecaz.e della superf.e della (14) col piano.

Se la linea ruoti intorno alla distanza q genererà una superficie di rivoluzione nella quale m ed n sono soli variabili dipend.e dalla (14).

Se si prolunghino le m, n oltre il loro punto commune (x, y, z) e nei prolungamenti si prendano parti proporzionali ad $f'(m)$, $f'(n)$ la diagonale di questo parallelogrammo sarà normale alla linea che genera la superficie di rivoluzione. Ma la normale di questa linea è pure normale la superficie

di rivoluzione, dunque la risultante essendo normale si confonderà colla posta diagonale. Concludere adunque si debbe che la componente secondo la distanza p che non entra nella (14) è nulla.

§. 288 Se nella (7) non fosse contenuta che una sola variabile m, si avrà

(15.) $f(m, q, r, s) = C$; siccome q, r, s, C sono costanti per ipotesi, da questa si può ottenere la

(16) $m = C'$. Prendendo il valore di m si ha

(1) $m = \sqrt{(x_1-x_a)^2+(y_1-y_a)^2+(z_1-z_a)^2}$,

dunque avremo la

(17.) $(x_1-x_a)^2+(y_1-y_a)^2+(z_1-z_a)^2 = C'^2$

che rappresenta una sfera di cui C' è il raggio, e però la forza che deve essere proporzionale ad m è perpendicolare alla superficie sferica e però rimane intera la sua azione, e sono nulle le componenti che agiscono secondo le distanze variabili non contenute nella (7). — Conseguita da ciò che avere non si può azione veruna fra le variabili che non sono nella (7). —

(260)

copto ff

§. 201. Sia ora il sistema composto di quanti punti si voglia, e che l'equazione
(18) $f(m, n, p, q, r, s \cdots \mathcal{Z}) = U = a$ sia la relazione costante fra le mutue distanze dei punti. Per l'equilibrio del sistema bisognerà primamente che le forze applicate ai punti di q.to sistema sieno scomponibili secondo le distanze m, n, p, ~~q, r~~ in forze eguali 2 a 2 ed opposte. Per determinare la relazione delle componenti prendiamo in considerazione soli 4 punti del sistema avendo le ~~altre~~ mutue dist.ze variabili e le altre costanti. In questi quattro punti si dovrà avere ciò che si avrebbe se essi fossero unici nello spazio e che sussistesse la relazione data dalla (18) la qual cosa mostrasi facilmente considerando i 6 spigoli della piramide che soli sono rimasti variabili: il punto che è vertice della piramide non avrà alcuno legame con quegli spigoli che suppongonsi invariabili

di tre punti che determinano la base che sono mobili nello spazio non saranno impediti nel loro dalle distanze degli altri punti dal vertice. Infatti perchè essi della base si possono muovere è necessario che le distanze invariabili o spigoli intorno ai vertici delle altre piramidi possano ruotare intorno ai vertici che sono pur mobili. Ciò posto, le distanze che sono sì costanti non impediranno il movimento dei tre punti in tutte le figure e in tutte le posizioni in cui possono, quando si fanno variare le mutue distanze. Dunque è necessario per l'equilibrio (dal dimostrato) che i punti siano sollecitati da forze proporzionali alle prime derivate delle mutue dist. Ma questa proporzione deve necessariamente aver luogo nell'equilibrio del sistema, avvegnacchè se esso esista, essi si

movimento

pure supponendo che delle mutue distanze divenDello no invariabili, sopprimendosi le forze eguali e contrarie che si elidono lungo le distanze costanti; dunque le forze rimanenti applicate al sistema che agiscono secondo le mutue distanze rimaste variabili, debbono seguire la legge per l'equilibrio del sistema; dunque nel punto dell'equilibrio generale, le componenti che agiscono lungo gli spigoli delle piramidi, sono proporzionali alle 1.e derivate della (185) a

relative agli spigoli stessi —

Ma a cagione degli spigoli comuni alle successive piramidi la proporzione passa da uno spigolo all'altro, dunque tutti i punti del sistema sono sollecitati gli uni verso gli altri da forze proporzionali alle derivate

$f'(m) \cdot f'(n)$ ——— $f'(r)$

Ne nasce quindi che se nei differenti punti del sistema si prolunghino le direzioni delle mutue distanze, e si prendano delle parti proporzionali alle prime derivate delle corrispondenti mutue distanze si avranno delle componenti delle forze che si debbono applicare ai punti per avere

...tilio

(263)

Lezione 51

la 52. Ripetizione

l'equilibrio.

Componendo in ciascun dei punti le forze in una sola, la risultante sarà quella necessaria per l'equilibrio.

§. 202. Abbiamo trovato al §. 197. che la forza applicata al punto (x_1, y_1, z_1) è data dalla

$$(18)\quad R_1 = \sqrt{\left(\frac{U'}{x'_1}\right)^2 + \left(\frac{U'}{y'_1}\right)^2 + \left(\frac{U'}{z'_1}\right)^2};$$

si troverebbe similmente per gli altri punti (x_2, y_2, z_2) posta R_2 la risultante

$$(19)\quad R_2 = \sqrt{\left(\frac{U'}{x'_2}\right)^2 + \left(\frac{U'}{y'_2}\right)^2 + \left(\frac{U'}{z'_2}\right)^2}$$

e così pel (x_3, y_3, z_3) la

$$(20)\quad R_3 = \sqrt{\left(\frac{U'}{x'_3}\right)^2 + \left(\frac{U'}{y'_3}\right)^2 + \left(\frac{U'}{z'_3}\right)^2}$$

ciascuna delle quali è perpendicolare alla superficie che il punto corrispondente potrebbe descrivere in virtù della (9) supponendo gli altri punti fissi. La (18) rappresenta una superficie a cui R_1 è perpendicolare, e (x_1, y_1, z_1) è variabile; così R_2 è perpend.e alla superf.e corrispondente ponendo (x_2, y_2, z_2) variabile.

§. 203. Allorchè i punti del sistema sono 4 le loro distanze sono $3n - 6 = 12 - 6 = 6$, cioè

(264.)

sono le 6 considerate distanze.
Se $n = 5$, si hanno due pira-
midi; le due piramidi danno
9 distanze e una da ver-
tice a vertice; dunque 10.
mutue distanze; si avrà
$3.5 - 6 = 9$ e le distanze
sono 10; giacchè non si era-
no considerate le distanze
dei vertici fra loro; sei
punti sono 6 si hanno
3 piramidi e 12 mutue
distanze e con quelle dei
vertici 15 se ne hanno;
si ha $3n - 6 = 12$. e però
$15 > 3.6 - 6 = 12$.

Così seguitando si vede
essere il N.º delle mutue
distanze maggiore di
$3n - 6$ quando $n > 4$.
Cosicchè il N.º totale delle
mutue distanze supera
$3n - 6$ delle distanze che
separano i vertici fra loro.

Osserviamo che ciascheduna
na delle distanze fra i ver-
tici delle piramidi che
hanno la base comune
forma con due spigoli ap-
partenenti a due diverse
piramidi un triangolo.
e però per mezzo della trigo-
nometria si può determi-
nare la distanza fra 2.

(365)

vertici delle piramidi in funzione degli spigoli che appartengono alle 2 dette piramidi e l'angolo che fanno fra loro. —

Le linee trigonometriche di cosiffatto angolo possono determinarsi in funzione delle coordinate dei punti estremi che lo formano (l'angolo). —

Poniamo che m_1, n_1, p_1 siano le distanze fra i vertici delle piramidi aventi la base comune, e nella funzione data fra le mutue distanze dei punti del sistema (18) oltre le mutue distanze spigoli delle piramidi supponiamo che vi siano le distanze dei vertici delle piramidi. Sia l'equazione di condizione la

(21) $F(m, n, p, q, r, s \text{ ec. } m_1, n_1, p_1, q_1, r_1 \text{ — ec.}) = U = G.$ —

Potendosi scegliere ad arbitrio i 3 punti che formano la base comune delle piramidi, è evidente che le distanze m, n, p possono rappresentare le distanze qualunque dei punti

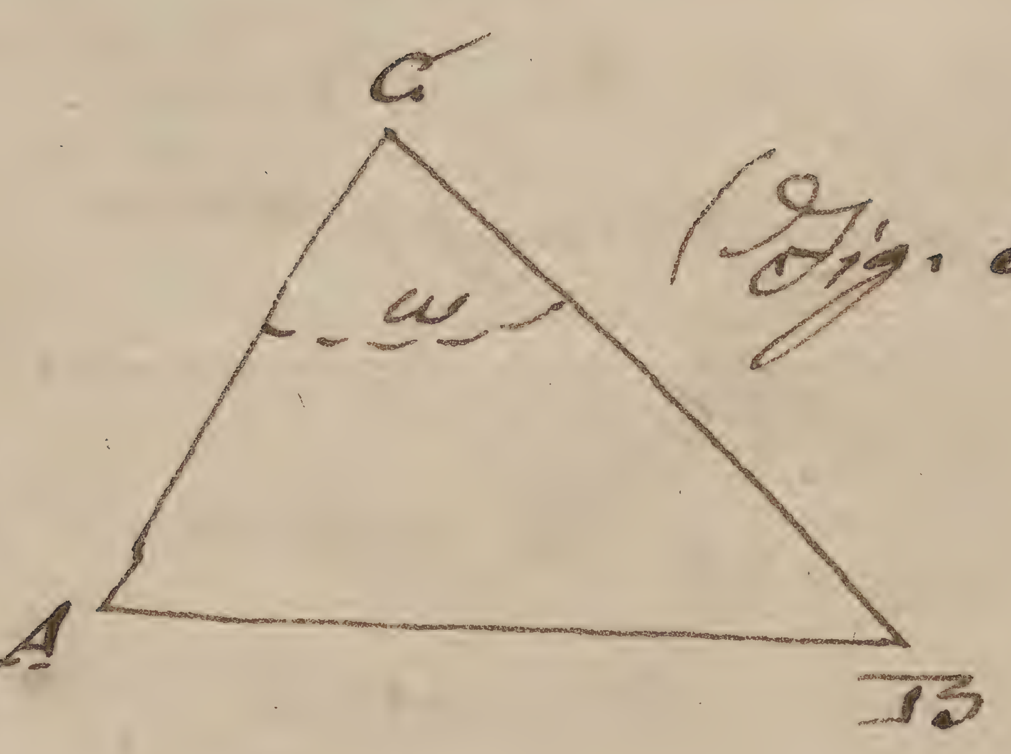
del sistema. Per mezzo delle osservate relazioni fra le distanze dei vertici e gli spigoli si possono eliminare m. n. p. &c ed ottenere delle funzioni degli spigoli delle piramidi che saranno differenti à misura che diversi saranno i punti che determinano ~~m. n. p.~~ da la base della piramide. ——

Prendendo le forze proporzionali alla funzione degli spigoli della piramid. che essa contiene si troveranno delle forze dirette secondo gli spigoli stessi per la qual cosa si potrebbe dubitare che potessero variare la forza totale che aver debbe sirogassi l'equilibrio. ——

Osserviamo che le forze totali si compongono di derivate della funzione U prese rispetto alle coord. dei punti del sistema; inoltre si osservi che se per es. si ha $m_1 = \varphi(n_1, p_1)$, mettendo a vece di m_1, n_1, p_1, i loro valori espressi per le coord. estreme delle distanze m_1. n_1, p_1 risultar debbe un'equazione vera per identi-

di termini, cioè

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$



(Fig. 51)

Si osservi la (fig. 51.) Siano A, B, C i punti (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), e dalla geometria si avrà la

(22) $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - 2AC.CB.\cos\omega + \overline{CB}^2$. Sostit. a vece di AB, AC, BC i loro valori espressi per le coord. degli estremi di queste rette e il valore di $\cos\omega$ espresso per tali coord. dico essere il 1.° membro = al 2.° si avrà la

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 = (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2 - 2\cos\omega\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2}\times$$

$$\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2} + (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2;$$

ma la (Introd.)

(23) $\cos\omega = \cos AC.\hat{X}.\cos BC.\hat{X} + \cos AC.\hat{Y}.\cos BC.\hat{Y} + \cos AC.\hat{Z}.\cos BC.\hat{Z}$

per l'Introd. §. – e

$$\cos AC\hat{X} = \frac{x_1-x_2}{\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2}}$$

$$\cos BC\hat{X} = \frac{x_2-x_3}{\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2}}$$

$$\cos AC\hat{Y} = \frac{y_1-y_3}{\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2}}$$

(268.)

$$\theta BG^{\wedge}Y = \frac{y_2 - y_3}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}}$$

$$\theta AG^{\wedge}Z = \frac{z_1 - z_3}{\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}}$$

$$\theta BG^{\wedge}Z = \frac{z_2 - z_3}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}}$$

e però

(21) $$\theta w = \frac{x_1 - x_3}{\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}} \times \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}} + \frac{y_1 - y_3}{\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}} \times \frac{y_2 - y_3}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}} + \frac{z_1 - z_3}{\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}} \times \frac{z_2 - z_3}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}},$$

dunque

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 - 2(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) - 2(y_1 - y_3) \times (y_2 - y_3) - 2(z_1 - z_3)(z_2 - z_3) + (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = (x_1 - x_3)(x_1 - x_2) + (y_1 - y_3)(y_1 - y_2) + (z_1 - z_3)(z_1 - z_2) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_2) + (z_1 - z_2)(z_1 - z_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

(269)

quindi risulta che trovate le equazioni (8) (19) e (20) che sono

$$(8)\ R_1 = \sqrt{\left(\frac{U'}{x_1'}\right)^2 + \left(\frac{U'}{y_1'}\right)^2 + \left(\frac{U'}{z_1'}\right)^2}$$

$$(19)\ R_2 = \sqrt{\left(\frac{U'}{x_2'}\right)^2 + \left(\frac{U'}{y_2'}\right)^2 + \left(\frac{U'}{z_2'}\right)^2}$$

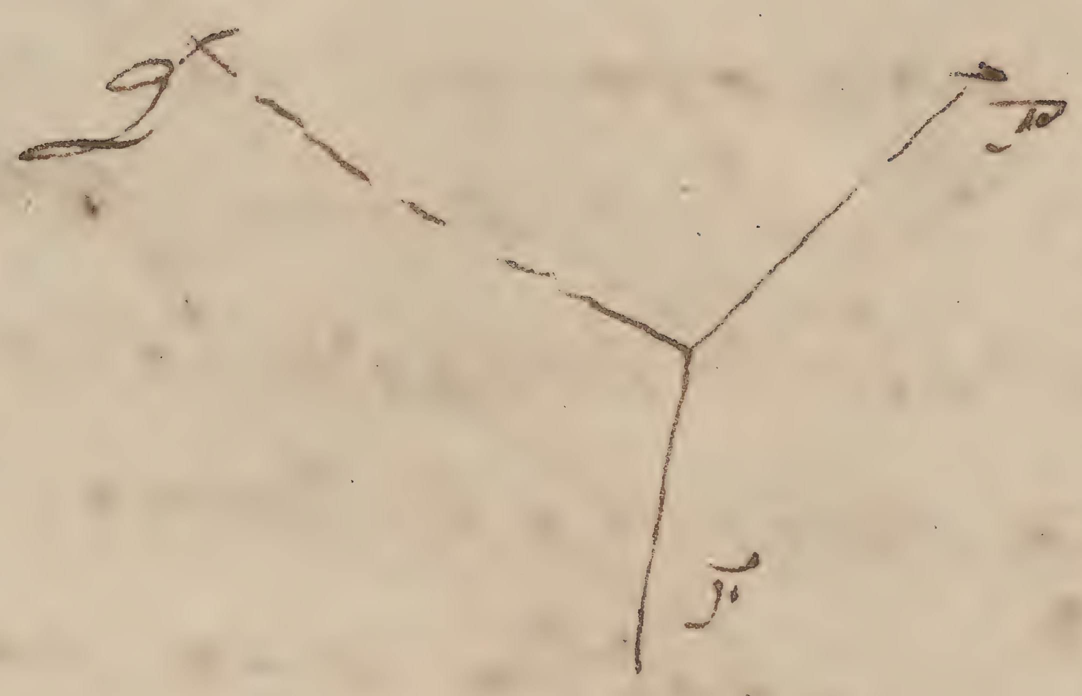
$$(20)\ R_3 = \sqrt{\left(\frac{U'}{x_3'}\right)^2 + \left(\frac{U'}{y_3'}\right)^2 + \left(\frac{U'}{z_3'}\right)^2}$$

per certe mutue distanze essi si considerano invariati introducendo altre distanze dipendentemente dalla funz. delle distanze stesse.

Vedesi adunque che non è necessario alla determinazione di R_1, R_2, R_3 di eliminare dalla funzione $F(m, n, p, \ldots v_2, m_2, p_2 \ldots q) = U = 0$ ~~espresse~~ le m_1, m, p, q che sono le mutue distanze dei vertici delle piramidi che hanno la base comune allorchè il N.° dei punti è 7 ec.

§. 206. Vedesi adunque che i valori di R_1, R_2, R_3 risultanti che devono essere perpendicolari alla superficie che di mano in mano rappresenta la (18) rimangono gli stessi, perchè rimangono la stessa funzione e me

non è così delle azioni reci-
proche delle forze applica-
te ai diversi punti del si-
stema. Se sappiasi che nel
sistema non può aversi
comunicazione diretta de-
gli le punti di lui che
fra le 3k-6 mutue di-
stanze, dovrassi conchiu-
dere che le forze applica-
te in siffatti punti agisco-
no realmente le une
sulle altre nelle direzioni
m, n, p ... e proporzio-
nalmente alle deriva-
te di esse.



Della stessa guisa che
la L può essere funzioni
di tali funzioni delle
distanze, quindi la comu-
nicazione fra le forze
applicate ai punti del
sistema può aver luogo
fra alcune o altre senza
che il legame generale
sia variato. Se si ignori
per quali distanze si
comunichino le forze
non si potrà dalla sola
L determinare quali siano
le vere relazioni delle for-
ze applicate ai punti del si-
stema quando non si sap-
pia se i legami che danno
luogo alle forze dirette

(271.)

non siano conosciute.

Dunque la funzione sopra detta qualunque forma sia data caratterizza il sistema, e basta per far conoscere le forze R_1, R_2, R_3 le quali applicare si debbono ai varj punti del sistema per avere l'equilibrio, ma non basta per mostrare come esse esercitano la loro azione. All'uopo conviene conoscere la costruzione del sistema per conoscere le direzioni con cui le forze agiscono.

Se succeda che precisamente si faccia per quelle stesse distanze mutue che sono nella sopra contenute, si prenderanno le derivate della sopra relative alle distanze medesime, e si avranno le vere azioni reciproche delle forze applicate ai diversi punti del sistema stesso. Se poi la comunicazione si opera solamente lungo certe mutue distanze, e che la sopra contenga ancora le mutue distanze fra le quali non si opera la comunicazione . . . . Vedi sotto

relativamente ai poligoni considerati nello spazio) eliminare si possono dalla funzione le distanze lungo le quali non e' ha eliminazione di forze e le derivate della U prese relativamente alle distanze rimaste saranno proporzionali alle azioni reciproche delle forze che hanno realmente luogo. Si hanno poi delle distanze che sono date conoscendo la situazione dei punti a cui si vogliono applicare delle forze, per cui restano in equilibrio. E perciò queste si hanno per costanti nel determinare le azioni delle forze per l'equilibrio. Dunque

Lezione 53.

§. 205. Supponiamo ora che i punti del sistema sieno tra se dipendenti di guisa che le loro mutue distanze debbano soddisfare alle equazioni

(18) $f(m, n, p, q, r \dots s) = U = C$; inoltre

(25) $f_1(m, n, p, q, r \dots s) = U_1 = C_1$

(26) $f_2(m, n, p, q, r \dots s) = U_2 = C_2$

---

dimodocchè il sistema possa prendere solo quelle figure

compatibili colla simultanea esistenza di queste sole.

Perciò sole che i punti del sistema sono legati fra loro per la (18) si possono applicare ai punti (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) — le forze

$$\sqrt{\left(\frac{U'}{x_1'}\right)^2+\left(\frac{U'}{y_1'}\right)^2+\left(\frac{U'}{z_1'}\right)^2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{U'}{x_2'}\right)^2+\left(\frac{U'}{y_2'}\right)^2+\left(\frac{U'}{z_2'}\right)^2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{U'}{x_3'}\right)^2+\left(\frac{U'}{y_3'}\right)^2+\left(\frac{U'}{z_3'}\right)^2},$$

— — — — — — —

ciascuna delle quali sia normale alla superficie presentata dalla (18).

Se λ rappresenta un coeff.e indeterminato, e per lui si moltiplichi ciascuna delle trovate forze ~~[illegible]~~, le risultanti

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{U'}{x_1'}\right)^2+\left(\frac{U'}{y_1'}\right)^2+\left(\frac{U'}{z_1'}\right)^2},$$

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{U'}{x_2'}\right)^2+\left(\frac{U'}{y_2'}\right)^2+\left(\frac{U'}{z_2'}\right)^2},$$

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{U'}{x_3'}\right)^2+\left(\frac{U'}{y_3'}\right)^2+\left(\frac{U'}{z_3'}\right)^2},$$

surrogate alle prime e nelle stesse direzioni, si faranno egualmente equilibrio.

Se però poi i punti legati dalla (25) si possono applicare ai punti

del sistema le forze

$$\lambda_1\sqrt{\left(\frac{U_1'}{x_1'}\right)^2+\left(\frac{U_1'}{y_1'}\right)^2+\left(\frac{U_1'}{z_1'}\right)^2},$$

$$\lambda_1\sqrt{\left(\frac{U_1'}{x_2'}\right)^2+\left(\frac{U_1'}{y_2'}\right)^2+\left(\frac{U_1'}{z_2'}\right)^2}$$

$$\lambda_1\sqrt{\left(\frac{U_1'}{x_3'}\right)^2+\left(\frac{U_1'}{y_3'}\right)^2+\left(\frac{U_1'}{z_3'}\right)^2}$$

---

essendo λ_1 un coeff.e indeterminato e ciascuna di queste forze essendo normale alla superficie presentata dalla (26) allorchè in esse si considerano sole come variabili le coord. del punto d'applicaz. della forza. Della stessa guisa posto λ_2 un nuovo coeff. indeterminato, si avrà

$$\lambda_2\sqrt{\left(\frac{U_2'}{x_1'}\right)^2+\left(\frac{U_2'}{y_1'}\right)^2+\left(\frac{U_2'}{z_1'}\right)^2},$$

$$\lambda_2\sqrt{\left(\frac{U_2'}{x_2'}\right)^2+\left(\frac{U_2'}{y_2'}\right)^2+\left(\frac{U_2'}{z_2'}\right)^2},$$

$$\lambda_3\sqrt{\left(\frac{U_2'}{x_3'}\right)^2+\left(\frac{U_2'}{y_3'}\right)^2+\left(\frac{U_2'}{z_3'}\right)^2},$$

---

le quali forze saranno dirette secondo le normali le rispettive superficie presentate dalla (26) allorchè in essa si considerano variabili le coord.e

Così si dovrebbe ragionare
per altre equazioni se vi
fossero; è chiaro poi che vi
avrà equilibrio per l'unione
di ~~tutte~~ queste forze poichè
vi ha equilibrio in partico-
lare fra quelle che appar-
tengono alle (18) (25) (26)

(2761. 7.)

§. 206. Allorchè i punti del siste-
ma sono legati da una sola
equazione, la (18) ad es.
il caso d'equilibrio è uni-
co in questa supposizione
vale a dire che non si ha
che una figura nella qua-
le si hanno le forze
determinate che si equi-
librano. Ma quando suppo-
sono due, la (18) e (25)
ad es. inallora si hanno
infinità di sistemi di forze
per una stessa figura allor-
chè le forze sono appli-
cate al sistema.

Infatti a cagione della
indeterm.e λ, λ, si posso-
no ottenere varj sistemi
di forze diverse si inten-
sione e direzione. Pren-
diamo a considerare
quelle applicate al pun-
to (x, y, z,). Quella
forza che è moltipl.
per λ per l'equilibrio
esser deve perpend. alla
superficie della (18) quan-
do si fa variare (x, y,
z,), la forza moltipli-
cata per λ, per la
stessa ragione deve es-

ser perpendicolare alla su
perficie della (25). La ri
tante di queste forze s
deve nel piano delle com
ponenti; dunque questa
risultante esser deve pe
di un piano normale
alle 2 superficie. Dunque
questa risultante esser
deve in un piano norma
le all'intersecazione
delle due superficie. —
Dunque quando si han
no 2 equazioni le dire
zioni delle forze pos
sono variare in direzione
ed in intensione colla
condizione accennata.
Si vede che se prende
te 3 e più equazioni la
determinazione del proble
ma è sempre maggiore
S. 207. Nel momento dell'equi
librio del sistema ciascuna
equazione di condizione
può reputarsi come una
forza, poichè se si toglie
è rotto l'equilibrio. —
Dunque è manifesto
che esistere debbono delle
forze idonee a rompere
l'equilibrio, e che terebbe
luogo delle equazioni di con

Se dunque figuriamo che tutte le equazioni di cond. salvo la (18) sieno surrogate da forze convenienti, i punti non essendo più legati che dalla (18), è necessario che le forze attuali che sollecitano il sistema si riducano alle

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dL'}{dx_1'}\right)^2+\left(\frac{dL'}{dy_1'}\right)^2+\left(\frac{dL'}{dz_1'}\right)^2}$$

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dL'}{dx_2'}\right)^2+\left(\frac{dL'}{dy_2'}\right)^2+\left(\frac{dL'}{dz_2'}\right)^2}$$

Laonde conchiudere si deve che la (18) nell'equilibrio del sistema non può tenere la vece di quelle forze ch'ella terrebbe se fosse sola, di guisa che le forze che si possono far equilibrio applicate ad punti determinati da equazioni, altro non sono che le risultanti di quelle che si farebbero equilibrio in virtù delle equazioni di cond.

§. 208. La legge dell'equilibrio ha luogo egualmente se i punti del sistema sieno fra loro legati da equazioni fra le coord. dei punti riferiti a tre assi coord.

(279.0

Riprendiamo il figurato sistema di punti, e scegliamone tre di essi ad arbitrio. Da ciascuno degli altri punti immaginiamo condotte delle rette ai tre punti scelti e poniamo che nelle (18)(25)(26) non sieno contenute che le mutue distanze fra gli altri punti ~~e i punti della p~~ vertici della piramide.

Supponiamo che i tre punti presi ad arbitrio diventino fissi nello spazio, le condiz. per l'equilibrio saranno le stesse colla differenza che essi soffriranno delle pressioni eguali e contrarie alle forze che li terrebbero in equilibrio se fossero mobili. Facciamo per un momento astrazione di questi 3 punti o se esistano ad una distanza infinita: in questo caso, le mutue distanze di ciascun punto dai tre scelti si possono considerare parallele, ed allora le mutue distanze sono le coordinate dei diversi punti del sistema salvo 3. Onde le equazioni fra le mutue distanze dei punti e gli altri 3 diventano equazi

280.9

ni fra le coord.e degli altri punti e la legge per l'equilibrio debbe sussistere tutta via perchè è indipend.e dalle distanze mutue dei punti dai 3 scelti. —

E' poi vero che le forze che mantengono l'equilibrio non si facciano equilibrio fra loro sole come nel sistema libero ed ancorchè cioè che si scompongono in forze eguali 2 a 2 nelle mutue distanze del sistema, cioè può darsi che non abbia luogo lungo le mutue distanze di punti. A concepire come in qto caso si abbia equilibrio, sarà mestieri che siano restituiti i 3 punti coi quali gli altri hanno un legame e che sono dati per le coord.e dei punti a vece delle mutue distanze. Dunque questi punti intermezzi i punti del sistema agiscono gli uni sugli altri come se i punti fossero al tutto liberi, e però la legge sussiste.

§. 209. Ecco ciò che precisamente ha luogo allorchè si considera un sistema di punti legati

fra se con equazioni delle loro coordinate. ———

Nelle equazioni non si distinguono che i punti de' quali le coord.e sono in esse contenute, e spiegar non si può l'equilibrio per questi soli punti. Dette equazioni però fra le coord.e introducono tacitamente dei punti fissi ai quali i punti del sistema sono congiunti, e spesso accade che per essi vi abbia la communicazione delle forze. ———

Immaginati adunque tre punti fissi nello spazio a cui delle coord.e sieno sostituite le distanze dei 3 punti fissi, ~~alle coord.~~ e si aggiungano i tre punti al sistema, allora le legge delle derivate proporzionali alle minime distanze, avrà luogo, e si vedrà che sussiste indipend.e dalla lung.a delle distanze e diventando infinite esse diventano le coord.

Dunque resta dimostrato che le condizioni dell' equilibrio di un sistema

(282.)

libero fra che le derivate delle coord. dell'equazione di cond. prese rispetto alle coord. siano proporzionali alle forze ~~applicate ai punti~~

§. 210. Dal dettato risulta, che qualunque siano le equazioni che sussistono fra le coord. dei diversi punti del sistema ciaschheduna di tali equazioni per l'equilibrio esige che siano applicate nelle direzioni delle coord. delle forze proporzionali alle prime derivate delle equazioni relative alle coord.

Presentiamo queste equazione fra le coord. dei punti per la

(27) $F(x, y, z, x_1, y_1, z_1 \ldots t)$

$= V = 0$

(28) $F_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1, t)$

$= V_1 = 0$; le equazioni fra le coord. che come si è veduto impediscono la libertà del sistema e perciò tengono la vece di forze. Presentate per λ, λ_1 delle costanti arbitrarie, e per X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 — le forze totali del sistema nelle direzioni dei 3 assi coord.

si avranno le infrascritte equazioni

$$
(A)\begin{cases}
(29)\quad X_1 = \lambda\left(\frac{V'}{x_1'}\right)^{\mp} + \lambda_1\left(\frac{V_1'}{x_1'}\right)^{\mp} + \zeta \\
(30)\quad Y_1 = \lambda\left(\frac{V'}{y_1'}\right)^{\mp} + \lambda_1\left(\frac{V_1'}{y_1'}\right)^{\mp} + \zeta \\
(31)\quad Z_1 = \lambda\left(\frac{V'}{z_1'}\right)^{\mp} + \lambda_1\left(\frac{V_1'}{z_1'}\right)^{\mp} + \zeta \\
(32)\quad X_2 = \lambda\left(\frac{V'}{x_2'}\right) + \lambda_1\left(\frac{V_1'}{x_2'}\right) \\
(33)\quad Y_2 = \lambda\left(\frac{V'}{y_2'}\right) + \lambda_1\left(\frac{V_1'}{y_2'}\right) \\
(34)\quad Z_2 = \lambda\left(\frac{V'}{z_2'}\right) + \lambda_1\left(\frac{V_1'}{z_2'}\right)
\end{cases}
$$

Lezione 54

§. 211. Eliminando per mezzo delle equazioni A le indeterminate λ, λ_1 le risultanti equazioni presenteranno le condizioni d'equilibrio vale a dire la relazione fra le forze.

Osservo che le (A) sono tante quante sono le coordinate dei punti del sistema e le $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ ec. sono tante quante sono le equazioni che debbono aver luogo per l'equilibrio cioè alle quali debbesi soddisfare.

Il numero adunque delle equazioni per l'equilibrio sarà tante ~~meno~~ quanto il numero delle coord.e meno il N.o delle equaz.i di cond.e date

§. 212. Sia h il numero di punti del sistema ed m il N.o di equazioni di cond.e che contengano le coord.e dei punti del sistema e le equazioni necessarie all'equilibrio saranno 3h − m, per mezzo delle quali scioglieremo si sciolgono tutte le questioni relative all'equilibrio di un sistema

(284.)

siano date le X, Y, Z, X₁, Y₁, Z₁ {componenti secondo le tre assi coord.ᵉ e si domandi la figura che prenderà il sistema nel punto dell'equilibrio. Le A serviranno a determinare le coord.ᵉ e però avremo la figura del sistema, e però il problema è determinato in q.ᵗᵒ caso. Se poi fossero date tutte le coord.ᵉ del sistema, e si domandassero le forze per cui il sistema nell'equilibrio avesse la data figura, allora col mezzo delle (A) si dovrebbero eliminare le X, Y, Z, e q.ᵗᵉ queste forze non sono contenute nelle equazioni che legano fra loro le coord.ᵉ del sistema, ma solamente entrano nelle (A) che sono tante di numero quanti sono i punti del sistema; ma le (A) contengono ancora le λ che sono tante di n.ʳᵒ quante sono le equazioni di cond.ᵉ Le quantità da determinarsi sono 3n, si hanno 3n - m equazioni per eliminare le 3n incognite, e però il problema è indeterminato, e però concludere

(285.)

si debbe che per una stessa figura del sistema si ha un'infinità di forze che mantengono l'equilibrio.

S.213. Allorchè un sistema di punti è in equilibrio, ciascun punto esser debbe in equilibrio da se, in virtù delle forze immediatamente a lui applicate, e delle resistenze che gli si oppongono cogli altri punti ai quali si trova legato. Della stessa guisa, quando il sistema è in moto, ciascheduno de' suoi punti si dee muovere come se fosse libero supponendo che egli ubbidisca nello stesso tempo alle forze da cui è sollecitato, ed alle resistenze che presentano gli altri punti ai quali è legato. Se dunque si sapessimo valutare queste mutue resistenze, non si hanno che a combinare con le forze date dalla natura della quistioni, e porre le equazioni dell'equilibrio e del moto come se fosse del tutto libero. Si ha d'onde sciogliere qualunque quistione.

Tutta la scienza meccanica riducesi a saper valutare le diverse resistenze

(286.9)

che oppongono gli uni agli altri in virtù delle forze che suppongonsi date. —

§. 214. Supponendo che tali condi. consistano in ciò, che in tutte le figure per le quali passar debbano i punti del sistema, v'abbia delle coord. dei punti stessi le quali debbano sempre essere, o nulle o costanti, si è dimostrato che in virtù di ciascuna di cosifatte condi. i punti sono resi suscettivi di resistenze dirette second. le coord. dei punti stessi e pro. porzionali alle 1.e derivate. Dunque si ha un mezzo per determinare queste mutue resistenze che op. pongonsi ai punti, le quali andranno poi combi. nate con le forze imme. diatamente applicate, e dopo ciò trattare ciascun punto come se fosse libero. —

Così le (29) (30) e (31) risguardare si possono come le equazioni d'equilibrio del punto (x_1, y_1, z_1) di quel. le fosse libero, ma solle. citato dalle forze X_1, Y_1, Z_1, e dalle opposte

$$\lambda\left(\frac{L'}{x_1'}\right) + \lambda_1\left(\frac{L_1'}{x_1'}\right) + \text{ec}$$

$$\lambda\left(\frac{L'}{y_1'}\right) + \lambda_1\left(\frac{L_1'}{y_1'}\right) + \text{ec}$$

$d\left(\frac{U'}{z'_1}\right) + d_1\left(\frac{U'}{z'_1}\right)$ &c

§.215. Prima di terminare questo Capitolo sciogliamo un problema ——

Dati 3 punti, e l'intensione e direzione di una forza applicata ad uno di essi, la quale sia sul loro piano, si vogliono determinare le intensioni e direzioni delle forze applicate agli altri due punti in modo che il triangolo rimanga sempre lo stesso, cioè non cambino le loro mutue distanze. ——

Si osservi in primo luogo che le forze dovendosi fare equilibrio, dovranno essere sul med.º piano, e però si potrà scomporre la data forza in 2 parallele a 2 assi coord.i presi sul piano delle forze. —

Sieno (x, y) le coord.e relative a questi assi del punto al quale è applicata la data forza, e siano (x_2, y_2) (x_3, y_3) quelle degli altri 2 punti. Presentiamo per

$X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$

le componenti secondo gl'assi delle 3 forze. —

(288.9)

Dalla cond.e che le distanze dei 3 punti rimangano costanti, si hanno le infrascritte equazioni

(35) $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = c$,

(36) $(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 = c_1$,

(37) $(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = c_2$;

dalle (A) si hanno poi le seguenti

(38) $X_1 = 2\lambda(x_1 - x_2) + 2\lambda_1(x_1 - x_3)$

(39) $Y_1 = 2\lambda(y_1 - y_2) + 2\lambda_1(y_1 - y_3)$

(40) $X_2 = -2\lambda(x_1 - x_2) + 2\lambda_2(x_2 - x_3)$

(41) $Y_2 = -2\lambda(y_1 - y_2) + 2\lambda_2(y_2 - y_3)$

(42) $X_3 = -2\lambda_1(x_1 - x_3) - 2\lambda_2(x_2 - x_3)$

(43) $Y_3 = -2\lambda_1(y_1 - y_3) - 2\lambda_2(y_2 - y_3)$

mediante le quali si debbono eliminare le $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ e le equazioni che ne risultano saranno quelle dell'equilibrio. Sommando le (38), (40) e (42) si ha la

(44) $X_1 + X_2 + X_3 = 0$; sommando le (39) (41) e (43) si ha la

(45) $Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0$. Moltiplicate la (38) per y_1 e la (39) per x_1 e la (40) per y_2 e la (41) per x_2 e così le altre 2, le diff.e dei prodotti sono

$X_1 y_1 - Y_1 x_1 = 2\lambda(x_1 y_2 - x_2 y_1) + 2\lambda_1(x_1 y_3 - x_3 y_1)$,

$X_2 y_2 - Y_2 x_2 = -2\lambda(x_1 y_2 - x_2 y_1) + 2\lambda_2(x_2 y_3 - x_3 y_2)$,

$X_3 y_3 - Y_3 x_3 = -2\lambda_1(x_1 y_3 - x_3 y_1)$
$-2\lambda_2(x_2 y_3 - x_3 y_2)$ le quali sommate, si ha la

(46) $X_1 y_1 - Y_1 x_1 + X_2 y_2 - Y_2 x_2 + X_3 y_3 - Y_3 x_3 = 0$. Dalle (44) e (45) si derivano le

(47) $X_1 = -(X_2 + X_3)$

(48) $Y_1 = -(Y_2 + Y_3)$, le quali ci dicono che le somme delle componenti delle due forze circa[n]ti che sono dirette secondo gli assi delle x e y debbono essere eguali ed opposte alle componenti della data forza. Ma X_1, Y_1 sono note dunque si saranno pure le somme $X_2 + X_3$ $Y_2 + Y_3$. Osservo che le X_2, X_3 sono parallele; così le Y_2, Y_3 e son dati i punti d'applicazione di queste forze; però determinare si può ciascuna forza X_2 X_3, Y_3, Y_2 laonde potremo determinare la risultante delle X_2, Y_2, X_3 Y_3; le (44) e (45) ci dicono che non vi è moto lungo gli assi e la (46) che non vi è moto lungo l'origine.

290. 9

§. 215. Prendiamo un caso particolare del caso generale esposto, ed è: Determinare l'azione del peso di una porta sui due arpioni che la reggono essendo essi su la medesima verticale.
Consideriamo i due arpioni come due punti e sieno (x_2, y_2) (x_3, y_3) le loro coordinate, e sia l'asse delle y parallelo alla prefata verticale. —
La forza con cui agisce la porta, è la gravità che agisce nel suo centro di gravità e posto (x, y_1) le coordinate date di questa per la forza, essa agirà in direzione parallela all'asse delle y. La sua azione sarà opposta a quella che oppongono gli arpioni; nelle fatte ipotesi si avrà
$X_1 = 0$ $Y_1 = -p$, onde le equazioni (24) e (25) danno

(49) $X_2 = -X_3$

(50) $Y_2 + Y_3 = p$; le due forze eguali e contrarie X_2, X_3 mettono davanti una coppia di cui il braccio è la distanza degli arpioni e perciò si dovrà concludere che una è tratta infuori

da una forza orizzontale e l'altro è spinto in dentro da una orizzontale.

La (50) mostra che le pressioni si dirette equivalgono al peso della porta. Fatta sostit.ne nella (46) si ha

(51) $px_1 + X_2 y_2 - Y_2 x_2 - X_3 y_3 - px_3 + Y_3 x_3 = 0$

ma $x_2 = x_3$, dunque si avrà

(52) $px_1 + X_2 y_2 - X_2 y_3 - px_3 = 0$, d'onde

(53) $X_2 = -X_3 = p\frac{x_1 - x_2}{y_3 - y_2}$, valore degli sforzi orizzontali contro gli arpioni. —

Lezione 55.

Per determinare Y_2, Y_3 che sono le pressioni verticali sugli arpioni, immaginiamo dal centro di gravità della porta condotta una perpendicolare a quella che unisce gli arpioni. Supponiamo che le p, Y_2, Y_3 ~~...~~ ruotino finchè sieno perpendicolari alla retta degli arpioni, e sullo stesso piano. Sia a la distanza fra i due arpioni; sia b = alla distanza mp, $b' = m'k$; a determinare le Y_2, Y_3 dipendentem.te dalla teorica delle

forze parallele si ha
$Y_2 : Y_2 + Y_3 :: b : a$,
$Y_3 : Y_2 + Y_3 :: b' : a$, ossia
$Y_2 : p :: b : a$,
$Y_3 : p :: b' : a$, onde avremo
le equazioni

(54) $Y_2 = \frac{bp}{a}$

(55) $Y_3 = \frac{b'p}{a}$. Sommando queste
2 equazioni ne viene
$Y_2 + Y_3 = (b+b')\frac{p}{a} = p$

Osservo che $x_1 - x_2$ è la distanza del centro di gravità dall'asse che unisce gli arpioni $y_3 - y_2 = a$, onde posto $x_1 - x_2 = d$, la equazione (53) diventa

(56) $X_1 = -X_3 = \frac{pd}{a}$.

Vediamo ancora come col mezzo delle coppie si scioglie il problema.

La p applicata al centro di gravità della porta si trasporti al punto in cui la perpendic. condotta da essa incontra la linea che unisce gli arpioni. Con ciò si avrà una forza che agisce lungo la direzione della linea degli arpioni ed una coppia che ha per braccio la distanza $a_1 - x_2$; si può essa trasportare su di un piano

(293.)

in guiza che il suo braccio cada su quello dei cardini ed un suo estremo su di un'arpione. Se in luogo del braccio $x_1 - x_2$ si prenda una coppia che abbia per braccio $y_3 - y_2 = a$, a vece di p si dovrebbe sostituire

$y_3 - y_2 : x_1 - x_2 :: p : u$

e rappresenterà lo sforzo contro gli arpioni, e si avrà $u = X_2 = -X_3 = p\,\frac{x_1 - x_2}{y_3 - y_2} = \frac{p\,d}{a}$. —

Le verticali si determinano nella stessa maniera

Se il centro di gravità s'innalzi diminuirà la pressione sul superiore e ~~di~~ crescerà sull'inferiore e viceversa. —

Se il centro di gravità è nel mezzo della porta in altezza i due cardini soffriranno la medesima pressione. —

Vacanze di Carnovale

Capitolo XVII.°

Delle velocità virtuali

§. 217. Supponiamo un punto (x_1, y_1, z_1) di un sistema; (x_2, y_2, z_2) un'altro punto, così (x_3, y_3, z_3) — &c ai quali punti sieno rispettivamente applicate le forze $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3$, — &c parallele a tre assi ortogonali e tengano esse in equilibrio il sistema. Supponiamo che fra le coord.e dei punti del sistema, esista la relazione data dalle

(1.) $\varphi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 — — \&c) = 0.$ —

(2.) $\varphi_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 — \&c) = 0$

~~(3)~~ $\varphi_2(\text{—— ——}) = 0$ — &c

Il cambiamento di figura che può aver luogo debbe esser tale che le coord.e dei punti soddisfino sempre alle poste equazioni.

Dunque se supporremo un cambiamento cioè che x_1 di venti $x_1 + h_1$, y_1, $y_1 + k_1$, z_1, $z_1 + l_1$ si avrà pei nuovi punti del sistema le coordinate

295.

$(x_1+h_1, y_1+k_1, z_1+l_1)$
$(x_2+h_2, y_2+k_2, z_2+l_2)$
$(x_3+h_3+y_3+k_3+z_3\,l_3)$

saranno le coord. dei nuovi punti del sistema. Messo a voce di x_1, y_1, z_1 questi valori nella (1) e (2) esse debbono verificarsi, e perciò si avrà

(3) $\varphi(x_1+h_1, y_1+k_1, z_1+l_1, x_2+h_2, y_2+k_2, z_2+l_2, x_3+h_3, y_3+k_3, z_3+l_3, t_1) = 0.$

(4) $\varphi_1(x_1+h_1, y_1+k_1, z_1+l_1, x_2+h_2, y_2+k_2, z_2+l_2, x_3+h_3, y_3+k_3, z_3+l_3) = 0$

Sviluppando pel Teorema del Taylor applicato a più variabili, avremo le equazioni

(5) $\varphi(x_1+h_1, y_1+k_1, z_1+l_1, x_2+h_2, y_2+k_2, z_2+l_2 - - -) =$
$\varphi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$
$+\varphi'(x_1)h_1+\varphi'(y_1)k_1+\varphi'(z_1)l_1$
$+\varphi'(x_2)h_2+\varphi'(y_2)k_2+\varphi'(z_2)l_2$
$+\varphi'(x_3)h_3+\varphi'(y_3)k_3+\varphi'(z_3)l_3$
$+ - - - - - - - - \mathcal{E} = 0$

(6) $\varphi_1(x_1+h_1, y_1+k_1, z_1+l_1, x_2+h_2, y_2+k_2, z_2+l_2, \ldots)$
$= \varphi_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3) + \varphi_1'(x_1)h_1 + \varphi_1'(y_1)k_1 + \varphi_1'(z_1)l_1 + \varphi_1'(x_2)h_2 + \varphi_1'(y_2)k_2 + \varphi_1'(z_2)l_2 + \&c$
$=0$, che debbono essere verificate; ma è $=0$ il 1.º termine, dunque dovrà essere eguale a zero la somma degli altri termini. Ora per gli aumenti delle variabili che sono affatto arbitrarii, questi si possono porre indeterminatamente piccoli e supporre che la somma dei termini che contengono gli aumenti alla 1.ª potenza superi la somma dei termini che conseguitano, e però dovendosi verificare si avranno le

(7) $\varphi'(x_1)h_1 + \varphi'(y_1)k_1 + \varphi'(z_1)l_1 + \varphi'(x_2)h_2 + \varphi'(y_2)k_2 + \varphi'(z_2)l_2 + \ldots \&c = 0,$

(8) $\varphi_1'(x_1)h_1 + \varphi_1'(y_1)k_1 + \varphi_1'(z_1)l_1 + \varphi_1'(x_2)h_2 + \varphi_1'(y_2)k_2 + \varphi_1'(z_2)l_2 \ldots \&c = 0$

moltiplicando le (7) (8) &c per delle costanti arbitrarie $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \&c$ la somma dei prodotti verrà presentata dalla

(9) $(\lambda\varphi'(x_1) + \lambda_1\varphi_1'(x_1) + \ldots \&c)h_1 + (\lambda\varphi'(y_1) + \lambda_1\varphi'(y_1) + \ldots \&c)k_1 + (\lambda\varphi'(z_1) + \lambda_1\varphi_1'(z_1) + \ldots \&c)l_1 + \ldots \&c = 0.$

Ma il sistema per ipotesi è in equilibrio, dunque pel dimostrato al §. 209. avremo

$$\lambda\varphi'(x_1) + \lambda_1\varphi_1'(x_1) + \cdots = X_1$$
$$\lambda\varphi'(y_1) + \lambda_1\varphi_1'(y_1) + \cdots = Y_1$$
$$\lambda\varphi'(z_1) + \lambda_1\varphi_1'(z_1) + \cdots = Z_1$$
$$\lambda\varphi'(x_n) + \lambda_1\varphi_1'(x_n) + \cdots = X_n$$
$$\lambda\varphi'(y_n) + \lambda_1\varphi_1'(y_n) + \cdots = Y_n$$
$$\lambda\varphi'(z_n) + \lambda_1\varphi_1'(z_n) + \cdots = Z_n$$

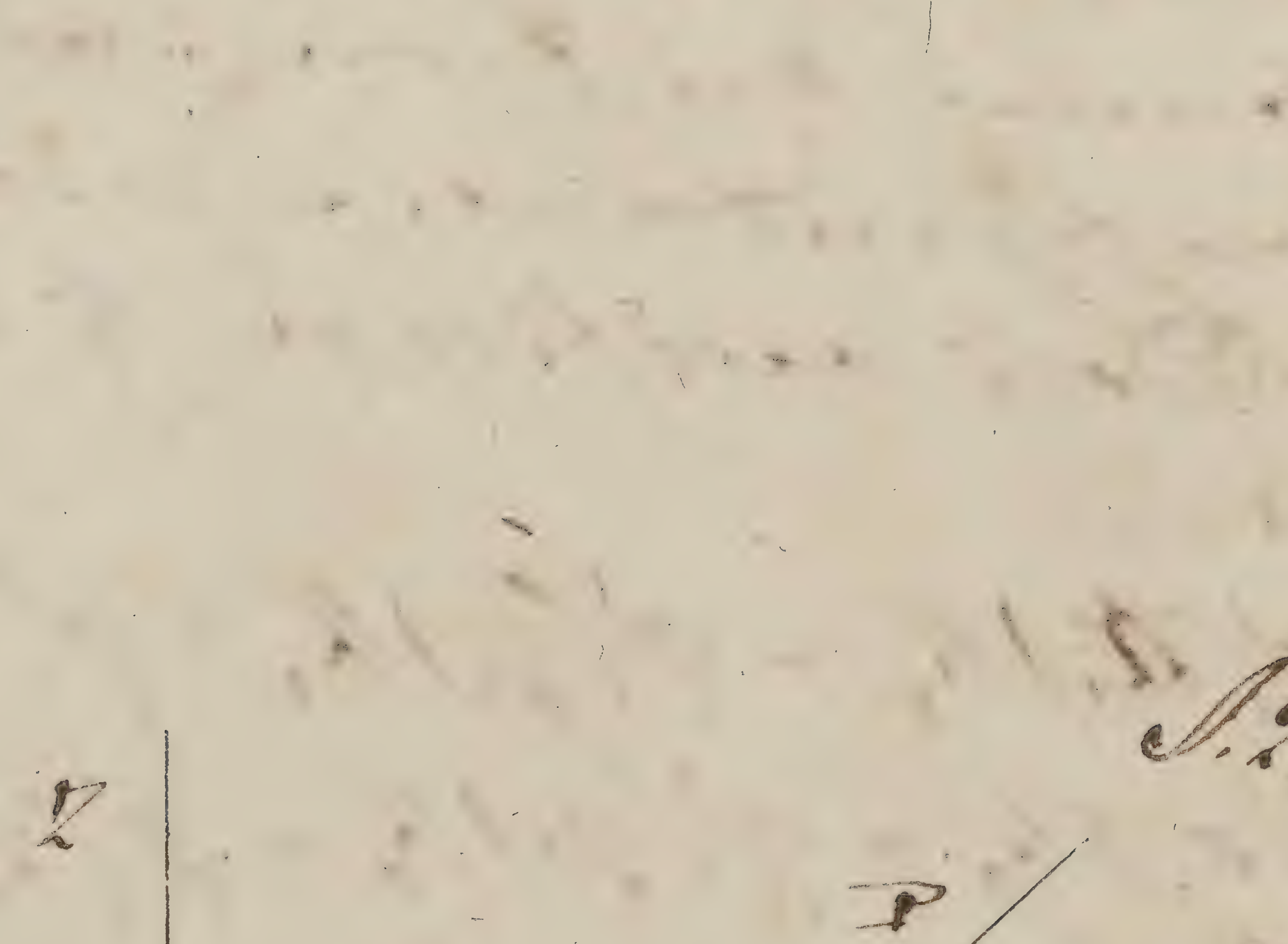
---

avremo dunque la

(10) $X_1 h_1 + Y_1 k_1 + Z_1 l_1 + X_n h_n + Y_n k_n + Z_n l_n + \cdots = 0.$

la quale può tener la vece delle (7) e (8) purchè si soddisfaccia indipendentemente dalle costanti arbitrarie $\lambda, \lambda_1, \cdots$

§. 218. Prendiamo in considerazione uno dei punti del sistema per es. il punto M (fig. 52) e sia il punto (x_1, y_1, z_1). Supponiamo che passi in M' quando le coord. di esso diventano $x_1 + h_1$, $y_1 + k_1$, $z_1 + l_1$: siano MX, MY, MZ le direzioni delle forze X_1, Y_1, Z_1 dirette secondo gli assi ortogonali. Sopra MX, MY, MZ da M' si conducano le perpendicolari $M'Q$, $M'Q'$, $M'Q''$ ed avremo



(Fig. 52)

$MQ = h_1$, $MQ'' = k_1$, $MQ' = l_1$. Supponiamo che MP sia la direzione della risultante delle forze X_1, Y_1, Z_1 applicate in M e si dispiegato si protragga da M' la perpendicolare $M'Q'''$, e posto per semplicità $MM' = D$ avremo pel dimostrato la

(11) $P \theta \widehat{P D} = X_1 \theta \widehat{X_1 D} + Y_1 \theta \widehat{Y_1 D} + Z_1 \theta \widehat{Z_1 D}$: ma i triangoli $M'Q'M$, $M'QM$, $M'Q''M$, $M'Q'''M$ danno

$MQ' = l_1 = D\theta \widehat{Z_1 D}$,

$MQ = h_1 = D\theta \widehat{X_1 D}$,

$MQ'' = k_1 = D\theta \widehat{Y_1 D}$,

$MQ''' = D\theta \widehat{P D}$, dunque avremo

$\theta \widehat{Z_1 D} = \frac{l_1}{D}$,

$\theta X_1 D = \frac{h_1}{D}$,

$\theta Y_1 D = \frac{k_1}{D}$, e posto $MQ''' = p$, si avrà

$\theta \widehat{P D} = \frac{p}{D}$, pei quali valori il 2.do membro dell'(11) si muta nel

$$p\frac{P}{D} = \frac{X_1 . h_1}{D} + Y_1 \frac{k_1}{D} + Z_1 \frac{l_1}{D},$$ ovvero togliendo il denominatore nella

(12) $Pp = X_1 h_1 + Y_1 k_1 + Z_1 l_1$; osservo che $p = MQ'''$ è la projezione sulla direzione della risultante delle forze applicate in M della retta che unisce i punti M, M'. Se dicansi p_1, p_2, p_3

le projezioni sulle direzioni delle risultanti P_1 P_2 &c. delle altre rette, che uniscono i punti &c., che saranno positive se sulle direzioni delle forze e negative se sui prolungamenti, e però avremo ancora

(13) $P_1 p_1 = X_2 a_2 + Y_2 b_2 + Z_2 c_2$

(14) $P_2 p_2 = X_3 a_3 + Y_3 b_3 + Z_3 c_3$

———— ———— ————, dunque per la (10) se sommeremo queste equazioni la somma dei secondi membri sarà zero, e però si avrà

(15) $Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \text{\&c.} = 0$

essendo p, p_1, p_2 &c. rette indeterminatamente piccole.

Le rette come MM' che uniscono i punti del sistema agli altri dopo un piccolo movimento, diconsi <u>velocità virtuali</u>. —

Le p, p_1, p_2 — &c. presentano le projezioni delle velocità virtuali sulle risultanti P, P_1, P_2 — &c.

Dietro ciò resta dimostrato il teorema delle velocità virtuali: cioè se le forze P, P_1, P_2 — &c. applicate ad un sistema di punti, in equilibrio la somma di esse moltiplicata rispettivamente per le

come M, M'

projezioni delle velocità virtuali fra di esse, è nulla. Considerate le P, P_1, P_n &c positive, le p, p_1, p_n &c saranno positive se sieno projettate sulle direzioni di queste forze e negative se sul loro prolungamento.

Se i punti del sistema sieno al tutto liberi e indipendenti fra di loro ogni punto dev'essere in equilibrio da se, cioè che sia $P = 0$, $P_1 = 0$, $P_n = 0$ &c così le componenti X, Y, Z, &c dovranno ciascuna $= 0$.

§. 219. Se più forze Q, Q_1, Q_n &c sieno applicate al medesimo punto M del sistema, delle quali sia P la risultante, e che il punto M per gli aumenti indeterminatamente piccoli delle coordinate passi in M', abbassate le solite perpendicoli si avranno le projezioni rispettive q, q_1, q_n e si avrà

(16) $P \cos \widehat{PD} = Q \cos \widehat{QD} + Q_1 \cos \widehat{Q_1 D} + Q_n \cos \widehat{Q_n D}$ + &c e di più $p = D \cos \widehat{PD}$, $q = D \cos \widehat{QD}$, $q_1 = D \cos \widehat{Q_1 D}$, $q_n = D \cos \widehat{Q_n D}$ &c

e però

$\theta P^2 D = \frac{E}{D}$,

$\theta Q^2 D = \frac{\mathcal{E}}{D}$,

$\theta Q_{\prime}^2 D = \frac{\mathcal{E}_{\prime}}{D}$,

$\theta Q_{\prime\prime}^2 D = \frac{\mathcal{E}_{\prime\prime}}{D}$,

---------, onde dalla equazione (16) ne deriva la

(17) $Pp = Q\mathcal{E} + Q_{\prime}\mathcal{E}_{\prime} + Q_{\prime\prime}\mathcal{E}_{\prime\prime} + \ldots$

ma perchè le $Q, Q_{\prime}, Q_{\prime\prime}$ &c. sieno in equilibrio intorno al punto M che si suppone affatto libero, è necessario che la risultante sia zero ciò $P_{\prime} = 0$, dunque si ha

(18) $Q\mathcal{E} + Q_{\prime}\mathcal{E}_{\prime} + Q_{\prime\prime}\mathcal{E}_{\prime\prime} + \ldots = 0$

ove non è quivi necessario che $\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\prime}, \mathcal{E}_{\prime\prime}$ — &c. siano piccoli, ma possono essere finiti.

§. 220. Per dimostrare il teorema inverso, cioè che se ha luogo la (15) per tutti i movimenti che si possono comunicare al sistema le $P, P_{\prime}, P_{\prime\prime}$ — &c. sono in equilibrio, proviamo che rompasi l'equilibrio, e tutti od alcuni punti del sistema si pongano in movimento descrivendo

dei spazietti indeterminatamente piccoli: però si potrà impedire questo movimento applicando ad esse delle forze idonee dirette secondo i prolungamenti delle prefate rette ma in senso opposto del movimento.

Siano R, R_1, R_2 --- &c così fatte forze, ed allora l'equilibrio avrà luogo computate queste forze e le P, P_1, P_2 --- &c: Presentando per v, v_1, v_2 &c delle quantità analoghe alle p, p_1, p_2 -- &c fra queste forze dovrà aver luogo il principio delle velocità virtuali; e però si avrà

(19) $$Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + \text{--- \&c} + Rv + R_1v_1 + R_2v_2 + \text{\&c} = 0;$$

ma per ipotesi sussiste la (15) dunque si avrà

(20) $$Rv + R_1v_1 + R_2v_2 + \text{\&c} = 0.$$

che debbe aver luogo per tutti i movimenti indeterminatamente piccoli del sistema e però potremo considerare gli spazi come le rette MM' che sono contate sulle R, R_1, R_2 -- &c e sono tutte negative

dunque la (20) ha tutti i termini negativi, e però verificarsi non si può se non sia

$R\,r = 0$

$R_1\,r_1 = 0$

$R_2\,r_2 = 0$

— — —; la 1.ª si verifica per essere $R = 0$, o $r = 0$; ma se $R = 0$ non può moversi il punto, e così per $r = 0$; lo stesso si dica per l'altre. Dunque non vi sarà movimento e però le P, P_1, P_2 &c tengono in equilibrio il sistema.

Lezione 56.

§. 221. Una conseguenza immediata delle velocità virtuali si è che il centro di gravità di un sistema di corpi pesanti legati comunque fra loro è alla massima o minima altezza allorchè il sistema è in equilibrio. Siano P, P_1, P_2 — &c questi corpi: dai centri di gravità si facciano cadere su di un piano arbitrariamente posto, delle perpendicolari e sia esso orizzontale, e queste saranno le direzioni delle forze: facendo fare al sistema

un movimento indefinit. piccolo queste perpendicolari varieranno: in questo caso le velocità virtuali si confondono colle loro projezioni. Presentandole per p, p_1, p_2 — ec. si avrà

$$Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + \text{---} ec.$$

e mettendo a vece di p, p_1, p_2 — ec. dz, dz_1, ec. si avrà

$$Pdz + P_1dz_1 + P_2dz_2 + ec.:$$

ma per le velocità virtuali esser debbe la

(21) $$Pdz + P_1dz_1 + P_2dz_2 + ec. = 0$$

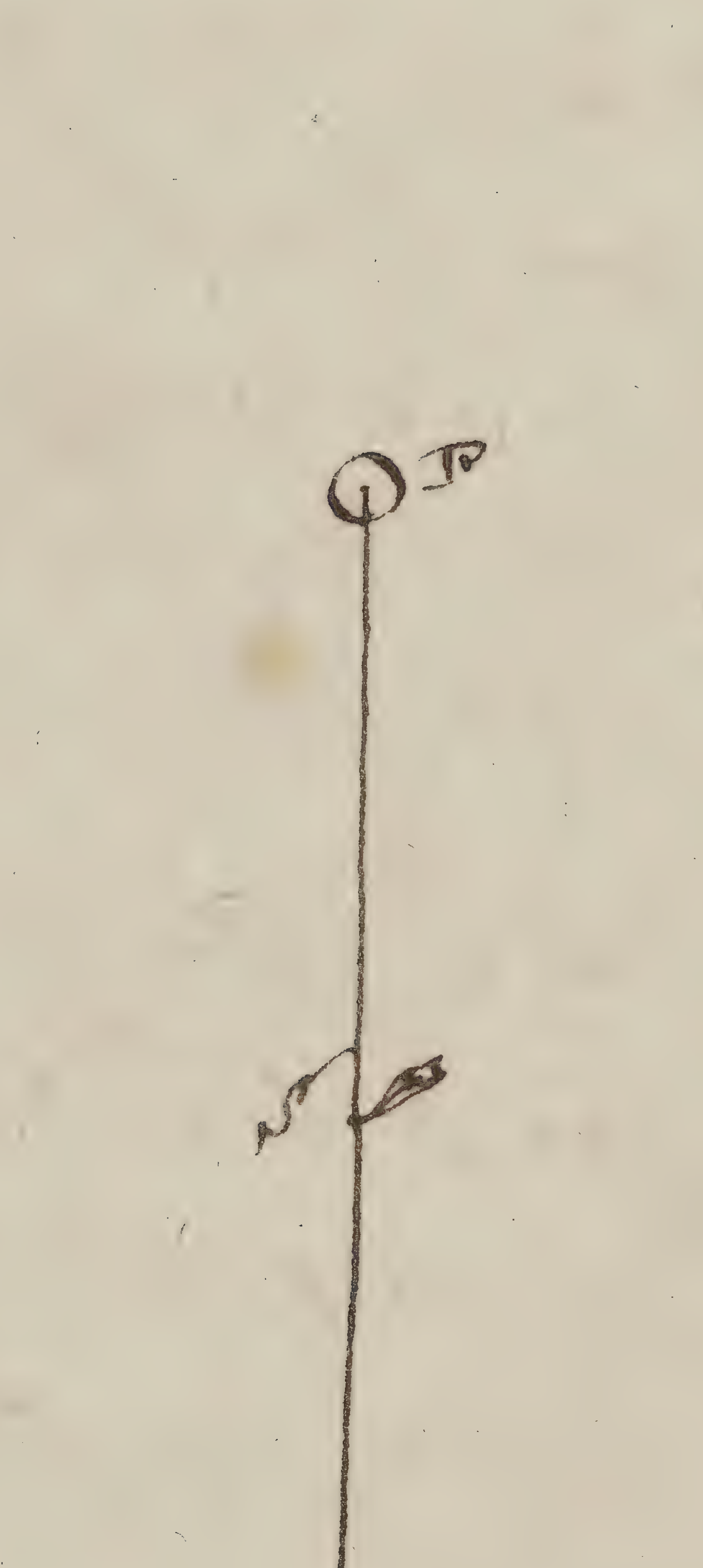
dunque il differenziale 1.° di questa funzione è zero, e però in generale essa è massima o minima. Poniamo $P + P_1 + P_2 + ec. = R$, e segnando per z_1 la perpendicolare abbassata dal centro di gravità sull' immaginato piano, avremo la

(22) $$Pz + P_1z_1 + P_2z_2 + ec. = Rz_1$$

ma il 1.° membro è Mass.° o minimo, e dunque Mass.° o minimo sarà Rz_1; ma R è quantità costante e però z_1 dev' essere massima o minima; ma z_1 esprime la distanza del centro di gravità di un sistema da un piano, orizzontale; dunque in

generali tale altezza deve
essere massima o minima.

§. 222. Quantunque sia vero il di-
re che un sistema di cor-
pi pesanti rimane in equi-
li quando il centro di gravi-
tà di lui è alla massima
o minima altezza, ciò nul-
la di meno l'equilibrio dif-
ferisce. Nel caso della mas-
sima altezza l'equilibrio
dicesi istantaneo, nel caso
della minima stabile. –
La ragione consiste in
ciò che quando il centro di
gravità è alla massima
distanza, il centro si allon-
tana dal primo punto.
Al contrario quando è
minima il centro di
gravità tende a tornare
nel pristino stato facendo
delle oscillazioni intorno
al punto d'equilibrio.
A mettere davanti la
differenza di questi due
equilibrii immaginiamo
un corpo attaccato ad una
verga rigida fissa in
un punto intorno a
cui possa liberamente
girare. Se poniamo il
corpo sopra al punto fis-
so mettendolo nella ver-



(306.)

ticale si avrà il massimo, e quando è sotto si ha il minimo.

Così ancora un'elissoide d'acciajo.

§. 223. Prendendo il differenziale della (22) considerando che P, P,, P,, ... e R sono costanti si avrà e dividendo per R

(23) $d,z = \frac{P\,dz + P,dz, + P,,dz,,}{R}$

supposto il sistema in equilibrio il numeratore è zero, e però $d,z = 0$, ed integrando $,z = C$.

È dunque aperto che se ad un sistema di pesi in equilibrio diasi un moto indeterminatamente piccolo, il centro non si abbassa nè s'alza. Per converso se un sistema sia talmente posto che per un piccolo movimento il centro di gravità non s'alzi nè s'abbassi, il sistema è in equilibrio.

§. 224. Si è veduto che il teorema delle velocità virtuali è una condizione d'equilibrio; ma si è trovato che per i sistemi invariabili si sono trovate 6 equazioni per l'equilibrio, dunque

(307.)

queste 6 equazioni dovranno potersi derivare dall'equazione delle velocità virtuali.

Poniamo $h_1 = dx_1$, $k_1 = dy_1$, $l_1 = dz_1$
$h_2 = dx_2$, $k_2 = dy_2$, $l_2 = dz_2$

e la (19) diventerà la

(24) $X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 + X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2 + \&c = 0$,

che nasce dalla (15) per le fatte supposizioni.

Il sistema è invariabile, dunque non si può muovere se si muove, o di moto progressivo lungo un'asse o rotatorio o composto di questi. Se il corpo si muove di moto progressivo, le linee percorse sugli assi saranno eguali, e però sarà

$h_1 = h_2 = h_3$ —— &c.

così per le y

$k_1 = k_2 = k_3 =$ —— &c

per le z

$l_1 = l_2 = l_3 =$ —— &c;

dunque la (10) si muta nella

(25) $(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots \&c) h_1 + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + \&c) k_1 + (Z_1 + Z_2 + Z_3 \&c) l_1 =$

che si debbe verificare indipend. da h_1, l_1, t_1, e però dovranno aver luogo le

(26) $X_1 + X_2 + X_3 + \cdots = 0$,

(27) $Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots = 0$,

(28) $Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots = 0$,

che sono le equazioni d'equilibrio trovate al §.

Vediamo ora di trovare quelle pel moto rotatorio e ne troveremo una quella che da l'equilibrio pel moto intorno all'asse delle z, in tal caso si avrà $t = t_1 = t_2 = t_3 \cdots = 0$ e la (18) si muterà nella

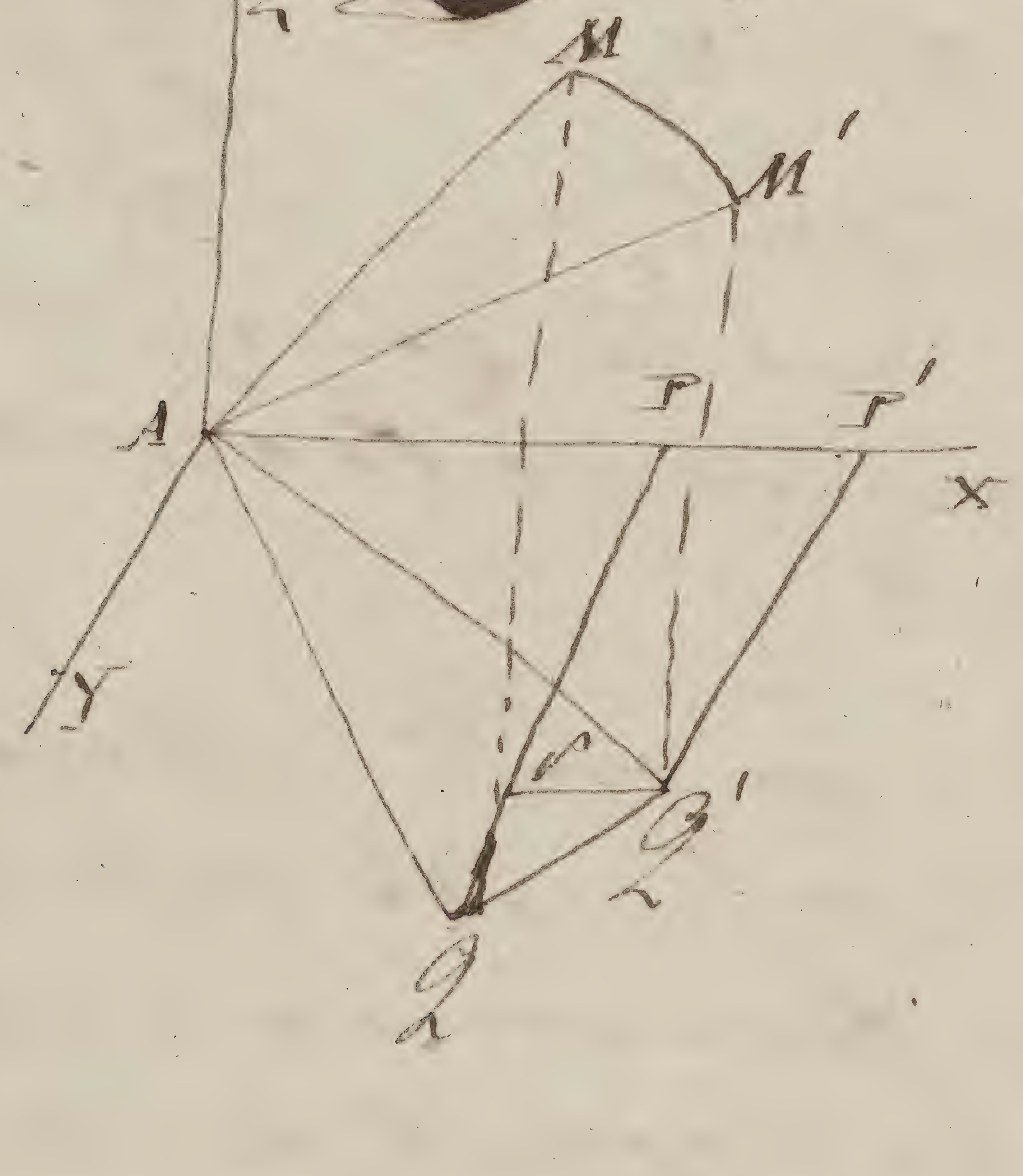
(29) $X_1 l_1 + Y_1 h_1 + X_2 l_2 + Y_2 h_2 + \cdots = 0$.

Osserviamo che per cosiffatto moto una delle coord. cresce e l'altra diminuisce, ed in tal caso si deve metter segno contrario, dunque la (29) si muterà nella

(30) $X_1 l_1 - Y_1 h_1 + X_2 l_2 - Y_2 h_2 + \cdots = 0$.

Supponiamo che il punto M (fig. 53.) sia quello (x, y, z)

(Fig. 53.)



e supponiamo che passi da M ad M' descrivendo un archetto indeterminatamente piccolo che pongo = φ. Dai punti M, M' si conducano sul piano (x, y) le perpendicolari MQ, M'Q' e dai Q e Q' ove incontrano il piano si conducono le QP, Q'P' parallele ad AY, si avrà $AP = x$, $QP = y$, $AP' = x_1$, $P'Q' = y_1$. Da Q' si protragga Q'r parallela all' asse AX, e posto $PP' = h$, $Q'r = k$ avremo

$x_1 = x + h$,

$y_1 = y - k$; Q è la projezione del punto M sul piano (x, y), e quindi nella rotazione descriverà un archetto che rappresenteremo per φ che sarà indeterminatamente piccolo e lo potremo considerare un archetto del raggio AQ a esso perpendicolare. Invece dell' arco possiamo prendere la corda QQ' colla quale esso si confonde, e così avremo il triangolo QrQ', e il triangolo AQP che hanno i lati perpendicolari l'uno all'altro, e però simili

e quindi si hanno le proporzioni

$AQ : QP :: QQ' : Q'v,$

$AQ : AP :: QQ' : Qv,$ ovvero

$AQ : y :: \varphi : h,$

$AQ : x :: \varphi : k,$ onde

$$h_1 = \frac{\varphi}{AQ}\, y$$

$$k_1 = \frac{\varphi}{AQ}\, x$$

Nella rotazione intorno all'asse AZ gli archetti descritti dagli altri punti sono simili a φ, e di conseguenza se diremo, v, v_1, &c i raggi dei diversi circoli noi avremo che sarà

$$\frac{\varphi}{AQ} = \frac{\varphi_1}{v} = \frac{\varphi_2}{v_1} = \text{---} = A,$$

avremo dunque

$h_1 = Ay,$

$k_1 = Ax,$

$h_2 = Ay_1,$

$k_2 = Ax_1,$

\- - - -

— — Messi questi valori nella (30) essa si muta nella

(31) $X_1 y_1 - Y_1 x_1 + X_2 y_1 - Y_2 x_1 + \& = 0$

che è appunto l'equazione di cond.e trovata affinchè non vi sia moto intorno all'asse delle z.

Così si troverebbe per gli altri 2. assi.

Dunque resta dimostrato che nell'equazione che presenta il principio delle velocità virtuali sono contenute le 6 equazioni per un sistema invariabile. —

Capitolo XVIII.

Delle Macchine

§. 225. Dati due punti nello spazio, ai quali siano applicate delle forze qualunque, legati insieme, mediante un sistema di forma variabile o invariabile la composizione del quale sia di guisa ordinata, che le forze applicate ai punti, qualunque sia la relazione che abbiano tra di loro queste forze si mantengano in equilibrio, ovveramente impresso ad uno dei punti un dato movimento, ne nasca all'altro un movimento pur dato ~~[illegible]~~.

Questo problema in generale [illegible] contiene il meccanismo. Il sistema di cui si serve dicesi macchina. La forza applicata ad un punto dicesi potenza e quella all'altro resistenza.

(313.)

§.226. Se l'intermezzo sistema variabile o invariabile fosse perfettamente libero allora la potenza e la resistenza non potrebbersi equilibrare. Dovremo dunque concludere che una macchina è un sistema variabile o invariabile non libero &c.— Col mezzo di una macchina si può mettere in opera una forza che prima non era bastevole. Difatto sotto la macchina intermedia non è più necessario che la risultante delle forze

a sia zero, ma è necessario che venga distrutta dalla resistenza della macchina—

Dunque noi possiamo mettere equilibrio col mezzo di una macchina fra punti che non sono in equilibrio. ———

Dunque è aperto che una forza mediocre non fa da se equilibrio alla grandissima ma serve a far divergere la direzione delle forze in modo che la risultante passi pel punto fisso. Allorchè dunque si ottiene equilibrio tra la forza e la resistenza la forza minore unita alla resistenza della macchina produce l'effetto voluto.—

(312.9)

Nell' equilibrio delle macchine si possono considerare le resistenze come forze eguali ed opposte a quelle che distruggono, ed allora sostituite queste forze l'equilibrio ha luogo fra le forze sostituite alle resistenze e la potenza e resistenza.

Dunque le leggi dell'equilibrio delle macchine sono le stesse di quelle per i sistemi liberi, quindi alle macchine si adatteranno i principj delle velocità virtuali.

Lezione 57.

§.227. Egli è essenziale distinguere l'effetto delle macchine in quiete, cioè l'effetto delle macchine in equilibrio fra date forze e le macchine in moto. Nel 1.º caso trattasi solo di distruggere il movimento, il che si fa in ogni istante, e dal 2.º ed in cui insorge da considerarsi il tempo e la velocità.

§.228. Avendo riguardo alle resistenze che presenta la macchina, facilmente si vede che un minimo aumento della potenza non rompe l'equilibrio

(315.)

me è necessario una forza che vinca questa resistenza, quindi nelle macchine in moto dev'essere una potenza continua. Se la potenza e la resistenza siano amendue costanti, e costanti i loro momenti il moto sarà uniformemente accellerato come sappiamo dalla fisica.
Se poi in progresso del moto le forze od i loro momenti vadino soggette ad alterazioni, il moto sarà bensì accellerato, ma non equabilmente.
Può eziandio succedere che diminuendosi la forza continua o aumentandosi la resistenza vengano queste forze contrarre a pareggiarsi tra loro, nel qual caso l'accellerazione cesserà del tutto, e il moto si farà equabile conservando il grado di velocità acquistata nel termine dell'accellerazione.

§. 229. Allorchè il moto di una macchina riesce alternativamente accellerato e ritardato, può misurarsi

(316.)

mediante un moto unifor-
me a motivo della perio-
dica ripetizione regolare
che deve essere all'acce-
lerazione e nel ritarda-
mento. Così un pendolo
a secondi in una sola oscil-
lazione è accellerato duran-
te la prima metà di 1
secondo, e ritardato per
l'altra metà. Nella dime-
no questo moto computa-
to in più oscillazioni può
essere in quanto all'ef-
fetto considerato unifor-
me. Sia a l'ampiezza
di ciascuna oscillazione,
e supponiamo che il pen-
dolo abbia fatte 10 oscilla-
zioni, il suo effetto sarà
di aver passato lo spa-
zio 10a in 10." Ma lo spa-
zio passato in ciascun 1"
è sempre a e si potrà
paragonare l'effetto del
pendolo a quello prodotto
da un mobile che in 10."
si fosse mosso con una
velocità uniforme che
facesse passare lo spa-
zio a in ogni 1." È quin-
di aperto che la teorica
delle Macchine a moto
uniforme conduce a com-
putare l'effetto delle
Macchine a moto ritarda-
to e accellerato.

317.

Prendiamo a considerare l'effetto delle macchine moto uniforme. —

§. 230. Allorchè una potenza viene applicata ad una macchina l'uniformità del moto non ha luogo di presente ma dopo un certo tempo durante il quale il moto è accellerato passando per tutti i gradi intermedj dalla quiete alla Mass.a velocità di cui sono suscettive la Macchina e le potenze applicate. La continua esperienza ci mette davanti esempj di q.ti fenomeni. Fa d'uopo di qualche attenzione per osservarlo nelle macchine mosse dagli animali, avvegnacchè allora il moto rapidamente attinga l'uniformità, ma di leggieri si mostra nelle macchine mosse dall'acqua. Quando si innalza la cateratta della doccia destinata a portare l'acqua contro l'ali d'una ruota per quantunque grande sia l'impeto dell'acqua, la graduazione di velocità nel passaggio della ruota

(318.9)

dalla quiete al moto riesce assai sensibile nei primi istanti. La ruota non arriva alla velocità uniforme che dopo un lasso di tempo assai sensibile. Facendo astrazione dalla successiva accelerazione della macchina nei primi istanti la considereremo con moto uniforme.

§.231. In generale rallentasi la celerazione del moto delle macchine tendendo all'uniformità se nel processo del moto scema la potenza o cresce la resistenza. Abbiamo di ciò esempj nelle macchine mosse dagli animali. Nei primi istanti la potenza supera di poco la resistenza il che produce un moto che grado grado si accelera sotto i ripetuti sforzj della potenza; ma generalmente gli animali s'indeboliscono e perciò diminuisce la potenza e perciò si tende all'equilibrio quando le forze si elidono e la macchina va colla velocità acquistata.

§.232. Ciò si rende più aperto figurando una nave

(31g.)

che abbia il vento in poppa. È la nave una specie di macchina, su cui agiscono due forze opposte, il vento e la resistenza dell'onda. Se l'impulso del vento che tien la vece di potenza supera la resistenza dell'acque, il moto della nave si accellera, ma così fatta accellerazione lan ne cessariam.e dei limiti

Per 2 ragioni.

1.° Perchè accellerandosi il moto della nave viene sottratta dall' impulso del vento.

2.° Perchè più aumenta la resistenza dell'acqua. — Per la qualcosa la potenza e la resistenza tendono ad eguagliarsi: quando a ciò avranno attinto, le due forze si elideran no e la nave seguitirà il suo corso colla velocità acquistata, se non v'ha altra cagione. Se il vento infievolisca, la resistenza dell'acqua supera la potenza e ritarda il moto della nave, ma nello stesso tempo la

forza del vento viene a divantar maggiore diminuendo quella delle acque. Dunque tendono ad equagliarsi.

§. 233. Diremo velocità della potenza e la indicheremo per u, supponendo che questa sia la velocità uniforme del punto ove è applicata la potenza; così per u, la velocità del punto uniforme ove è applicata la resistenza. In ogni istante del moto è necessario uno sforzo della potenza affinchè la velocità di lei si conservi uniforme e costante, il quale diremo sforzo della potenza. Lo sforzo della resistenza è quello che esser debbe ad ogni istante distrutto dalla potenza per conservare l'uniformità del moto, e però vi dev'esser l'equilibrio.

§. 234. Presentiamo per Q ed f gli sforzi della potenza e della resistenza che si devono equilibrare e per le velocità virtuali si avrà la

(1). $PQ + f\,f_1 = 0$.

Si osservi che una delle velo-
cità virtuali projettate sulle
direzioni di Q, P, è nei pro-
lungamenti di queste due
direzioni e pel detto queste
due projezioni devono avere
segni contrarj e la (1) si
riduce alla

(2) $pQ - Pp_1 = 0$, da cui si ha

(3) $\frac{p}{p_1} = \frac{P}{Q}$. Nel movimento
indeterminatamente picco-
lo che supponesi nel teore-
ma delle velocità virtuali,
p, e p_1 considerare si posso-
no come spazietti indeter-
minatamente piccoli,
passati nelle direzioni
della potenza e resistenza
con velocità costanti e
uniformi du, e du_1 e
per conseg.a proporziona-
li a così fatte velocità
come vedremo in segui-
to ed avremo la

(4) $\frac{p}{p_1} = \frac{du}{du_1}$.

Da una macchina di
conosciuta costruzione è
data la relazione della
velocità della potenza
alla resistenza, e per
sarà noto $\frac{u_1}{u}$. Supponia-

mo che u, divendi $u+du$, e u_1, u_1+du_1: la relazione fra le velocità della potenza e resistenza essendo costante per la stessa macchina nella ipotesi del moto uniforme, dovrà essere la

$$(5)\quad \frac{u+du}{u_1+du_1}=\frac{u}{u_1}\text{; ossia}$$

$$uu_1+u_1du=uu_1+u\,du_1\text{,}$$

ossia $u_1du=u\,du_1$, e poi

$$(6)\quad \frac{du}{du_1}=\frac{u}{u_1}\text{, per cui la (1)}$$

si muta nella

$$(7)\quad \frac{p}{p_1}=\frac{u}{u_1}\text{, d'onde la (3) diventa la}$$

$$(8)\quad \frac{u}{u_1}=\frac{f}{Q}\text{, ovvero la}$$

$$(9)\quad uQ=u_1f.$$

Nelle macchine adunque che si movono di moto uniforme, il prodotto della velocità della potenza nel proprio sforzo, eguaglia il prodotto della velocità della resistenza nel proprio sforzo.

Finchè non si avverta il contrario faremo astrazione dalle resistenze che s'incontrano, attrito rigidezza delle funi.

Osserviamo ancora che la velocità della potenza è sempre la stessa indipenden-

(323.)

tamente dalla sua azione contro la macchina —

1.235 L'effetto di una macchina si misura dalla forza della resistenza, dalla velocità di lei, e dal tempo t, pel quale dura l'azione della potenza. Supposto che il principio di questo tempo sia nell'istante in cui il moto ha cominciato ad essere uniforme, l'effetto di una macchina sarà rappresentato da $f.u.t.$ — Diffatti che due fattori sieno costanti, sarà l'effetto della macchina proporzionale al 3.° e [illegible] a tutti i 3. —

Se ad esempio la macchina s'impiegli ad innalzare un peso di cui è data la velocità u, e lo sforzo f, l'effetto sarà proporzionale al tempo in cui s'innalzerà più quanto sarà maggiore il tempo. Così se due altri componenti sieno dati. —

Laonde se si usi di una potenza tale che il prodotto della velocità nel suo sforzo sia sempre lo stesso l'effetto della macchina

(324.9)

sarà sempre proporzionale al tempo: difatti se u è costante sarà costante $u.f$, ed in tal caso sarà proporzionale al tempo.

§. 236. Lo sforzo di cui sono capaci gli animali dipende dalla velocità colla quale essi si movono. Quando essa è nulla, eglino esercitar possono tutto lo sforzo di cui sono suscettivi; ma quando sono in moto, lo sforzo che sono obbligati di fare per conservare questo moto, diminuisce lo sforzo che potrebbero fare per muovere il peso.

Di maniera che a tributo un certo grado di velocità gli animali non sono più idonei ad aumentarlo: di guisa che vi ha una ~~sforza~~ velocità per il quale non possono esercitare sforzo veruno contro una resistenza. Della stessa guisa vi ha un tale sforzo per il quale non possono esercitare ~~sforzo~~ velocità veruna.

§. 237. Poniamo che una potenza atta ad esercitare uno sforzo F quando è nulla la

(325.)

sua velocità, e che cessi da qualunque esercizio di forze quando la sua velocità è U. Sia Q lo sforzo quando si muove equabilmente colla velocità u. Della natura della funzione Q, la quale

1.° Deve scemare al crescere di u.

2.° Esser deve $Q = F$ quando $u = 0$

3.° Esser deve $\frac{F}{\ }=0$, se $u = U$.

Invece di esperienze e di osservazioni che sole potrebbero insegnarcela, non abbiamo che diverse ipotesi da diversi scrittori proposte senz'altra raccomandazione che la loro semplicità. Diffatti ciò è stata rappresentata dalla condi

(10) $Q = F\left(1 - \frac{u}{U}\right)$,

(11) $Q = F\left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right)$,

(12) $Q = F\left(1 - \frac{u}{U}\right)^2$,

Quest'ultima data da Eulero e che è preferita da Prony, asserendo che riguardare si può come esatta sensibilmente quantunque abbisogni di modificazioni in certi casi. e Poi li seguenti farem

uso della (12) a rapp.° la C.–

§.238. Se nella (9) si metta a voce di Q il suo valore dato dalla (12), avremo la

(13) $u_1 f = u \mathfrak{F}\left(1-\frac{u}{U}\right)^2$, e quindi

(14) $f = \frac{u}{u_1} \mathfrak{F}\left(1-\frac{u}{U}\right)^2$: ma $\frac{u}{u_1} = \frac{p}{p_1}$ che è la (7) dunque

$f = \frac{p}{p_1} \mathfrak{F}\left(1-\frac{u}{U}\right)^2$, onde

$\sqrt{\frac{f p_1}{\mathfrak{F} p}} = 1-\frac{u}{U}$, e quindi la

(15) $u = U\left(1-\sqrt{\frac{f p_1}{\mathfrak{F} p}}\right)$ equazione che dà la velocità della potenza: la (15) moltiplicata per $\frac{p_1}{p}$ e ricordando che dipend.^e dalla (7) si ha $\frac{U p_1}{p} = u_1$, diventa

(16) $u_1 = U \frac{p_1}{p}\left(1-\sqrt{\frac{f p_1}{\mathfrak{F} p}}\right)$ che dà la velocità della resistenza

Lezione 58.
La 59. Ripetiz.e

§.239. Si è veduto che l'effetto della macchina è rappresentato da $f u_1 t$; dipendentemente dalla (16) si ha la

(17) $f u_1 t = U \frac{p_1}{p}\left(1-\sqrt{\frac{f p_1}{\mathfrak{F} p}}\right) f t$, che serve a determinare l'effetto della macchina. Da questa si vede, che se sia dato lo sforzo f da vincersi, l'effetto della macchina nel lasso di un tempo determinato t, dipende da U, $\mathfrak{F}$, e $\frac{p_1}{p}$; le due prime

dipendono dalla natura della potenza o forza di lei, cioè dalla specie di agenti che s'impiegano a muovere le macchine come, uomini, bestie, fluidi &c e dal numero: da quali cose supporremo dati: la quantità $\frac{f_1}{p}$, che è la relazione fra le velocità virtuali della potenza e resistenza dipende dalla costruzione della macchina, e di conseguenza è suscettiva di un valore massimo: questo valore $\frac{f_1}{p}$ vien dato dalla derivata del 2° membro della (17) ~~dioffanto~~. Osserviamo che h, f, t è costante; dunque per la ricerca del massimo dovremo porre la

(18) $\left(\frac{f_1}{p}\left(1-\sqrt{\frac{F}{f}}\cdot\frac{f_1}{p}\right)\right)' = 0$, rispetto a $\frac{f_1}{p}$. Poniamo $\frac{f_1}{p} = z$, e la (18) si muterà nella

(19) $\left(z^2\left(1-z\sqrt{\frac{F}{f}}\right)\right)' = 0$; prendendo la derivata rispetto a z si avrà

(20) $2z - 3z^2\sqrt{\frac{F}{f}} = 0$; due valori di z soddisfanno $z=0$, che dà un effetto nullo, e l'altro dato dalla

(21) $z = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{f}{F}}$ al quale corrisponde

il massimo effetto della macchina; dalla (21.) si ha la

(22) $z^2 = \frac{p_1}{p} = \frac{4}{9}\frac{F}{f}$. Dal che mostrasi che ad ottenere il massimo effetto della macchina dev' essere la ragione fra le velocità virtuali la stessa di quella di 4F a 9f. Questa relazione deve essere considerata come quella alla quale accostar devesi quanto si può quando non si premi di ottenerla esattamente.

§. 240. La determinazione della relazione della velocità della potenza alla velocità della resistenza che abbiamo trovata suppone dati U ed F, e lo sforzo f della resistenza come ad es. se si avesse ad innalzare una massa di peso determinato.

Le relazioni fra le 6 quantità

$\frac{p_1}{p}$, u_1, u, φ, f, F, U vengono date dalle equazioni

(7) $\frac{p_1}{p_1} = \frac{u}{u_1}$,

(9) $u\varphi = u_1 f$

(12) $\varphi = F\left(1 - \frac{u}{U}\right)^2$.

(329.)

(23.) $\frac{u_1}{u} = \frac{h}{g}\frac{F}{f}$.

La (7) e la (9) esprimono delle proprietà fondamentali applicabili ad ogni macchina; la (12) dà la relazione fra Q, U, f; e la (23) la cond.e d'onde risulta il massimo effetto della macchina. Combinando la (9) colla (23) se ne deduce

(24.) $Q = \frac{h}{g} F$ che messo nella (12) dà

$\frac{h}{g} = \left(1 - \frac{u}{U}\right)^{i}$ d'onde la

(25.) $u = \frac{1}{3} U$

§. 24. Se le quantità F, U, f_1 fossero date, vale a dire se fossimo obbligati a servirci di una macchina già costruita alla quale applicarsi dovesse un certo N.o di animali o una corrente d'acqua invariabile e che il tempo fosse pur limitato, nel 2.o membro della (17) non rimarebbe incognito che f, e per avere il Mass.o effetto della macchina corrispondente ad f, si dovrebbe eguagliare allo zero

(330.)

la derivata di

$\left(1-\sqrt{\frac{p_1 t}{p \cdot \mathcal{F}}}\right) t$ rispetto ad t, e si avrà

$$1-\sqrt{\frac{p_1}{p \cdot \mathcal{F}}\, t} - \frac{\frac{p_1}{p \cdot \mathcal{F}}\, t}{2\sqrt{\frac{p_1}{p \cdot \mathcal{F}} \cdot t}} =$$

$1-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{p_1}{p \cdot \mathcal{F}} \cdot t} = 0$: innalzando a quadrato si avrà

$4 = 9\frac{p_1}{p \cdot \mathcal{F}} \cdot t$, e però

(26) $t = \frac{4}{9} \cdot \frac{p}{p_1} \cdot \mathcal{F}$. Da questa equazione derivasi la (23) $\frac{p}{p_1} = \frac{u}{u_1} = \frac{9}{4}\frac{t}{\mathcal{F}}$, la quale combinata colla (9) origina la (24).

§. 242. Risulta quindi, che data la potenza da applicarsi ad una Macchina, se disporre si possa dello sforzo della resistenza o della costruzione della macchina, sarà mestieri di produrre il massimo effetto, moderare lo sforzo della resistenza di guisa che la potenza possa conseguire $\frac{1}{3}$ della velocità attinta la quale non sarebbe più idonea a veruno sforzo, ovveramente costruire la macchina in modo che la relazione della velocità

della potenza alla velocità
della resistenza eguagli
il prodotto di g nella for-
za della resistenza al pro-
dotto di h nella forza che
la potenza può esercitare
allorchè la sua velocità
è nulla, come si mostra
dalla (23).

§. 243. Se nella (17) si faccia
$\vartheta = \infty$, essa si muta
nella

(27) $fu, t = U \frac{L}{p} ft$, che sarà
l'espressione del mass.° ef-
fetto della macchina;
da quest'equazione si mo-
stra, che la somma degli
agenti impiegati a muove-
re una macchina può essere indetermi.
grande senza che ne con-
seguiti un'effetto grande
indetermin.° Ciò deriva
dal non potere ϑ influire
sopra U. Diffatti, qua-
lunque sia il N.° degli
uomini che agiscono su
di una macchina, es-
sendo U l'effetto di un
uomo grande non può
più aumentarlo, esso
non si aumenterà ap-
pure aumentando gli
uomini.

(332.)

§. 214. Poniamo che uQ sia costante e dato. L'effetto della macchina è presentato da $Fu.t = FuQt$.

Quindi si vede che una potenza il cui sforzo sia Q movendosi con una velocità costante u, non potrà nel tempo t di qualunque maniera si applichi alla resistenza coll'ajuto di una macchina intermezza produrre l'effetto $Fu.t$ cioè quello che produrrebbe senza l'ajuto di veruna macchina intermezza. Ad es. un uomo che passi 2 piedi e $\frac{1}{2}$ ogni secondo innalzando un peso di 20 libbre, qualunque sia la macchina produrrà l'effetto $2\frac{1}{2} \times 20 = 50$, sarebbe lo stesso questo effetto se si applicasse immediatamente alla resistenza.

§. 215. Nelle macchine considerate fisicamente vale a dire composte di parti materiali, sta sempre al disotto dell'effetto trovato, per l'inerzia, attrito consumano una parte di potenza la quale distruggere non può in

333.

sforzo della resistenza che vincerebbe senza macchina. Si debbe dunque considerare il prodotto della potenza nella sua velocità di lui come il prodotto in più dell'effetto che può produrre.

§. 226. Il principale obbietto di utilità delle macchine consiste di dare alla potenza una direzione più comoda e di applicarne l'azione ad altri punti fuori del corpo che si vuol muovere &c. Questo vantaggio torna di grande utilità alla pratica.

§. 227. Però la perfezione delle macchine diretta al conseguimento di questo vantaggio non è il principale scopo de' meccanici avvegnacchè esso consiste a modificare l'intensione della potenza di guisa che essa produca degli effetti a cui giungere non potrebbe senza l'ajuto di macchine intermedie. Per mettere davanti come si giudichi l'intensione della potenza si ponga mente che è lo sforzo

che essa può fare, col quale mette in moto la resistenza e la conserva: ma affinchè il moto possa aver luogo, è d'uopo che nei primi istanti lo sforzo della potenza quantunque minore di quello della resistenza superare la possa e dipoi nei successivi istanti gli faccia equilibrio. Ma non è che questo sforzo sia aumentato dalla macchina ma lo impiega di guisa che possa tener la vece di uno sforzo più grande. Osserviamo che il prodotto Pu, rappresenta l'effetto della macchina in un unità di tempo, supposto il moto uniforme prodotto in un modo qualunque. Se P sia $> Q$, si può sempre fare che $u,P = u,Q$, la qual cosa non si otterrebbe se la potenza fosse immediatamente applicata alla resistenza.

§. 248. Generalmente le macchine servono a produr variazione nel prodotto uQt, di maniera che abbiano

fra loro una certa azione.
Supponiamo un uomo che applichi la sua azione ad una massa di 25 libbre, e che le imprima una velocità da passare 4 piedi ogni 1." Se immediatamente egli applichi la sua forza ad una massa di 1000 libbre egli non la potrà smuovere impiegandovi tutte le sue forze, ma la potrà con una macchina. Infatti egli produce l'effetto $25 \cdot 4 \cdot t$; poniamo che l'effetto della macchina sia $1000 u t$, si avrà $25 \cdot 4 \cdot t = 1000 u_{,} t$ da cui $u_{,} = \frac{1}{10}$.
L'uomo dunque mediante una macchina può muovere per $\frac{1}{10}$ di piede una massa di 1000 libbre nel tempo stesso che innalzerebbe 25 libbre a 4 piedi senza macchina. Se si volesse mantenere la stessa velocità e determinare il tempo si avrebbe
$25 \times 4 : 1000 \times 4 :: 1 : t'$, da cui $t' = 40$. Dunque mediante una macchina potrebbe l'uomo innalzare 1000 libbre percorrendo

(336.9)

te piedi per 1" con un tempo
10 volte maggiore. —
Da ciò si vede che colle gran
di macchine si rapisce gran
demente nel tempo. —

§. 249. Appoggiati del dato sugli
effetti che possono produrre
le macchine apparisce
che ogni volta che una
potenza esercita uno sfor
zo determinato con una
velocità determinata vale
a dire che il prodotto ri-
manga lo stesso, l'effetto
rimarrà il medesimo. —
Onde supposta la pre-
ponderanza della potenza
sulla resistenza e fatta
astrazione dagli attriti
tutte le macchine son
perfette. Ma si è vid.
al §.--240 che una potenza
diminuendo la sua velocità non
può aumentare lo sforzo —
Dunque esistono tali
sforzi nella potenza che
il prodotto nella sua
velocità dia il Mass.° effet-
to. — [redacted]a ricerca dello
sforzo e della velocità che
addiconsi al massimo
effetto dipendono dal va-
lore Q dato dalla (12).
§.° poi veduto al §. 246.

che pel massimo effetto avrà.
Dessi le (24) e la (25), i quali valori dati da esse dovendo
sussistere insieme, sarà
$\frac{4}{27} u F$, il massimo effetto
riferito all'unità di tempo.
Usando di una potenza
di cui la velocità e lo sforzo
sono suscettive di cambiamento, vi ha mezzo di
trarne partito. Se poi
la costruzione della macchina sia libera, vi ha
mezzo di ottenere il massimo effetto; se poi è data
si dovrà determinare
f che corrisponda al massimo effetto.

§. 256. Allorchè il prodotto dello
sforzo della potenza della velocità di lei ha un valor
costante, questo misura
il Mass.º effetto in un'
unità di tempo: ma quando è variabile il Mass.º
effetto dipende da U e F.
In ogni caso il massimo
effetto ha dei limiti stabiliti dalla Natura, e
che l'industria umana
non può trasandare.

(338.)

§. 251. Sonovi macchine che diconsi semplici perchè si adoperano da se ed entrano nella composizione delle altre, e servono a produr moto.

Fra le macchine semplici vi ne sono di quelle che diconsi elementari, ciò sono le corde, la leva, e il piano inclinato, anzi sono due poichè il piano inclinato si può ridurre a leva.

Le corde servono a trasmettere le direzioni delle forze e differiscono dalle verghe rigide poichè queste possono respingere

Lezione 60

(339.)

Capitolo XIX
Della Macchina o Poligono funicolare

§. 252. La macchina funicolare si compone di corde unite fra loro con nodi fissi, ovveramente infilzati in anella che scorrer possono lungo la corda stessa.

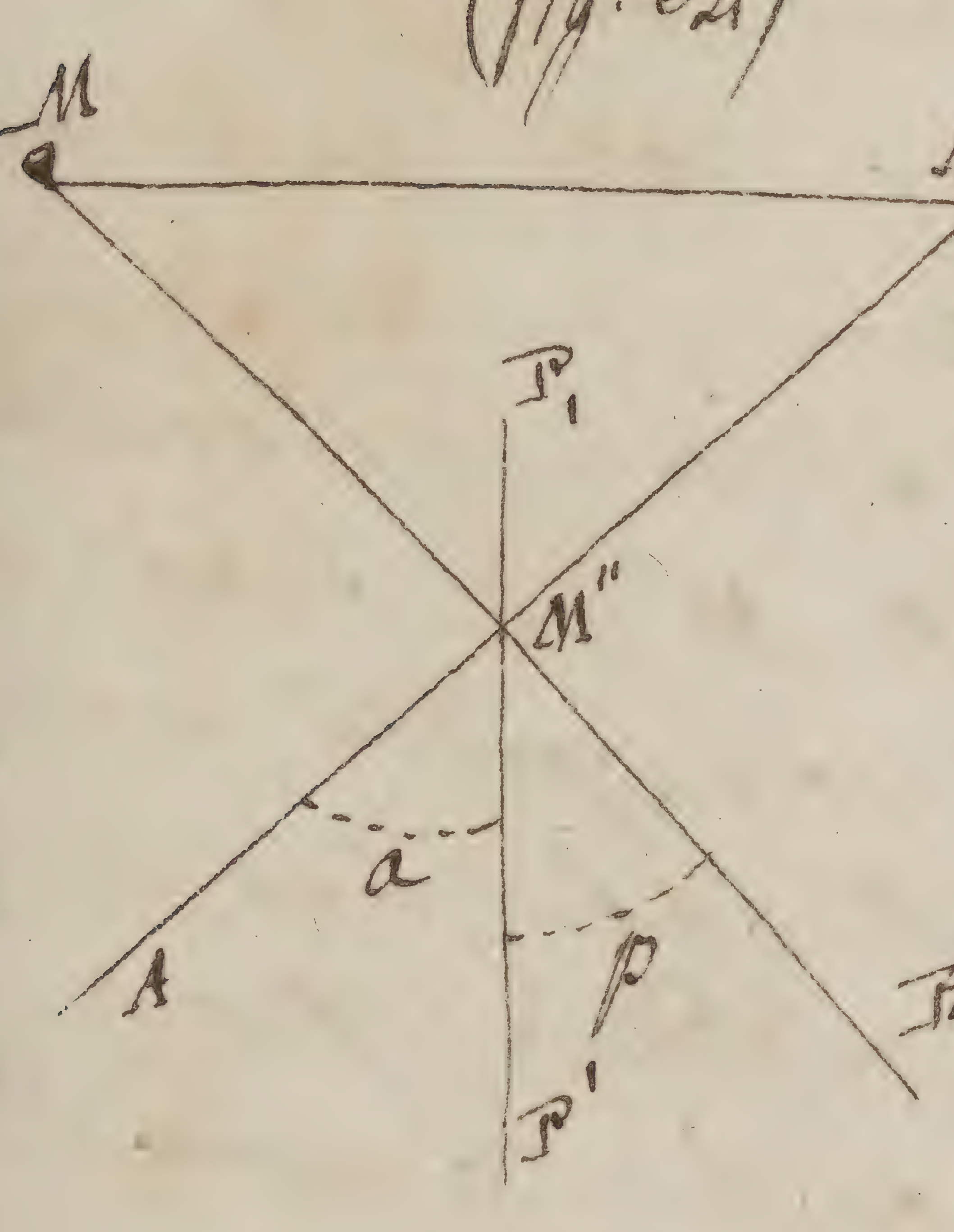
La tensione di una corda è la forza che agisce sopra di un estremità essendo fissa l'altra. Allorchè due forze eguali ed opposte sono applicate agli estremi di una corda vi ha equilibrio nelle forze, e però la tensione della corda sarà misurata da una delle due forze eguali. Se poi non vi ha equilibrio fra le due forze la tensione è misurata dalla più piccola delle due forze. Di fatti, l'effetto della più grande è quello di vincere la più piccola e seco strascinarla. Siano le due forze a, ed $a+b$, applicate agli estremi della fune le due a, $-a$ vi sarebbe equilibrio, e se si aggiunga la b, essa non

produrrà tensione che
è fatta dalla a, ma ten-
derà a strascinare la mi-
nore. ———

Il sistema può essere
al tutto libero o avere
dei punti immobili. ——

§. 253. Allorchè delle forze di
direzione ed intensione qua-
lunque sono in equilibrio
mediante la macchina
funicolare, ciascheduna
porzione di ~~forza~~ corda trasfon-
de al sistema l'azione delle
forze. ———

(fig. 54)



§. 254. Cominciamo da un caso sem-
plicissimo e siano (fig. 54.)
attaccati gli estremi ai pun-
ti M, M', ed un punto fisso
M'' sia applicata la corda
M''P' congiunta alla p.a con un no-
do fisso a cui agisca la forza
P'. ———

Siano (x', y', z') (x'', y'', z'')
(x''', y''', z''') le coordinate
dei punti M, M', M'' — ?
e determiniamo la relazione
che debbe aver luogo fra
le tensioni di porzione di
corde MM'' = m, M'M'' = n — ?
esercitate dalle forze P', — ?

(341.)

Siccome il nodo è fisso si avranno due condiz. e però la

(1) $MM'' = m = \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}$

(2) $M'M'' = n = \sqrt{(x''-x''')^2+(y''-y''')^2+(z''-z''')^2}$.

Egli è poi evidente che la forza P' scomporre si dovrà in 2 nella direzione di M''M e M'M' che verranno distrutte dalle resistenze dei punti fissi M, M' e misureranno le tensioni delle 2 corde.

Dalla (1.) e (2) si hanno le

(3) $m^2=(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2$

(4) $n^2=(x''-x''')^2+(y''-y''')^2+(z''-z''')^2$

equazioni di due superficie sferiche che hanno rispettivamente per raggio m ed n ed i centri sono in M, M', e però il punto M'' non potrà muoversi che nell'intersecazione di queste due sfere.—

La forza P' essendo la risultante delle M''M, M'M' esse dovranno essere sullo stesso piano.

Sia l'angolo $AM''P' = \alpha$,
$BM'P' = \beta$;

e sieno T e T' le tensioni dei tratti di fune MM'', M'M'', ed avremo pel ord. al §. 13 le proporzioni:

$P' : T :: O(\alpha+\beta) : O\alpha$,
$P' : T' :: O(\alpha+\beta) : O\beta$; quindi si deducono le equazioni

(5.) $T = \frac{P'O\alpha}{O(\alpha+\beta)}$,

(6.) $T' = \frac{P'O\beta}{O(\alpha+\beta)}$.

Quanto più l'angolo $\alpha+\beta$ s'accosta a 180° tanto più la tensione delle due porzioni aumenta per quantunque piccola ma determinata sia la tensione. Supposto P' finito e $\alpha+\beta = 180$ si avrà la tensione infinita, e si avrà

(7) $T = \frac{P'O\alpha}{0} = \infty$

(8) $T' = \frac{P'O\beta}{0} = \infty$. Vedesi adunque che le due rette AM, BM'' non possono essere ~~finite~~ per diritto a meno che essendo P' finito, non sieno T, T' infinite.

Dunque una corda non potrà stare in linea retta se non è tesa da una forza infinita per quanto piccola sia P' o il suo peso.-

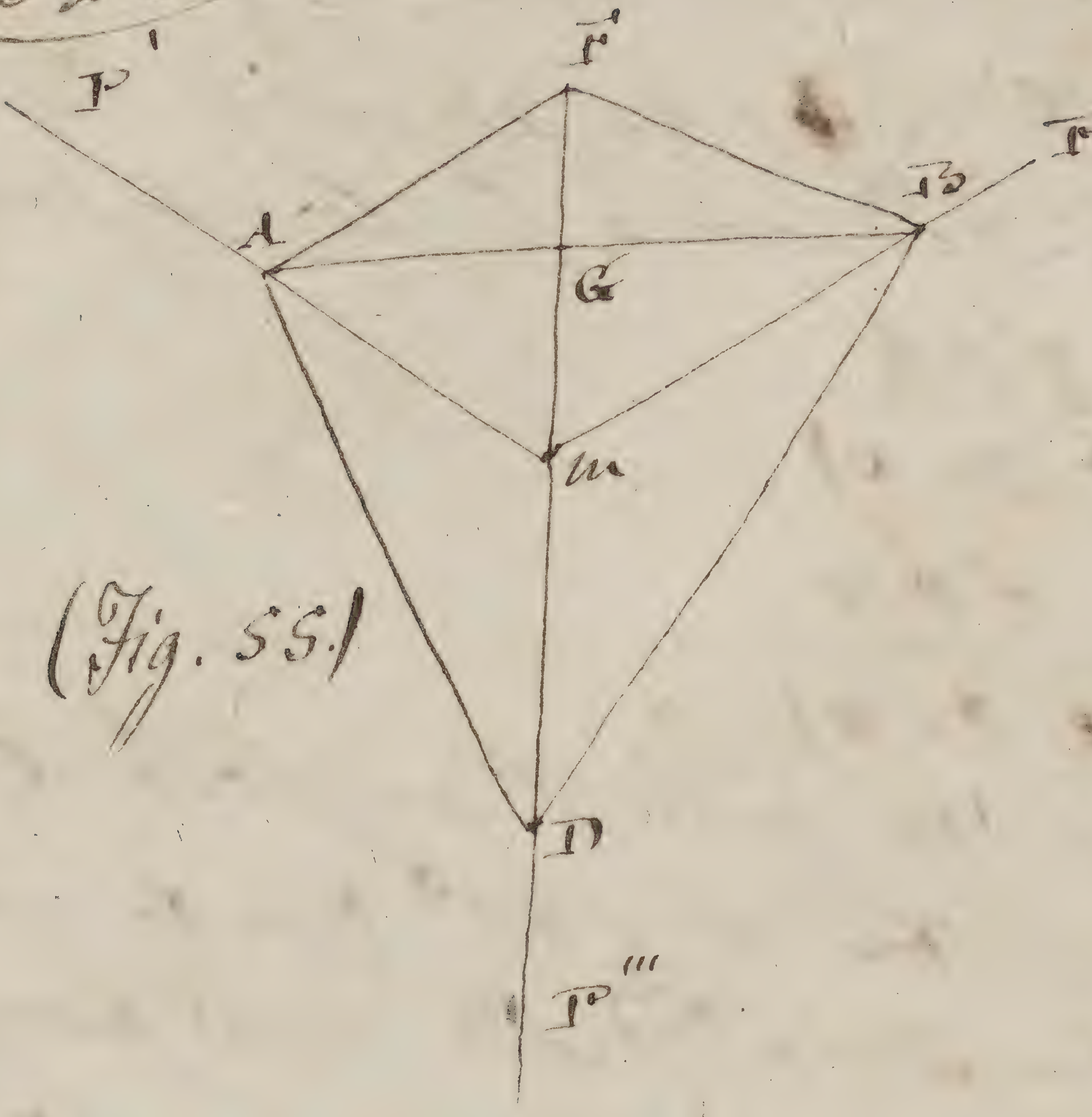
Se la direzione P'M'' tagli per metà l'angolo M'M''M, si avrà $\alpha = \beta$, e però

(9) $T = \frac{P'O\alpha}{O2\alpha} = \frac{P'O\alpha}{2O\alpha O\alpha} = \frac{P'}{2O\alpha} = T'$

§. 255. (Si osservi la fig 55.) .-

Supponiamo un sole nodo immobile cui sieno applicate le forze P', P'', P''',

313



(Fig. 55.)

proporzionali ad MA, MB, MD.

Se fra esse vi abbia equilibrio, prendendo sul prolungamento di MD una porzione mF = mD, la mF rappresenterà la direzione ed intensione della risultante della Am, Bm onde protratte le AF, BF ne nascerà un parallelogrammo di cui mF sarà diagonale. Si tiri la AB che dividerà per metà la Fm, e si avrà FG = Gm, e Gm = $\frac{1}{3}$ GD. E' quindi aperto che nel caso di equilibrio il nodo è posto nel centro di gravità del triangolo ABD. Per converso se m sia il centro di gravità del triangolo ABD, e le forze F', F'', F''' siano proporzionali alle mA, mB, mD il sistema è in equilibrio.

Ed anche se le forze siano in equilibrio ed il nodo nel centro del triangolo, le tre forze saranno rispettivamente proporzionali ai tre lati ~~del triangolo~~ Am, mB, mD.

Nel 1° caso prolungata la DG in F, e posta GF = Gm si tirino le AF, BF.

(324.

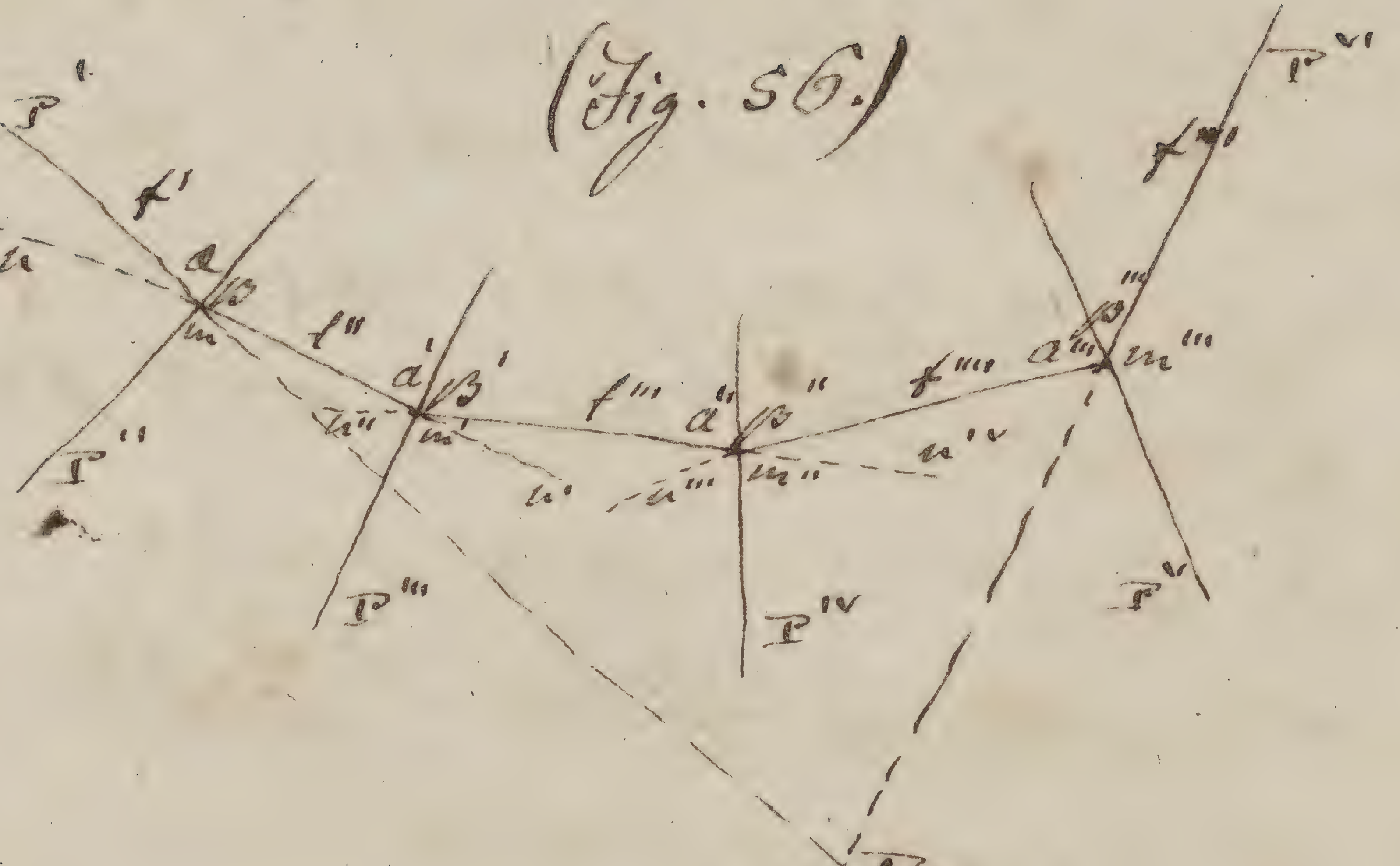
~~Essendo il sistema in equilibrio~~

Essendo $AG = BG$ e $mG = GF$ per costruzione sarà $FAmB$ un parallellogrammo, e perciò la mF sarà risultante delle F', F'' rappresentate dalle mA, mB.

Ma per essere poi m il centro di gravità del triangolo ABD si ha $Gm = \frac{1}{2} mD$ e però $mF = mD$, quindi il sistema sarà in equilibrio. ——

Nel secondo caso; si prolunghi la direzione della F''' in F; rappresentata la F''' per la mF, condotte le parallele FA, FB alle mF'', mF', queste rappresenteranno le F'', F': presa $mD = mF$ e condotte le DB, DA sarà m il centro di gravità del triangolo ABD e conservandosi il sistema in equilibrio saranno le tre forze rappresentate dalle mA, mB, mD essendo proporzionali ai lati del triangolo AmF ec.

(3a5.)



(Fig. 56.)

§.256. Si è veduto che all'equilibrio di un sistema qualunque, le forze applicate ai diversi punti di lui ~~lungo rette~~ esser debbono scomponibili secondo le rette che uniscono i punti in forze eguali 2 a 2 ed opposte. Dunque questa cond.e dovrà pur verificarsi nel poligono funicolare. Sieno (Fig. 56.) P', P'' le forze applicate in m, e la P''' sia applicata al nodo m': supporremo i nodi fissi fin chè s'avverta del contrario. La risultante delle P', P'' dev'essere nella direzione di m'm, perchè deve equilibrare la tensione del lato mm'. La componente di P''' dev'esser secondo m'm che è prolung.o di mm', eguagliar deve la prefata risultante; e l'altra ~~risultante~~ componente agir deve secondo m''m' la quale dev'esser equilibrata dall'altra componente di P'' secondo la direzione di m''m''': e così di seguito per gli altri lati se più fossero i nodi.

(34 F. 9)

se si considerassero maggior numero di forze si dovrebbe fare nello stesso modo. Gli estremi dello stesso lato del poligono, per l'equilibrio debbono essere tirati da forze eguali ed opposte. Se la risultante delle P', P'' si applichi in m' sarà m'n'' la direzione della risultante delle forze P', P'', P''' ——

Così la risultante delle P', P'', P''' si può supporre applicata in m'', e la risultante secondo m''n''' sarà risultante delle P', P'', P''', P^{iv}. Così &c (a)

(a) e se il sistema sarà in equilibrio la risultante sarà eguale ed opposta alla P^{v}. ——

§. 257. Dal detto rimane aperto, che per l'equilibrio del poligono funicolare a nodi fissi, è necessario e basta che tutte le forze che lo sollecitano trasportate parallelamente a se stesse in un punto si faccian equilibrio, ma per un così fatto equilibrio debbono sussistere le equazioni di con.d.

(10) $\Sigma P' \theta P' X = 0$,

(11) $\Sigma P' \theta P' Y = 0$,

(12) $\Sigma P' \theta P' Z = 0$. Dunque per l'equilibrio del poligono funicolare a nodi fissi debbono aver luogo le (10)(11)

(347.)

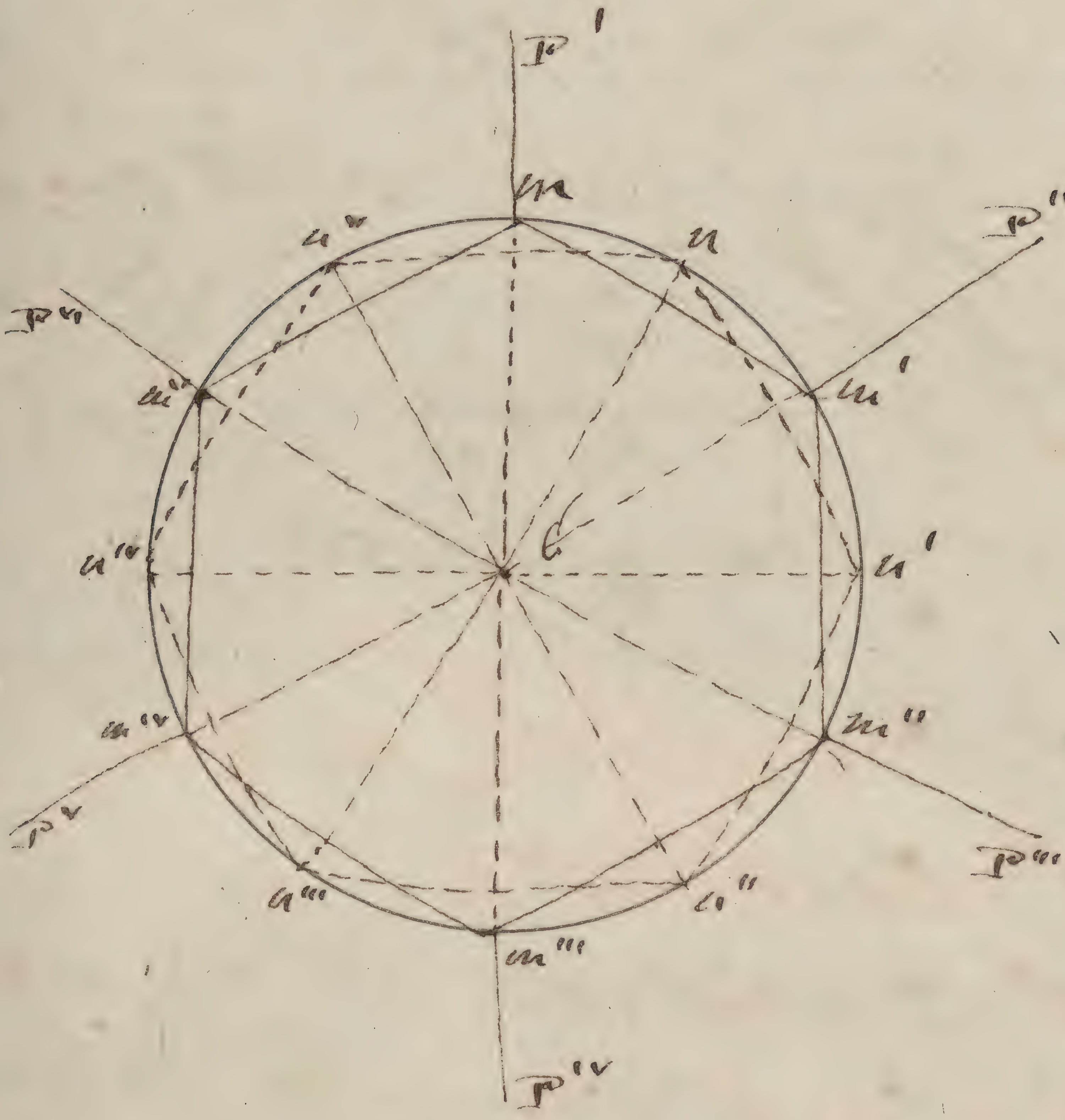
(12). ———

Al trovare la direzione di un lato del poligono e la tensione da esso sopportata, basterà trasportare parallellamente a se stesse tutte le forze agenti sui nodi antecedenti sul nodo ove comincia il lato e cercarne la risultante. Dacchè dovendo tre forze in equilibrio essere sullo stesso piano, è manifesto che due lati contigui, e la forza che li sollecitano esser debbono sullo stesso piano. Dunque nell' equilibrio [a] del poligono funicolare il piano delle forze è quello del poligono. ———

(a) se le forze sono sullo stesso piano ———

Allorchè prolungati due lati di un poligono piano s'incontrano, la risultante delle tensioni dei due lati prolungati esser debbe distrutta dalla risultante di tutte le forze intermedie. Se questa si applichi al punto di incontro dei due lati cioè senza forza è rappresentata dal seno delle altre due come al §. 10. —

(34. 8.^a) (Fig. 57.)



§. 258. Sia un poligono chiuso e regolare piano di un N. qualunque di lati, ad es. un esagono il quale sia trattenuto in equilibrio dalle forze P', P'', P''', P''''— &c le cui direzioni passano pel centro del poligono. Siano mm'— &c i lati dell'esagono; ed ai mezzi u, u', u'' — &c degli archi sottesi ai lati si conducano i raggi cu, cu', cu'', cu''' &c e le corde uu', u'u''— &c. Ciascheduno dei triangoli come uu'c ha i suoi lati rispett. perpendicolari a due lati consecutivi del poligono ed alla direzione della forza applicata all'angolo formato dai due lati. Ma abbiamo dimostrato al §. 17. che due forze e la loro risultante sono proporzionali ai tre lati di un triangolo rispett. ~~pro~~ perpendicolari ~~porzionali~~ alle loro direzioni, dunque le tensioni dei lati essendo perpendicolari ai raggi dello stesso circolo, sono eguali.

(314.)

Sono pure eguali le forze P', P'', P''' — e poichè sono perpendi. ai lati uu'' e e proporzionali a tutte sono eguali.
Sia t la tensione di gli lati e poniamo $cu = \text{---} = r$, e si avrà

$P' : t :: uu' : r,$
$P'' : t :: uu' : r,$
$P''' : t :: u'u'' : r,$
$P^{iv} : t :: u''u''' : r,$
$P^{v} : t :: u'''u^{iv} : r,$
$P^{vi} : t :: u^{v}u^{iv} : r,$ onde

$P' : uu' :: P'' : u'u :: P''' : u'u'' :: P^{iv} : u''u''' :: P^{v} : u'''u^{iv} : P^{vi} : u^{v}u^{iv} :: t : r,$ e però posto M il contorno del poligono, si ha
$P' + P'' + P''' + P^{iv} + P^{v} + P^{vi} : M :: t : r,$ e però la

(13) $t = \dfrac{r(P' + P'' + P''' + P^{iv} + P^{v} + P^{vi})}{M}$

Dal ciò si vede che il dato è indipendente dal N. di lati del poligono regolare, e quindi si adatta ~~angolo~~ ancora ad un circolo perfettamente flessibile a cui sono applicate delle forze agenti ~~egual~~ dal centro alla circonferenza.
Tutte le forze essendo eguali — Ca

Jr. —

§. 259. Imprendiamo ora a considerare un caso più generale. Figuriamo nello spazio una corda perfett.te flessibile ed inestensibile ed a diversi punti della quale sieno applicate delle forze $F', F'' \text{———} F^{(m+1)}$ di intensione e direzione qualunque nello spazio, e posto l'equilibrio la corda si conformerà in un poligono e agli estremi ed agli angoli saranno applicate. Oste m+1 le forze il poligono avrà m lati. Supponiamo che $f', f'' \text{---} f^{(m)}$ rappresentano le tensioni dei lati del poligono. Noi seguiteremo a supporre i punti d'appl.e fissi. ——

Lezione 61.

la 62. Ripetizione

§. 260. Dal veduto al §. 256. resulta che in ciascheduno dei punti del sistema le tensioni dei lati che in lui vanno a terminare e la forza applicatavi debbono farsi equilibrio. Dunque debbono aver luogo le condi. d'equilibrio per le forze applicate ad un punto. Supponiamo adunque tre assi coordinati ortogonali, ed avremo

(351.)

pei diversi punti del sistema le seguenti equazioni . . .

$$1^\circ \begin{cases} F'\theta F'^{\wedge}X = f'\theta f'^{\wedge}X, \\ F'\theta F'^{\wedge}Y = f'\theta f'^{\wedge}Y, \\ F'\theta F'^{\wedge}Z = f'\theta f'^{\wedge}Z. \end{cases}$$

pel 2° punto si avrà

$$2^\circ \begin{cases} f'\theta f'^{\wedge}X + F''\theta F''^{\wedge}X = f''\theta f''^{\wedge}X. \\ f'\theta f'^{\wedge}Y + F''\theta F''^{\wedge}Y = f''\theta f''^{\wedge}Y. \\ f'\theta f'^{\wedge}Z + F''\theta F''^{\wedge}Z = f''\theta f''^{\wedge}Z. \end{cases}$$

$$p^\circ m^\circ \begin{cases} f^{(m-1)}\theta f^{(m-1)\wedge}X + F^{(m)}\theta F^{(m)\wedge}X = f^{(m)}\theta f^{(m)\wedge}X. \\ f^{(m-1)}\theta f^{(m-1)\wedge}X + F^{(m)}\theta F^{(m)\wedge}Y = f^{(m)}\theta f^{(m)\wedge}Y \\ f^{(m-1)}\theta f^{(m-1)\wedge}Z + F^{(m)}\theta F^{(m)\wedge}Z = f^{(m)}\theta f^{(m)\wedge}Z. \end{cases}$$

$$p^\circ (m+1) \begin{cases} f^{(m)}\theta f^{(m)\wedge}X + F^{(m+1)}\theta F^{(m+1)\wedge}X = 0 \\ f^{(m)}\theta f^{(m)\wedge}Y + F^{(m+1)}\theta F^{(m+1)\wedge}Y = 0 \\ f^{(m)}\theta f^{(m)\wedge}Z + F^{(m+1)}\theta F^{(m+1)\wedge}Z = 0. \end{cases}$$

§. 261. Si osservi che nelle equazioni dei diversi ~~[illegible]~~ punti del sistema non entrano per nulla le lunghezze dei lati del poligono, e però si addicono a tutti i poligoni che hanno i lati paralleli ed egualmente tesi.

(352.)

Le quantità contenute in queste equazione sono le T', T'', T''' e gli angoli che queste fanno coi lati del poligono o cogli assi delle t.

Ogni punto da tre equazioni: i punti sono $(m+1)$; dunque il N.° delle equazioni sarà $3(m+1)$. Queste equazioni contengono m tensioni, $(m+1)$ forze, $3m$ angoli delle tensioni cogli assi coordinati; $3(m+1)$ angoli delle forze cogli assi coordinati, cioè

$m+m+1+3m+3(m+1) = 4(2m+1)$.

Oltre le equazioni di ciascun punto, abbiamo anche le equazioni di relazione fra i coseni degl'angoli che ciascuna forza fa cogli assi coordinati. Per la F' si ha

(14) $\theta^{\wedge}F'\hat{X} + \theta^{\wedge}F'\hat{Y} + \theta^{\wedge}F'\hat{Z} = 1$

Siccome le forze sono $m+1$ di numero esse saranno $m+1$ si hanno poi le equazioni di condizione degl'angoli che fa ciascuna tensione cogli assi, in generale si avrà

(15) $\theta^{\wedge}f^{(m)}\hat{X} + \theta^{\wedge}f^{(m)}\hat{Y} + \theta^{\wedge}f^{(m)}\hat{Z} = 1$

e se ne avrà m perchè sono m di numero.

Osservo, che le $m+1$ non contengono se non gli angoli

(353. 9)

che le forze ~~che~~ fanno cogli assi
coord.i e le m equazioni gli an-
goli che fanno le tensioni co-
gli assi coordinati. Quindi si
vede che queste giovar non pos-
so alla determinazione delle
quantità che non sono in esse
contenute. Aggiungendo queste
alle trovate dei punti del
sistema si avrà

$3(m+1)+m+1+m=5m+4$;

ma $4(2m+1) > 5m+4$. —

Dunque in generale convie-
ne che nelle diverse questio-
ni relative al poligono fun-
colare ~~[illegible]~~ che sieno
date tante equazioni quan-
te incognite si debbono deter-
minare.

§. 262. Siano dati gli angoli
$t'^{\wedge}x$, $t'^{\wedge}y$, $t'^{\wedge}z$ — e così
fino a t^{m+1} e sieno date
le tensioni t, t' — fino a $t^{(m)}$
che sono di numero questi,
insieme $3m+m=4m$, alle
equazioni rimarranno $4(m+1)$
quantità incognite. Ma le m equa-
zioni che dipendono dagli ango-
li [illegible] delle tensioni debbo-
no essere verificate da tal
condizione; dunque restano
disponibili $4(m+1)$ equazioni, ed
in tal caso il problema è determi-
nato. —

= §. 263. Prendiamo ora in considerazione il caso in cui uno o amendue i punti estremi del poligono sieno fissi.

Supponiamo primieramente che sia fisso il 1.° punto del poligono, e poniamo t' la tensione del primo lato. Questa tensione debbe eguagliare la risultante di tutte le forze del sistema trasportate parallelam.e a se stesse nell'estremo libero del primo lato.

Avremo dunque per l'equilibrio di questo punto, le seguenti equazioni

(16) $t'\theta t'\hat{X} = P''\theta P''\hat{X} + P'''\theta P'''\hat{X} + \dots + P^{(m+1)}\theta P^{(m+1)}\hat{X}$

(17) $t'\theta t'\hat{Y} = P''\theta P''\hat{Y} + P'''\theta P'''\hat{Y} + \dots + P^{(m+1)}\theta P^{(m+1)}\hat{Y}$,

(18) $t'\theta t'\hat{Z} = P''\theta P''\hat{Z} + P'''\theta P'''\hat{Z} + \dots + P^{(m+1)}\theta P^{(m+1)}\hat{Z}$: equazioni pel 1.° punto nel caso che sia fisso.

Se inoltre sia fisso il punto estremo del poligono avremo le equazioni

(19) $t'\theta t'\hat{X} + t^{(m)}\theta t^{(m)}\hat{X} + P''\theta P''\hat{X} + \dots + P^{(m)}\theta P^{(m)}\hat{X} = 0$

(20) $t'\theta t'\hat{Y} + t^{(m)}\theta t^{(m)}\hat{Y} + P''\theta P''\hat{Y} + \dots + P^{(m)}\theta P^{(m)}\hat{Y} = 0$

(21) $t'\theta t'\hat{Z} + t^{(m)}\theta t^{(m)}\hat{Z} + P''\theta P''\hat{Z} + \dots + P^{(m)}\theta P^{(m)}\hat{Z} = 0$

che si debbono porre invece delle 3 appartenenti all'ultimo punto.

§. 264. Se il poligono sia chiuso, ciascuno dei suoi vertici dovrà essere in equilibrio, dunque avremo per i diversi vertici le seg.ti equazioni d'equilibrio

1° vertice
$$\begin{cases} f^{(m)}\theta f^{(m)}\hat{X} + P'\theta P'\hat{X} = f'\theta f'\hat{X} \\ f^{(m)}\theta f^{(m)}\hat{Y} + P'\theta P'\hat{Y} = f'\theta f'\hat{Y} \\ f^{(m)}\theta f^{(m)}\hat{Z} + P'\theta P'\hat{Z} = f'\theta f'\hat{Z} \end{cases}$$

2° vertice
$$\begin{cases} f'\theta f'\hat{X} + P''\theta P''\hat{X} = f''\theta f''\hat{X} \\ f'\theta f'\hat{Y} + P''\theta P''\hat{Y} = f''\theta f''\hat{Y} \\ f'\theta f'\hat{Z} + P''\theta P''\hat{Z} = f''\theta f''\hat{Z} \end{cases}$$

m° vertice
$$\begin{cases} f^{(m-1)}\theta f^{(m-1)}\hat{X} + P^{(m)}\theta P^{(m)}\hat{X} = f^{(m)}\theta f^{(m)}\hat{X} \\ f^{(m-1)}\theta f^{(m-1)}\hat{Y} + P^{(m)}\theta P^{(m)}\hat{Y} = f^{(m)}\theta f^{(m)}\hat{Y} \\ f^{(m-1)}\theta f^{(m-1)}\hat{Z} + P^{(m)}\theta P^{(m)}\hat{Z} = f^{(m)}\theta f^{(m)}\hat{Z} \end{cases}$$

oltre di ciò si hanno le relazioni fra i coseni come per i poligoni aperti.

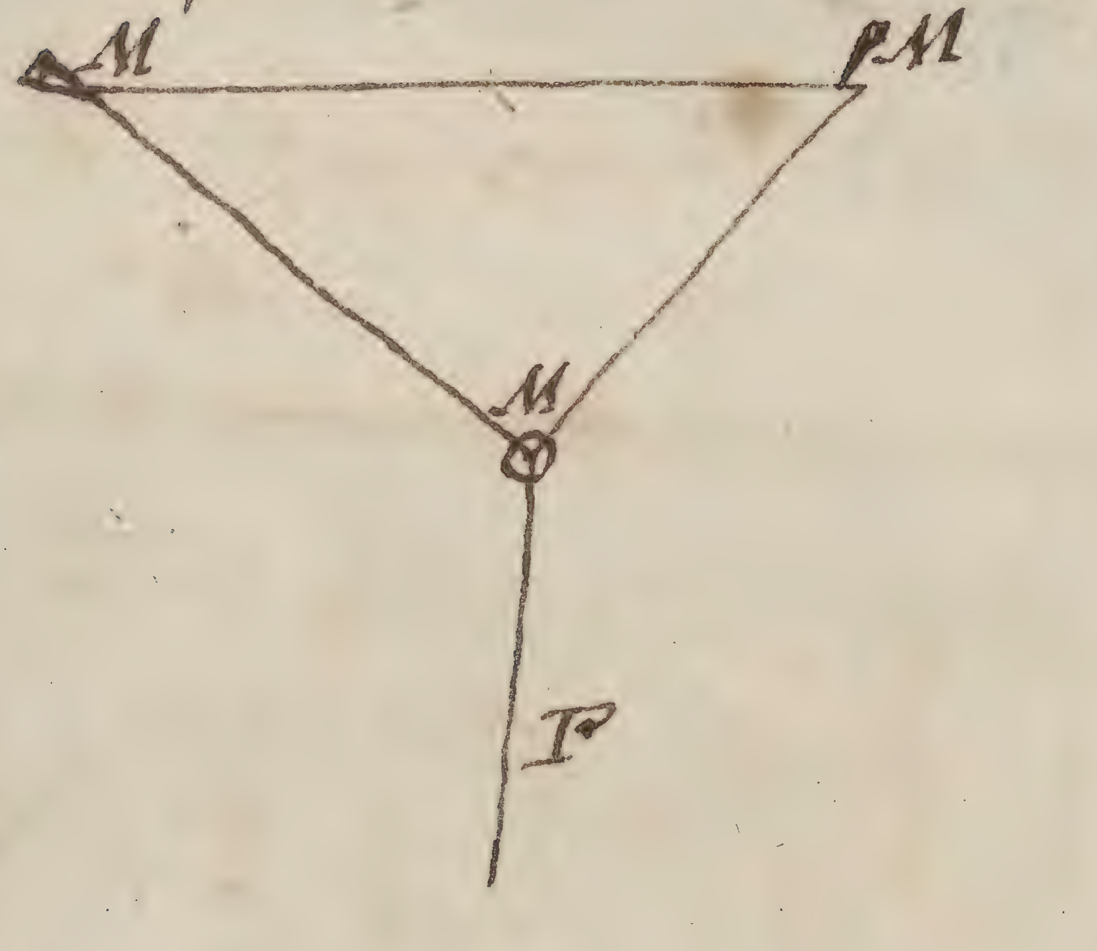
Sommando le equazioni trovate per i vertici si hanno appunto le cond.i per le forze applicate ad un punto affinchè siano in equilibrio come esser debbe

§. 265. Supponiamo che le forze sian in equilibrio mediante d'po.

ligono funicolare sieno applicate mediante anelli scorrevoli al poligono stesso. —

Per cominciare da un caso semplicissimo supponiamo che alla corda $M'MM''$ i cui estremi sono fissi in M', M'' sia applicata un'altra forza ad una fune mediante un anello il quale scorrer possa lungo la prima. —

(Fig. 58)



Siano m, n le parti di corda che nell'equilibrio sono comprese fra i punti fissi e l'anello mobile. Qui dunque sta l'equazione di condizione

(22) $m+n=l$; N. 197, e però la

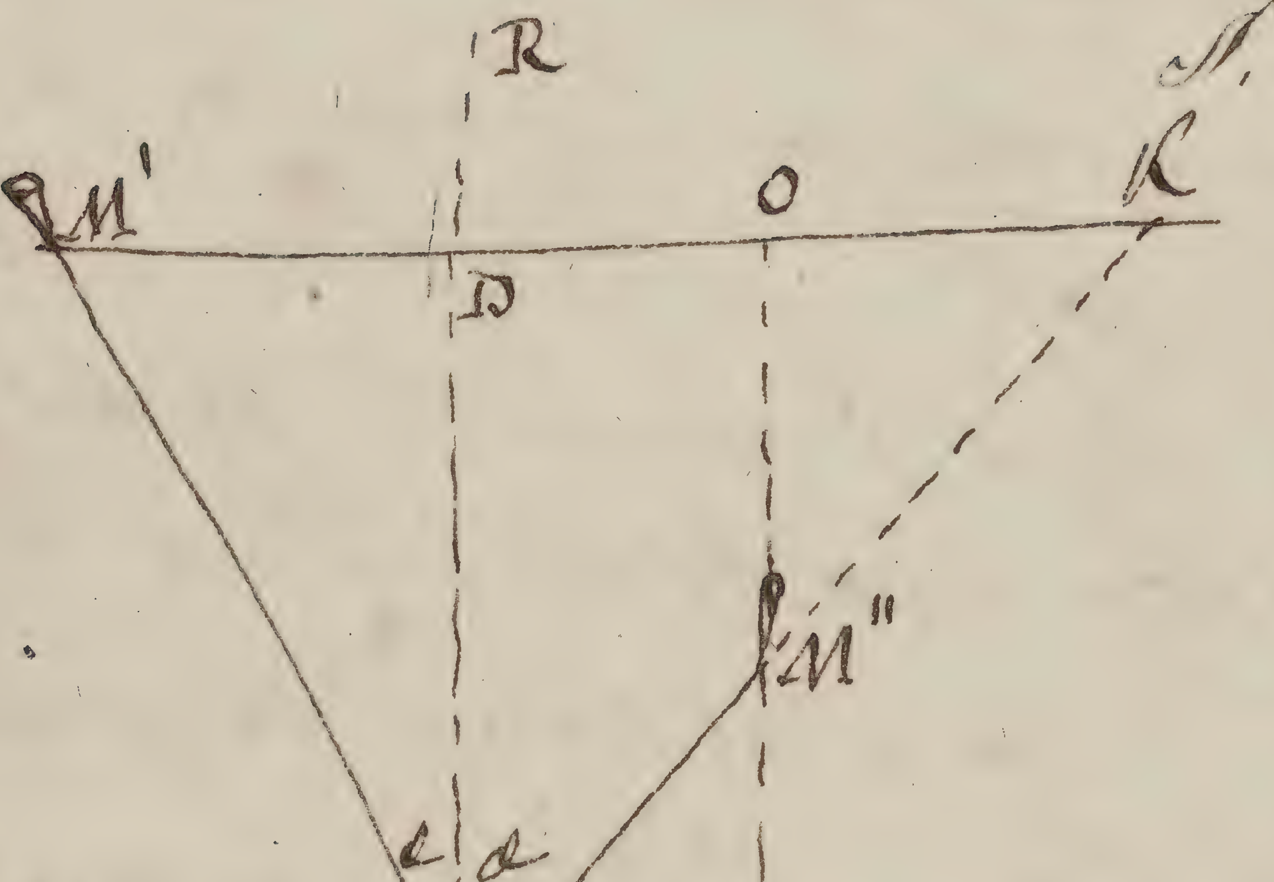
(23) $f(m,n)=m+n$, le prime derivate sono

$f'(m)=f'(n)=1$, che sono le componenti lungo le porzioni di corda, e perciò nell'equilibrio tali componenti sono eguali; ma esse sono $P\cos P\hat{}MM'$, $P\cos P\hat{}MM''$; dunque nell'equilibrio esser deve $P\cos P\hat{}MM' = P\cos P\hat{}MM''$, e però la

(24) $\cos P\hat{}MM' = \cos P\hat{}MM''$: d'onde apparisce che la direzione della forza P nell'equilibrio divide per mezzo l'angolo fatto dai due tratti di fune MM' MM''. Conservando sempre

~~sullo~~ lo stesso piano la direzio-
ne della P si moverà su di
un'elisse, ~~che~~ e questa ruotando intor-
no all'asse maggiore MM' di
cui M, M' sono i due fuochi
genera una sferoide sulla
quale nell'equilibrio esser
debbe il punto M se questo
non si mantiene nello stes-
so piano.

S. 206. Data la lunghezza di una
corda i cui capi sieno attaccati
immobilmente in M', M'' situa-
ti comunque rispetto ad un
orizzontale, trovare la posi-
zione di un peso P attaccato mediante
una fune ad un anello scorso-
jo.



(Fig. 59.)

Sia M' il punto più alto
da cui si protragga l'oriz-
zontale M'K; sia MR la di-
rezione verticale del peso, e
si prolunghi MM'' finchè in-
contri in K l'orizzontale.
La situazione della figura
sarà quella dell'equilibrio.
Per il dimostrato al prec.
si ha l'angolo M'MD = DMK
= MHM'' = MM''H; posto MH pro-
lungam. di M'M e la M''H ver-
ticale. Ma per l'equilibrio
esser dee M'MD = DMM'' dunque
sarà il triangolo MHM'' isoscele
laonde M'H = M'M + MM''.

Nel triangolo rettangolo $M'OH$ è nota l'ipotenusa $M'H$; è noto $M'O$, e quindi per la trigonometria sarà noto l'angolo $M'HO$; ma $M'HO = M'MD = M''MD$; dunque è noto $M'MD$. Essendo le tensioni delle due porzioni di corda comprese fra l'anello e il punto fisso eguali alle componenti della P lungo le porzioni stesse ne conseguita essere pure eguali le tensioni delle due porzioni di corda. Appresso il dettato la posizione del punto M può essere determinata da una facile costruzione. Difatti protratta l'orizzontale $M'K$ e la verticale OH si faccia centro in M' e colla lunghezza della fune si descriva un circolo che taglierà in H la OH; di poi fatto l'angolo $HM''M = MHM''$ e protratta la $M''M$ sarà M il punto cercato.

§. 267. Sia una corda $M'MM''$ (Fig. 68) i cui capi siano applicate delle forze P, P', P'' mediante anella scorrevoli lungo la corda stessa. Posto $m = MM'$, $n = MM''$, $p = M''K$, si avrà l'equazione di condizione

(25.) $f(m, n, p) = m + n + p = C$, e però

$f'(m) = 1$, $f'(n) = 1$, $f'(p) = 1$;

(359.)

Dal che consegue che le componenti delle forze P, P', P'' lungo le tre porzioni di corda comprese fra le anella essendo tra se eguali per l'equilibrio, e però egualmente tese nell'equilibrio. Ciascuna forza divide per mezzo l'angolo a cui è applicata: costruendo ad ungo i tre rombi, che sieno equilateri, le loro diagonali rappresentano in intensione le P, P', P''. ———

§. 258. Se ad una corda i cui capi sieno uniti si applicano quante forze si vogliono mediante anelle scorrevoli, le forze saranno tante quante le mutue distanze m, n, p, q delle anella, e si avrà l'equazione di cond.

(26) $f(m, n, p, \ldots \frac{q}{0}) = m + n + p + \ldots = C$, e però

$f'(m) = 1$, $f'(n) = 1$, $f'(p) = 1$ [illegible]

ciò che mette davanti che nell'equilibrio i tratti di fune compresi fra un'anello e l'altro sono egualmente tesi, e che ciascuna forza partisce per metà l'angolo a cui è applicata. ———

Presentata per T la tensione comune dei tratti di cor

e da w', w'', w''' — Ho gli angoli che ciascuna direzione della forza fa coi lati del poligono, e che due a due sono eguali, gli angoli verranno presentati da $2w'$, $2w''$ &c. e però si avrà

$P' : T :: \theta 2w' : \theta w'$; e però la

(27) $P' = \frac{T\theta 2w'}{\theta w'} = 2T\theta w'$. Troverebbesi della stessa guisa la

(28) $P'' = 2T\theta w''$

(29) $P''' = 2T\theta w'''$

Il che mette davanti essere le P', P'', P''' &c. proporzionali ai coseni della metà degli angoli del poligono ai cui vertici sono applicate.

Se vi fossero nei poligoni dei lati che avessero fissi i due estremi questi non entrerebbero nelle condi. avvegnacchè per loro non v'ha communicazione di forze

Lezione 63.

Capitolo XX.

Della curva funicolare

§. 269. Dicesi funicolare quella linea nella quale si conforma un filo flessibile in equilibrio sollecitato in ciascun punto da forze in funzione delle coordinate le quali supporremo sullo stesso piano, e su questo gli assi.

Per ciò, che abbiamo detto si ha la

(1) $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, essendo s un archetto infinitamente piccolo. Sia M un punto della curva, ed (x,y) un altro punto della curva stessa a cui sia applicata la forza

$P=f(x,y)$; dipendendo dalla funzione, la y considerare si deve funzione di x e però

(2) $P=\varphi(x)$; anche l'arco si può considerare funzione di x, e però porre

(3) $s=\varphi_1(x)$ posto, che x diventi $x+dx$, si avrà posto che l'aumento di P sia dP, si avrà

$$P+dP=\varphi(x)+\varphi'(x)dx+\frac{1}{2}\varphi''(x)dx^2 \text{ ec}$$

e così si ha $s+ds=\varphi_1(x)+\varphi_1'(x)dx+\frac{1}{2}\varphi_1''(x)dx^2+$ ec ~~essendo~~

362.

e però si hanno le

(4) $dT = \varphi'(x)dx + \frac{1}{2}\varphi''(x)dx^2 + \&c.$

(5) $ds = \varphi_1'(x)dx + \frac{1}{2}\varphi_1''(x)dx^2 + \&c.$

essendo dx indeterm.e picco-la tale si potrà considerare la diff.za fra T, e T + dT: la forza T è applicata al punto (x, y) cioè ove termina l'arco S; sarà dunque T + dT la forza applicata al punto ove termina l'arco S + dS: dunque al principio ed alla fine dell'arco elementare ds la T si può considerare sempre la stessa in intensione ed in direzione: dunque si può considerare che ad ogni punto dell'archetto ds sia applicata la forza T. Dunque tutte le forze applicate sull'archetto ds verranno presentate da Tds. ———

Siano X', Y' le componenti della T nella direzione dei due assi, e l'archetto ds nella direzione dei due assi verrà sollecitato dalle forze X'ds, Y'ds: sia T la tensione dell'ar-

chetto ds, la quale per l'equilibrio uguagliar dee la risultante di tutte le forze dal punto M al punto (x,y).
Si osservi che la tensione ha la medesima direzione del latercolo del poligono, cioè della tangente nel punto (x,y).
Prendendo adunque il latercolo invece dell'archetto elementare, le coord.e estreme dei punti, x, y, saranno $x+dx$, $y+dy$, e però la diff.za sarà dx per l'una e dy per l'altra dunque ss l'introd.e il coseno che
averà che la tensione T fa coll'asse delle x,
sarà $\frac{dx}{ds}$; così $\frac{dy}{ds}$ sarà il coseno che la tensione T fa coll'asse delle y; e però le componenti di T lungo questi due assi saranno

$T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$; per l'equilibrio si averà

(6) $\int X'ds + T\frac{dx}{ds} = 0$,

(7) $\int Y'ds + T\frac{dy}{ds} = 0$. Dalla

(6) si ha $\frac{T}{ds} = -\frac{\int X'ds}{dx}$,

fattane sostituzione nella

3624.9

(7) si ha

$\int Y' ds - \frac{dy}{dx} \int X' ds = 0$; ovvero

la

(8) $dy \int X' ds - dx \int Y' ds = 0$; ed è questa l'equazione della curva funicolare.

§. 270. Trasportando i secondi termini della (6) e (7) nel 2.° membro, poi innalzando a quadrato, e sommando si avrà

$\left(\int X' ds\right)^2 + \left(\int Y' ds\right)^2 = T^2 \left(\frac{dx^2 + dy^2}{ds^2}\right)$

$= T^2$; ma $ds^2 = dx^2 + dy^2$, dunque $= T^2$; e però la

(9.) $T = \sqrt{\left(\int X' ds\right)^2 + \left(\int Y' ds\right)^2}$; e ciò quando le forze X', Y' son date in funzione di s.

§. 271. Ricordando che ds è costante, i differenziali della (6) e (7) danno le

(10) $X' ds + \frac{dT\, dx}{ds} + \frac{T\, d^2x}{ds} = 0$;

(11) $Y' ds + \frac{dT\, dy}{ds} + \frac{T\, d^2y}{ds} = 0$;

moltiplicata la (10) per dx e la (11) per dy la somma dei prodotti sarà

$X' ds\, dx + Y' ds\, dy + \frac{dT}{ds}(dx^2 + dy^2)$

$+ \frac{T}{ds}(dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y) = 0$

Ma $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; e ds costan-
te, dunque sarà zero il su
differenziale: avremo dunq
$dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y = 0$; dunq
sost.° nella trovata antecedᵗᵉ
si ha la

(12) $X'dx + Y'dy + dT = 0$, equin-
di la

(13) $T = C - \int (X'dx + Y'dy)$. —

§. 272. Se le forze X', Y' siano
date in funzione di x e di
y, la (13) da la tensione
almeno per approssimazion
Se poi le X', Y' siano in fun-
zione di s, la (9) darà la
tensione.

§. 273. Se uno degli estremi si
fisso in un punto, egli è
chiaro che fra le forze
comprese fra questo pun
to e l'(x, y) si dovrebbe
comprendere la forza ap
plicata all'estremo ed ai
al punto fisso che fa l..
zione di forza. Questa
forza che a leiᵈ si debbe
porre per avere il siste
ma libero debbe esser
la risultante di tutte le
altre quindi passare
per l'estremo id ior toc..
re la curva funicolare.

[366]

§. 274. Noi abbiamo supposto che le forze che agiscono sul filo sieno sullo stesso piano, ma nulla di più facile ov'i' ne sieno anche in diversi piani. Si scomponga la F in tre X', Y', Z' dirette secondo tre assi ortogonali, e si avrà $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, facendo ragionamenti analoghi ai precedenti si avrà che le componenti che animano il particola secondo i tre assi ortogonali, saranno X'ds, Y'ds, Z'ds; posta T la tensione come preced. ed osservando che

$(x'-x'') = dx$, $= dy$, $= dz$ si avrà per l'Introd. che i coseni degli angoli che la tangente il particola fa coi tre assi sono

$\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, per l'equilibrio si avranno le seguenti equazioni

(15) $\int X'ds + T\frac{dx}{ds} = 0$,

(16) $\int Y'ds + T\frac{dy}{ds} = 0$,

(17) $\int Z'ds + T\frac{dz}{ds} = 0$; per mezzo delle (15) e (16) poi delle (15) e (17) e poscia (16) e (17)

(367.)

eliminando $\frac{T}{ds}$ si avranno le infrascritte equazioni

(18) $dy\int X'ds - dx\int Y'ds = 0$

(19) $dz\int X'ds - dx\int Z'ds = 0$,

(20) $dz\int Y'ds - dy\int Z'ds = 0$; due delle quali rappresentano la curva funicolare a doppia curvatura.

§. 275. Dalle (15) (16) e (17) si ha

$$\int X'ds = -\frac{T\,dx}{ds}$$

$$\int Y'ds = -\frac{T\,dy}{ds},$$

$$\int Z'ds = -\frac{T\,dz}{ds},$$ e però innalzando a quadrato e sommando si avrà

$$\left(\int X'ds\right)^2 + \left(\int Y'ds\right)^2 + \left(\int Z'ds\right)^2 = \frac{T^2(dx^2+dy^2+dz^2)}{ds^2} = T^2,$$ e quindi la

(21) $$T = \sqrt{\left(\int X'ds\right)^2 + \left(\int Y'ds\right)^2 + \left(\int Z'ds\right)^2}$$

§. 276. Differenziando le (15) (16) e (17) nella ipotesi di ds costante si ha

(22) $$X'ds + \frac{dT\,dx}{ds} + \frac{T\,d^2x}{ds} = 0,$$

(23) $$Y'ds + \frac{dT\,dy}{ds} + \frac{T\,d^2y}{ds} = 0,$$

(24) $$Z'ds + \frac{dT\,dz}{ds} + \frac{T\,d^2z}{ds} = 0.$$

Se moltiplicheremo queste rispett.^e per dx, dy, dz, la somma dei prodotti verrà presentata dalla

(25) $$X'ds\,dx + Y'ds\,dy + Z'ds\,dz + \frac{dT(dx^2+dy^2+dz^2)}{ds} + \frac{T}{ds}(dx.d^2x + dy\,d^2y + dz.d^2z) = 0;$$ ma $ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, che per ipotesi è costante, dunque il suo diff.^le è zero, per cui la (25) riducesi alla

(369.9)

(26) $X'dx + Y'dy + Z'dz + dT = 0$,

però la

(27) $T = G - \int (X'dx + Y'dy + Z'dz$

che serve a determinare T,

allorchè X', Y', Z' sono funz

ni dell'arco S.

§. 277. Andiamo a considerare qual

caso particolare, e supponia

mo primamente che tutte

le forze che sollecitano il

filo siano normali alla

curva e sul med.° piano.

Sia N la normale al punto

(x, y) che supporremo essere

il punto M (fig. 61) ed MN

rappresenti la sua direz.

prendiamo un'archetto MM'

e dai punti M, M' si prolun

gano le MX', M'Y' parallele

agli assi ortogonali, e si

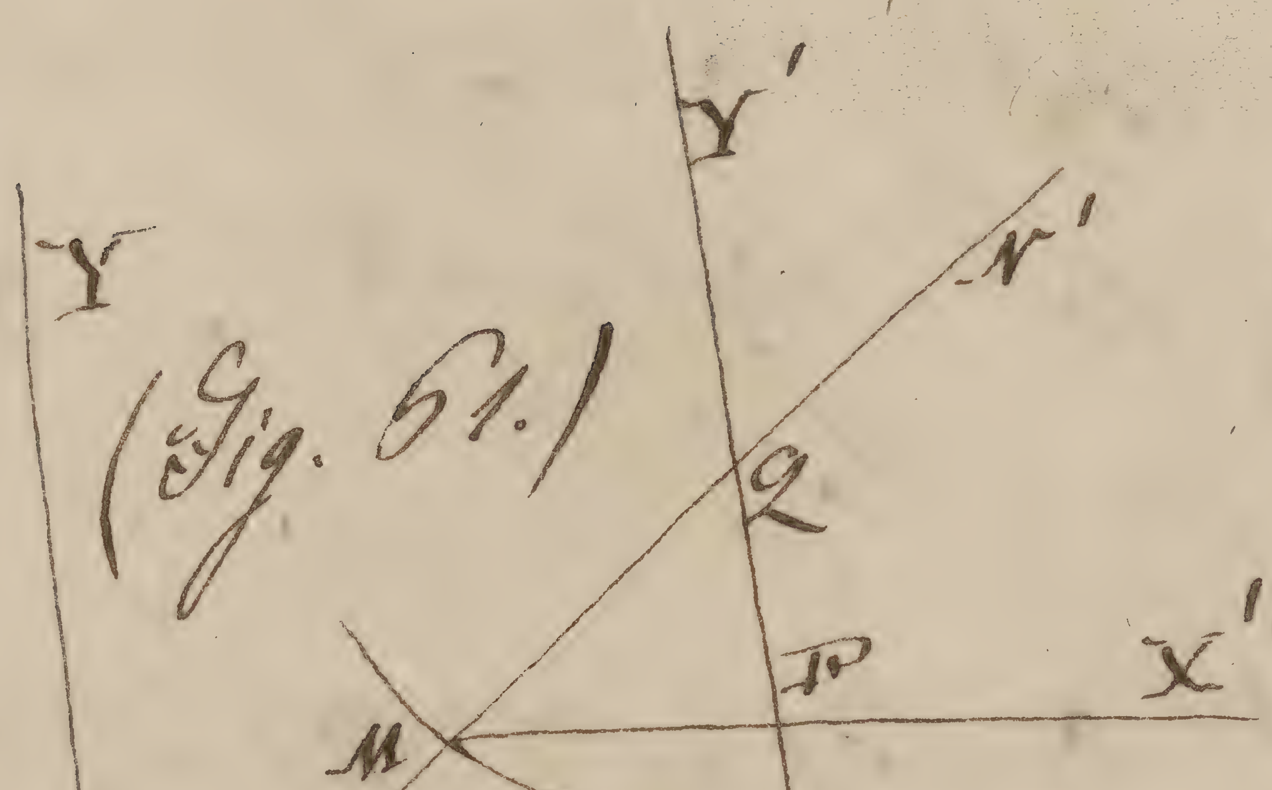
lunghi la normale ad

incontrare in Q l'asse

l'angolo NMX' è l'angolo

che fa la normale coll'

asse delle X, e si avrà



(Fig. 61.)

$\theta NMP = \theta(90° + MM'P) = +\theta M$

$= -\theta MM'P = -\frac{dy}{ds}$.

l'angolo che fa la normale

coll'asse delle y è MQP

$= 90° - MM'Q$, e però $\theta MQP =$

$\theta(90° - MM'Q) = \theta M'MP = \frac{dx}{ds}$

Le componenti adunque della forza normale secondo gli assi coordinati delle x, e delle y sono rispet.te $-N.\frac{dy}{ds}$, $N.\frac{dx}{ds}$; onde, le forze sollecitanti l'archetto indeterminatamente piccolo nelle medesime direzioni, saranno $-Ndy$, e Ndx. Ponendo adunque nella (8) questi valori si ha

(28) $X'ds = -Ndy$

(29) $Y'ds = Ndx$, avremo l'equazione della curva funicolare nella fatta supposizione che sarà

(30) $dy\int Ndy - dx\int Ndx = 0$. —

§.278. Dalle (28) e (29) si ha

$X' = -\frac{Ndy}{ds}$,

$Y' = \frac{Ndx}{ds}$, che sostituiti nella (12) si ha

$-\frac{Ndxdy}{ds} + \frac{Ndxdy}{ds} + dT = 0$, onde la

(31) $dT = 0$, e quindi la

(32) $T = C$. Dunque si debbe conchiudere che un filo incurvato da forze normali, è tutto egualmente teso. —

§.279. Poniamo l'angolo $M'MP = \varphi$ angolo che fa l'elemento ds coll'asse delle x, e spaccià

(371.)

(33) $dx = \theta q ds$,

(34) $dy = \theta q ds$; se ora nelle (6) e (7) si mettano i valori di $X'ds$, $Y'ds$, dati dalle (28) e (29) si avrà

(35) $-\int N dy + \frac{T dx}{ds} = 0$;

(36) $\int N dx + \frac{T dy}{ds} = 0$; messi i valori di dx e di dy delle (33) e (34) avvengono le

(37) $-\int N \theta q ds + T \theta q = 0$

(38) $\int N \theta q ds + T \theta q = 0$. Prendendo i differenziali di queste due considerando T costante si ha

$-N \theta q ds - T \theta q dq = 0$, e

$N \theta q ds + T \theta q dq = 0$. di l'una che l'altra di queste due equazioni danno la

(39) $N ds + T dq = 0$, che differisce al segno da quella data dal Venturoli.

Lezione 64.

la 65. Ripet.

§. 280. Sia R il raggio d'osculo, e s l'arco di curva e si avrà pel C. S. la

(40) $R = \frac{ds^3}{dx d^2y - dy d^2x}$; dalle equazioni (33) e (34) prendendone i differenziali nella considerazione di ds costante, si avrà

(41) $d^2x = -\theta q ds . dq = -dy dq$ pel la (34), e

(372.)

(42) $d^2y = \theta q\, ds\, dq = dx\, dq$ per la (33). Fatta sostituzione nella (40) che dà il valore del raggio d'osculo si avrà

(43) $R = \dfrac{ds^3}{dx^2 dq + dy^2 dq} = \dfrac{ds^3}{ds^2 \cdot dq} = \dfrac{ds}{dq}$, e però

(44) $ds = R\, dq$ che sostituito nella (39) ne viene

$NR\, dq + T\, dq = 0$, e quindi la

(45) $N = -\dfrac{T}{R}$; potendo avere R il doppio valore, si avrà

(46) $N = \dfrac{T}{R}$ che mette davanti essere la forza normale applicata alla curva reciprocamente proporzionale al raggio d'osculo di lei. — E reciprocamente, se ciò sia la forza sarà normale.

§. 281. Se una corda sia circondata ad una curva resistente e nelle sue estremità sia tirata da due forze queste dovranno essere eguali se vi sarà l'equilibrio. La corda adunque in tutti i punti esser debbe egualmente tesa o la pressione della corda su ciascun punto della curva esser

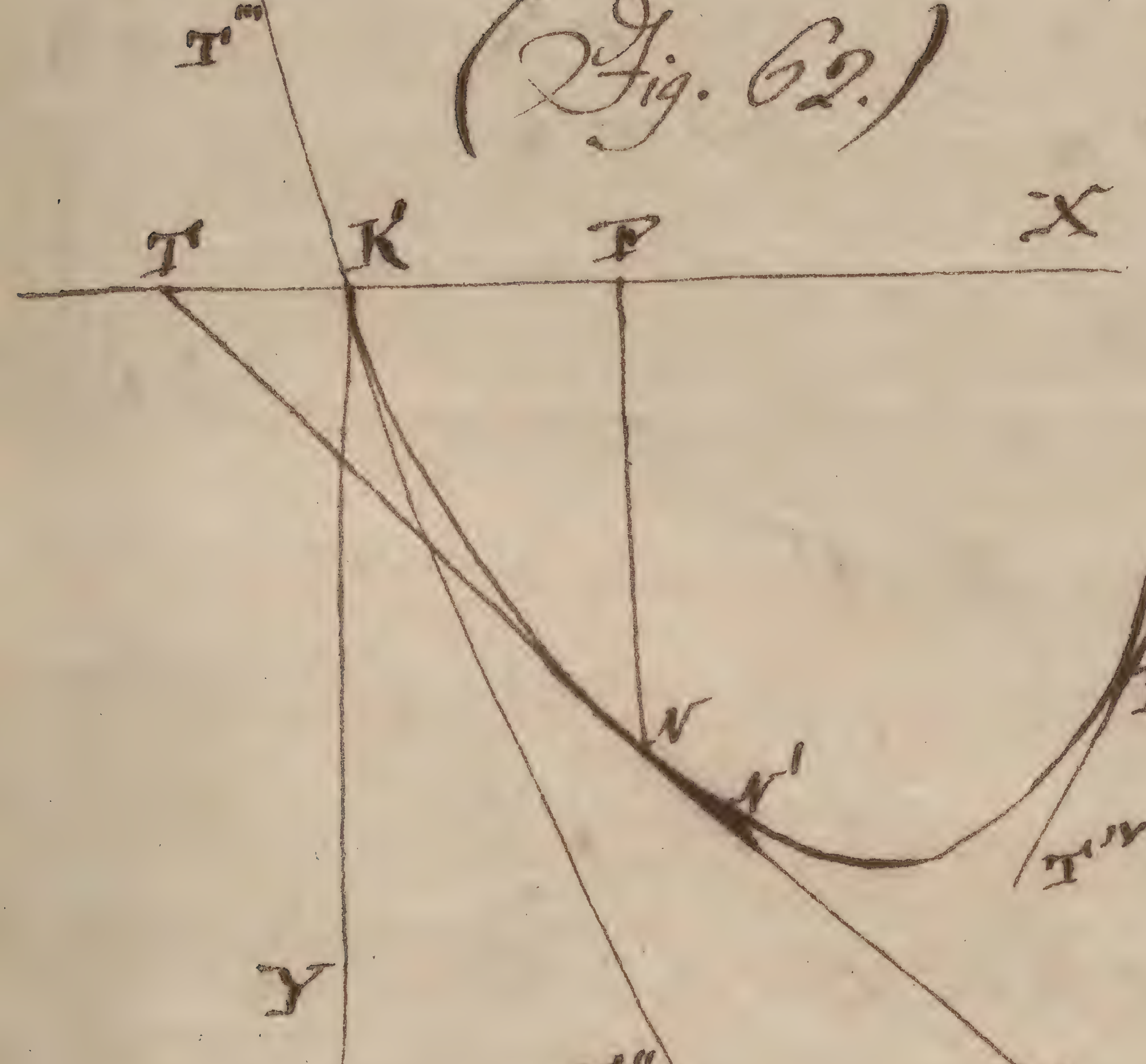
(373.)

deve normale ad essa, e l'equi-
librio sussiste pure se a vici[nanza]
della curva si pongono forze
opposte. Ma pel dimostra-
to le forze sono in ragion[e]
reciproca dei raggi d'oscul[o]
dunque le pressioni saran[no]
ac in questa ragione. —

§. 282. Andiamo ad esaminare un altro
caso particolare della curva
funicolare, ed è: gli estremi
di una corda sono attacca[ti]
a due punti fissi e ciascun
punto della fune è anima-
to dalla gravità; le forze
sono tutte ~~[illegible]~~ verticali e la cur-
va prende il nome di cate-
naria. Se conducasi un
piano verticale che passi
per i due punti fissi ai
quali è attaccata immo-
bilmente la corda, dico che
su tal piano sarà situata
tutta la catenaria. Per far
ciò vedere surroghiamo alla
curva un poligono di un
N.^o indefinit.^e grande di
lati indefinit.^e piccoli.
Si osservi che in ciascun
vertice la forza di gravità
e le due tensioni per l'equi-
librio esser debbono sul me-
desimo piano; il piano

dunque passa per la vertica-
le e per i due lati; così per
il 2.° e 3.° lato il piano passa
per essi e per la verticale
e però si confonde col 1.°
piano e però la catenaria
è nel piano verticale —

(Fig. 62.)



§. 233. Si osservi la (fig. 62.) e sia una corda, o una catena omogenea sia attaccata ai punti fissi K, K'; e questa corda o catena sia perfettamente flessibile. Sia p il peso di una porzione di catena che cominci in K e termini in N, e si ponga $KN = s$, e si avrà

(47) $p = ks$; il coefficiente k è costante ed è l'unità di misura impieg. Per K si protragga nel piano della catenaria le KX, KY, la 1.a orizzontale e la 2.a verticale e siano gli assi coordi. ai quali si riferisce la catenaria. Considerata la catenaria come un poligono di lati indeterminatamente piccoli, supponiamo che all'estremità N dell'arco s, e di cui $KP = x$, $NP = y$, sono le coordinate, sia T la tensione. ——

(375.)

La tensione avrà la direzione della tangente NT' al punto; Le componenti di T secondo gli assi delle x, ed y, sono $T\theta T'X$, $T\theta T'Y = T\theta T'X$, e però si avrà

$$\frac{T\theta T'Y}{T\theta T'X} = \frac{T\theta T'X}{T\theta T'X} = \sigma T X =$$
$$= \frac{dy}{dx}$$: poniamo che ai punti, K, K' sieno applicate le forze A, A', le quali forze tengano la vece delle attuali resistenze K, K'; appresso l'introduzione di queste due forze si può supporre il sistema affatto libero, nel qual caso si è veduto, che scomponendo le forze dal principio del poligono fino ad un punto qualunque secondo gli assi delle x, e delle y, e scomponendo similmente la tensione del lato susseguente che fa principio dall'angolo, la somma delle componenti secondo gli assi eguaglia? debbe la tensione del lato secondo gli assi stessi. Nel nostro caso le forze sono verticali, e però le

(376.9)

componenti secondo l'asse delle X sono zero e secondo quello delle Y sono le forze stesse, dunque detta T' la tensione che viene da poi il punto (x, y) ed osservando che la somma di tutte le forze applicate all'arco KN che abbiamo chiamate p, è $= h.s$, si avranno le due equazioni

(48) $A\theta A\hat{}X = T\theta T\hat{}X$,

(49) $A\theta A\hat{}Y + h.s = T\theta T\hat{}Y$, onde avremo

$$\frac{A\theta A\hat{}Y + h.s}{A\theta A\hat{}X} = \frac{T\theta T\hat{}Y}{T\theta T\hat{}X} = \frac{T\theta T\hat{}X}{T\theta T\hat{}X}$$

$= y' = \frac{dy}{dx}$: Poniamo l'angolo $A\hat{}X = \delta$, $A\hat{}Y = \delta'$ e si avrà

(50) $A\theta\delta.dy - A\theta\delta' dx = h.s.dx$.

Sia KT'' la tangente della catenaria nel punto K, e poniamo l'angolo $XKT'' = w$, e però $YKT'' = 90^\circ - w$. — La forza A che si è sostituita alla resistenza agisce nel prolungamento della tangente $T''K$, e però si avrà $A\hat{}X = 180^\circ - w$, e quindi $\theta\delta = -\theta w$: inoltre $A\hat{}Y = 90^\circ + w$, e per conseg. $\theta\delta' = -\theta w$. Fatta sostituzione di questi valori nella (50) si ha la

(51) $A\theta w dx - A\theta w dy = h s dx$.

equazione della catenaria in cui A, A' sono due costanti incognite che ora determineremo. —

Introducendo l'angolo w, alle equazioni (48) (49) avremo le

(48) $A\theta A' x = T\theta T' x$

(49) $A\theta A' y + hs = T\theta T' y$

(52) $T\theta T' x = -A\theta w$

(53) $T\theta T' y = hs - A\theta w$; innalzando a quad: e sommando si ha

$T^2(\theta^2 T' x + \theta^2 T' y) = A^2\theta^2 w + h^2 s^2 - 2hsA\theta w + A^2\theta^2 w$, ossia avremo la

(54) $T^2 = A^2 - 2Ahs\theta w + h^2 s^2$; alla quale posto $s=0$, ne nasce $T = A$. Vedesi dunque che la costante A esprime la tensione al punto k essendo in esso nullo l'arco, vale a dire esprime la pressione che sopporta k. —

Dalla (54) poi si vede che la tensione varia da un punto all'altro variando s.

§. 284. Determiniamo in qual punto della catenaria abbia luogo la minima tensione. —

Perciò si dovrà determinare la s uguagliando allo zero la derivata di T relativa alla s stessa. —

Perciò dalla (54) si ha

(55) $T=\sqrt{A^2-2Ab\,S\,\theta w+b^2S^2}$; essendo T funzione di S; A costante, si avrà la derivata data dalla

(56) $\frac{dT}{dS}=\frac{b^2S-Ab\,\theta w}{\sqrt{A^2-2Ab\,S\,\theta w+b^2S^2}}$; Dunque pel massimo o pel minimo esser debbe

(57) $b^2S-Ab\,\theta w=0$, da cui la

(58) $S=\frac{A\theta w}{b}$; messo questo valore nella (55), si ha la

(59) $T=A\theta w$, valore che può corrispondere a massimo o minimo. Per ciò vedere si deve prendere la derivata 1.ª della (56) tenendo a mente che debbe aver luogo la (57) si avrà

$\frac{d^2T}{dS^2}=\frac{b^2}{A\theta w}$; dipendentemente dalla (59). Questo valore è positivo poichè w non può essere $>180°$ dunque per questo valore di S si ha la minima tensione. — Se nella (51) si mette il valore di S dato dalla (56) avremo

(51) $A\theta w\,dx-A\theta w\,dy=bS\,dx$,

$A\theta w\,dx-A\theta w\,dy=A\theta w\,dx$, ossia $\left(A\theta w-A\theta w\right)\frac{dy}{dx}=A\theta w$; ossia la

(60) $\frac{dy}{dx}=0$, la quale ci dice che la tangente dev'essere parallela all'asse delle x, cioè che la minima tension

(379.)

succede nel punto infimo.

1.285. Considerate s ed y come funzioni della prima variabile indipend.^te il differenziale della (51) è

(51) $A\theta\omega dx - A\theta\omega dy = hs dx$

$-A\theta\omega d^2y = h ds dx$;

ma $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; dunque si avrà

$-A\theta\omega d^2y = h dx \sqrt{dx^2+dy^2}$;

moltiplicando i due membri di quest'equazione per $\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, si ha

$-A\theta\omega . \frac{dy d^2y}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = -A\theta\omega d\sqrt{dx^2+dy^2}$

(poichè dx costante) $= h dy dx$, onde integrando avremo la

(61) $-A\theta\omega \sqrt{dx^2+dy^2} = hy dx + C dx$.

C è la costante arbitraria. A determinare C si ha $s = 0$, quando $y = 0$, ed in allora si ha $\frac{dy}{dx} = \sigma\omega$: fatta sostituzione di questi valori nella (61) si ha

$-A\theta\omega \sqrt{1+\sigma^2\omega} = C$, ovvero

(62) $C = -A$, per cui la (61) si muta nella

; poichè $\theta\omega\sqrt{1+\sigma^2\omega} = \sqrt{(1+\sigma^2\omega)\theta^2\omega} = \sqrt{\left(1+\frac{\sigma^2\omega}{\theta^2\omega}\right)\theta^2\omega} = \sqrt{\frac{(\theta^2\omega+\sigma^2\omega)\theta^2\omega}{\theta^2\omega}} = \sqrt{\theta^2\omega+\sigma^2\omega} = 1$.

(63) $A\theta\omega\sqrt{dx^2+dy^2} = (A - hy)dx$,

ovveramente nella

(64) $A\theta\omega\sqrt{1+y'^2} = A - hy$, dalla quale posto $y' = 0$, avremo il valore di y dato dalla

(65) $y = \frac{A(1-\theta\omega)}{h}$ che appartie

(380.)

ne all'infimo punto della catenaria.

§. 286. Ponendo la (51) sotto forma derivata avremo la

(66) $A\theta\omega - A\theta\omega y' = bs$, da cui si ottiene la

(67) $y'^2 = \frac{(A\theta\omega - bs)^2}{A^2\theta^2\omega}$: la (64) innalzata a quadrato da la

(68) $A^2\theta^2\omega(1+y'^2) = (A-by)^2$; nella quale sostituito il valore di y'^2 dato dalla (67) si ottiene

(69) $A\theta\theta - 2Abs\theta\omega + b^2s^2 = (A-by)^2$, e di conseguenza

(70) $s = \frac{A\theta\omega}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{(A-by)^2 - A^2\theta^2\omega}$;

la quale ci mostra che la catenaria è rettificabile poichè ci da il valore dell'arco s. Ponendo nella (70) il valore di y dato dalla (65) si troverà il valore di s dato dalla (68) come esser debbe. —

Vedesi adunque che essendo $s = a$, quando $y = 0$, ed al punto più basso nel quale il radicale contenuto nella (70) è nullo poichè sussiste la (68) prendere si dee il segno inferiore da $y = 0$, fino a tanto che il radicale diventi nullo, la qual cosa come si è dimostrato ha luogo nel punto infimo della catenaria, oltre questo punto si deve prendere il superiore, ed è facile

(381.9)

il cui ordine supponendo che i due punti K e L' si trovino nell' asse delle x, e però si avrà in essi $y=0$, e nel punto infimo si deve prendere il segno inferiore fino al punto infimo. — — —

Lezione 66.

§. 287. Innalzando a quadrato la (63) si ha

$$A^2\theta^2\omega^2(dx^2+dy^2)=(A-hy)^2dx^2;$$

d'onde avremo la

(71) $$dx=\pm\frac{A\theta\omega\,dy}{\sqrt{(A-hy)^2-A^2\theta^2\omega^2}}.$$

Osserviamo, che x cresce sempre e però si dovrà prendere il segno superiore finchè aumenta la y cioè finchè dy è positivo cioè da K (fig. 62) fino al punto infimo e dopo si prenderà il segno inferiore.

Ad integrare la (71) poniamo

$A-hy=z$, e si avrà

$dy=-\frac{dz}{h}$, il perchè la (71) mutasi nella

(72) $$dx=\frac{A\theta\omega}{h}\cdot\pm\frac{dz}{\sqrt{z^2-A^2\theta^2\omega^2}};$$ si faccia $\mp\sqrt{z^2-A^2\theta^2\omega^2}=(z+A\theta\omega)$ e si avrà la

(73) $$z^2-A^2\theta^2\omega^2=(z+A\theta\omega)^2u^2,$$ e quindi

$$z-A\theta\omega=(z+A\theta\omega)u^2,$$ onde

(74) $$z=A\theta\omega\left(\frac{1+u^2}{1-u^2}\right),$$

$dz = \frac{2A\theta\omega . u(1+u^2) + 2A\theta\omega .}{(1-u^2)^2} \times$

$\times \frac{(1+u^2)u}{} \times du = \frac{4A\theta\omega\, u du}{(1-u^2)^2}$, e quindi

$\pm \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - A^2\theta^2\omega^2}} = \int \frac{4A\theta\omega . u du}{(1-u^2)^2}$:

$(z + A\theta\omega)u = \int \frac{4A\theta\omega . u du}{(1-u^2)^2}$:

$\left(A\theta\omega \frac{(1+u^2)}{(1-u^2)} + A\theta\omega\right)u =$

$2\int \frac{du}{1-u^2} = \int \frac{du}{1-u} + \int \frac{du}{1+u} =$

$\log C + \log\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = C + \log.$

$$\frac{1 \mp \frac{\sqrt{z^2 - A^2\theta^2\omega^2}}{z + A\theta\omega}}{1 \pm \frac{\sqrt{z^2 - A^2\theta^2\omega^2}}{z + A\theta\omega}} = C + \log . \frac{z + A\theta\omega}{z + A\theta\omega} \times$$

$$\times \frac{\mp \sqrt{z^2 - A^2\theta^2\omega^2}}{\pm \sqrt{z^2 - A^2\theta^2\omega^2}} = C + \log . \frac{(z + A\theta\omega)^2 \mp}{(z^2 + A\theta\omega)^2 -} \times$$

$$\times \frac{2(z + A\theta\omega)\sqrt{z^2 - A^2\theta^2\omega^2} + z^2 - A^2\theta^2\omega^2}{-(z^2 - A^2\theta^2\omega^2)} =$$

$$C + \log \frac{z + A\theta\omega \mp 2\sqrt{z^2 - A^2\theta^2\omega^2} + z - A\theta\omega}{z + A\theta\omega - z + A\theta\omega} =$$

$$C + \log \frac{z \mp \sqrt{z^2 - A^2\theta^2\omega^2}}{A\theta\omega} = \text{- - - -}$$

$$C + \log \frac{A - by \mp \sqrt{(A - by)^2 - A^2\theta^2\omega^2}}{A\theta\omega},$$

l'integrale completo della (71) sarà dunque

$$x = C - \frac{A\theta\omega}{b}\log(A\theta\omega) + \frac{A\theta\omega}{b} . \log\left(A - by \mp \sqrt{(A - by)^2 - A^2\theta^2\omega^2}\right):$$

la quantità $C - \frac{A\theta\omega}{b}\log(A\theta\omega)$ è costante, poniamo dunque $C - \frac{A\theta\omega}{b}\log(A\theta\omega) = C_1$,

(75) $C_1 + \frac{A\theta\omega}{b} . \log\left(A - by \mp \sqrt{(A - by)^2 - A^2\theta^2\omega^2}\right)$

a determinare C_1 osserviamo

che al punto k si ha $x=0$, $y=0$, e prendere si debbe il segno superiore davanti al radicale, quindi dalla (75) si ha

$$0 = C_1 + \frac{A\theta\omega}{h}\log\left(A - hy - \sqrt{(A-hy)^2 - \dots}\right)$$

e però $= C_1 + \frac{A\theta\omega}{h}\log(A(1-\theta\omega))$

però

$C_1 = -\frac{A\theta\omega}{h}\log(A(1-\theta\omega))$ che sostituito nella (75) ce ne darà la

$$(76)\quad x = \frac{A\theta\omega}{h}\log\left(\frac{A-hy \mp \sqrt{(A-hy)^2 - A^2\theta^2\omega}}{A(1-\theta\omega)}\right)$$

la quale ci mostra essere la catenaria una curva trascendente. Ad ottenere la ... za che al punto più basso della catenaria corrisponde por desi nella (75) il valore di y dato dalla (65) e si avrà la

$$(77)\quad x = \frac{A\theta\omega}{h}\log\frac{\theta\omega}{1-\theta\omega}.$$

§. 288. Dalla equazione (76) si ottiene

$$\frac{h}{A\theta\omega}x = \log\left(\frac{A-hy \mp \sqrt{(A-hy)^2 - A^2\theta^2\omega}}{A(1-\theta\omega)}\right)$$

Poniamo $\frac{h}{A\theta\omega} = m$; e passando ai numeri avremo la

$$(78)\quad e^{mx} = \frac{A-hy \mp \sqrt{(A-hy)^2 - A^2\theta^2\omega}}{A(1-\theta\omega)},$$

ovvero

$$e^{mx} - \frac{A-hy}{A(1-\theta\omega)} = \frac{\mp\sqrt{(A-hy)^2 - A^2\theta^2\omega}}{A(1-\theta\omega)}$$

innalzando a quad.° e riducendo

$$e^{2mx} - 2\frac{A-hy}{A(1-\theta\omega)} \times e^{mx} = -\frac{A^2\theta^2\omega^2}{A^2(1-\theta\omega)^2}$$

Traendo da questa equazione il valore di y, si ha

$$y = \frac{A}{h}\left(1 - \frac{1}{2}(1-\theta\omega)e^{mx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2\omega^2}{1-\theta\omega}\right)e^{-mx}\right)$$

ossia avremo la

(79) $y = \frac{A}{h}\left(1-\frac{1}{2}(1-\theta\omega)e^{mx} - \frac{1}{2}(1+\theta\omega)e^{-mx}\right)$

equazione che dà il valore di y in funzione di x.

§.289. Restano ancora a determinarsi A ed ω; ciò sono la attuale esistenza del punto k e l'angolo che fa la tangente coll'asse x.

Perciò supponiamo a maggiore facilità la catenaria omogenea e i due punti k, k' sulla medesima orizzontale, in modo che il punto infimo dividerà la catenaria in due parti eguali, e l'ascissa del punto infimo della catenaria sarà la metà della distanza fra k e k'.

Rappresentiamo per λ la lunghezza della catenaria compresa fra $-k$ e k e per δ la loro distanza; dalla (88) si avrà

(80) $\frac{1}{2}\lambda = \frac{A\theta\omega}{h}$, e dalla (77) la

(81) $\frac{1}{2}\delta = \frac{A\theta\omega}{h}\log\frac{\theta\omega}{1-\theta\omega}$; da cui deducesi la equazione

(82) $\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\theta\omega}{\theta\omega}\log\frac{\theta\omega}{1-\theta\omega}$. Da questa si potrà ottenere una serie

che esprimerà il valore di a.
Sostituita questa serie in
una delle (80) o (81) avremo
d'onde determinare la A.

§. 290. Dipend.e dal Teorema dimostrato e cioè che nell'equilibrio il centro di gravità è alla massima o minima altezza, dimostrare si può che fra tutte le curve che si possono durre fra due punti, ed abbiano la stessa lunghezza quella che ha il centro di gravità più basso è la catenaria. Sia λ la lunghezza della catenaria data e detta y_1 la coordinata verticale del centro di gravità della curva, si avrà

(83) $\lambda = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$

(84) $\lambda y_1 = \int y\sqrt{dx^2+dy^2}$, pei momenti, e si debbono prendere dalla R: la y_1 che è sulla verticale esser deve un massimo perchè il centro sia il più basso; vale a dire dovrà essere $\int y\sqrt{dx^2+dy^2}$ preso fra gl'indicati limiti un massimo. Pel dimostrato nel C. S. la funzione la cui primitiva possa fra certi limiti dar essere un Massimo è

(85) $v\,dy = y\sqrt{dx^2+dy^2} + A\sqrt{dx^2+dy^2}$

(380.9

mettendola sotto forma deriva-
ta, si ha

(86) $V=(y+A)\sqrt{1+x'^2}$, quindi avre-
mo

$\left(\frac{V'}{x''}\right)=\frac{(y+A)x'}{\sqrt{1+x'^2}}$, e però l'equa-
zione del massimo, sarà

(87) $\left(\frac{(y+A)x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right)'$, ed integrando avremo

(88) $\frac{(y+A)x'}{\sqrt{1+x'^2}} = C$; ossia

(89) $\frac{(y+A)dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = C$. A determina-
re la costante C abbiamo
che quando $y=0$, $\frac{dy}{dx}=\sigma\omega$,
e però avremo

$\frac{A\times\frac{1}{\sigma\omega}}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2\omega^2}+1}} = C$; per cui la equa-
zione (89) si cambia nella

(90) $(y+A)dx = A\theta\omega\sqrt{dx^2+dy^2}$;
ponendo $A=-\frac{B}{b}$ e cambiando i
segni avremo la

(91) $(B-by)dx = B\sqrt{dx^2+dy^2}$, che
è appunto l'equazione della
catenaria. ~~Q~~ Essa adunque
dimostrato ciò ~~la~~

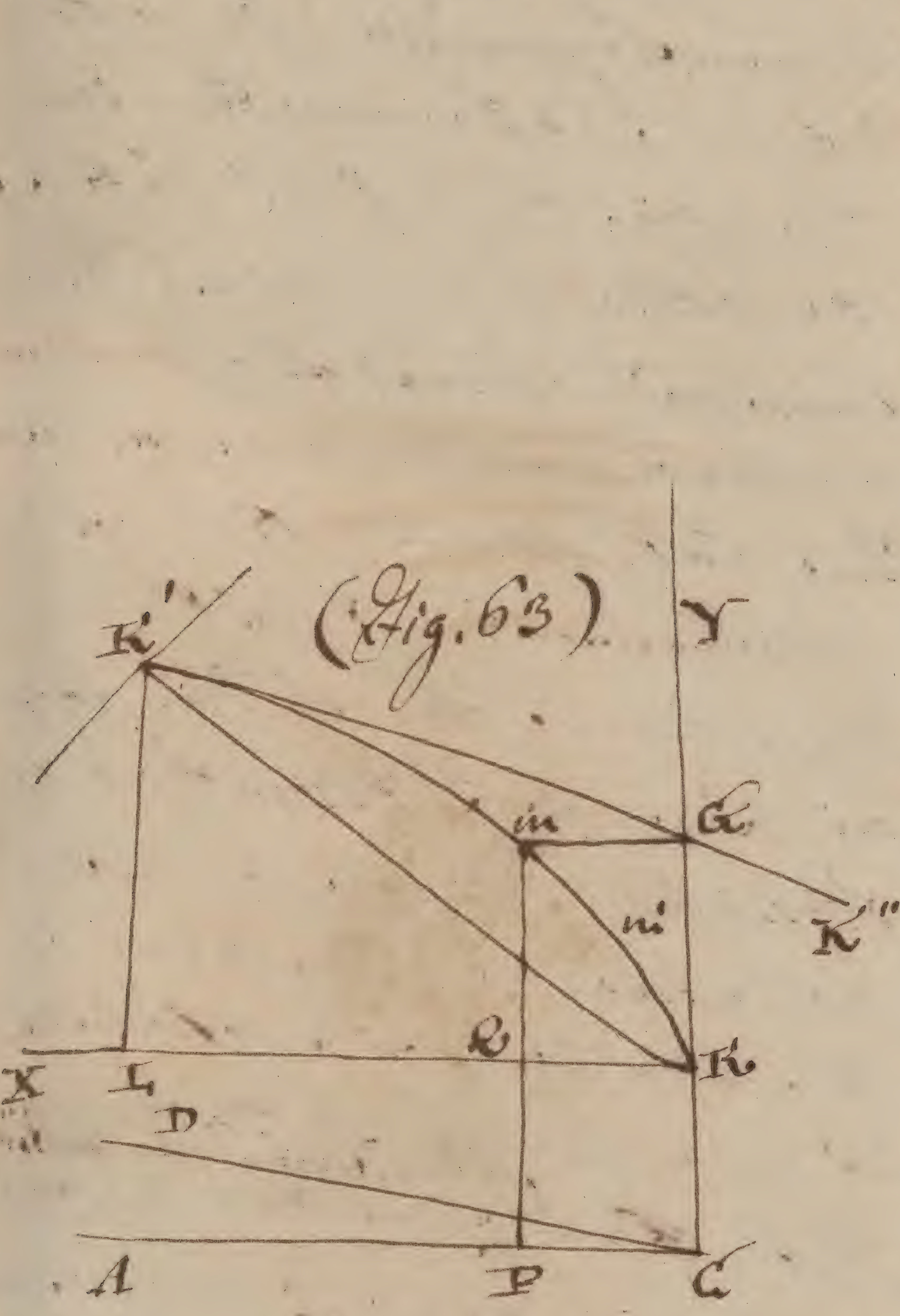
§.291. Pel Teorema di Guldino,
è chiaro, che se un arco della
catenaria ruoti intorno
all'asse orizzontale delle
x, egli genererà una super-
ficie di rivoluzione, che
sarà la massima di quelle
che genererebbero archi
egualmente lunghi di

curva aventi i ~~[illegible]~~ punti e-
stremi nei punti K. K.
Infatti si è dimostrato che
il centro di gravità di questa
curva è il più basso, quindi
maggiore sarà il raggio del
circolo che esso descrive
nella sua rivoluzione, e
quindi la circonferenza che
è un elemento che entra nei
solidi di rivoluzione secon-
do il metodo Guldiniano.–

Capitolo XXI.

Della lamina elastica

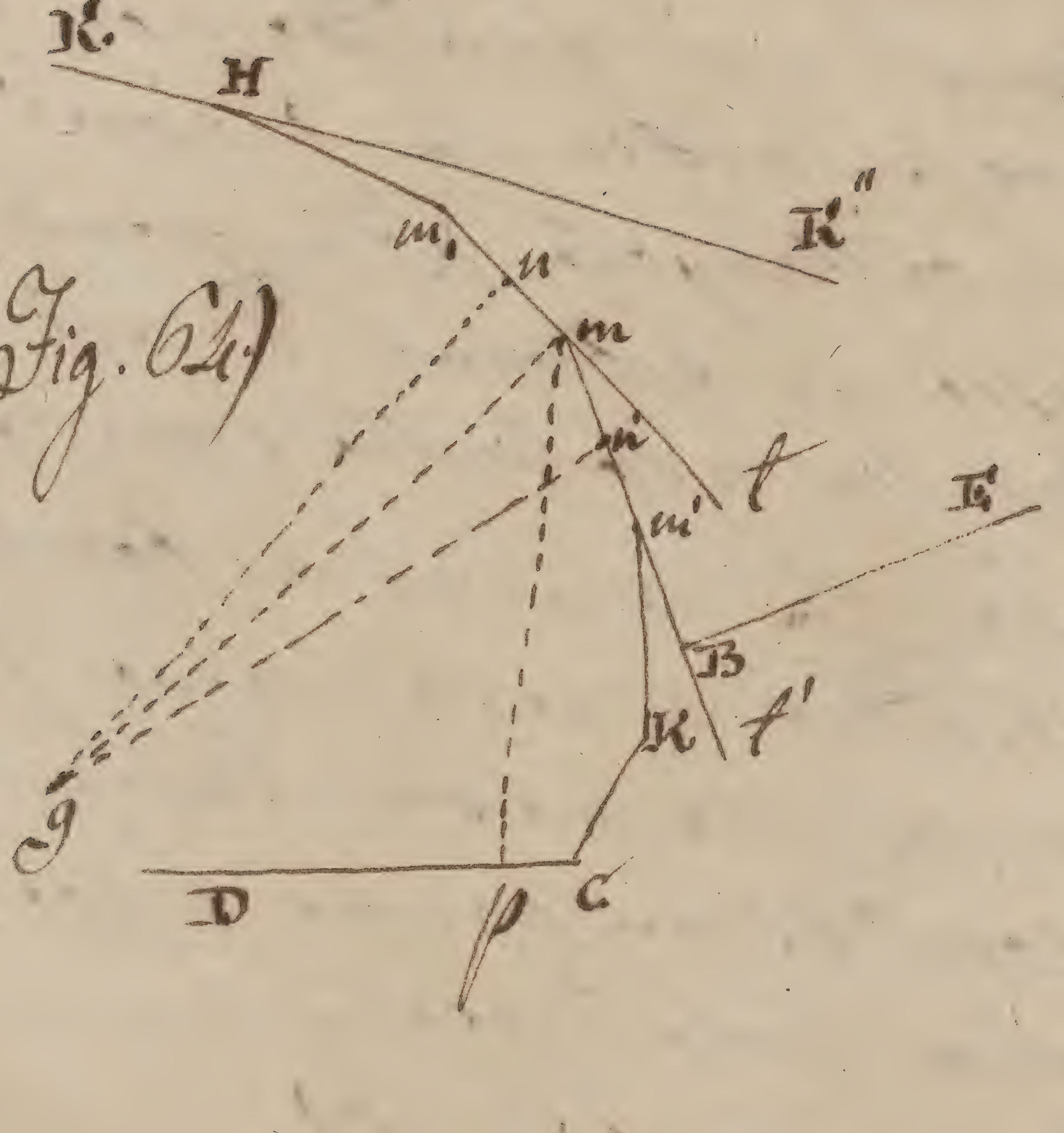
§. 292. Prendiamo in considerazione una lamina flessibile, inestensibile ed elastica, e figuriamola piana e di costante grandezza in tutta la sua estensione cioè quando non è compressa abbia la forma di un rettangolo. Supponiamo fisso un estremo, e all'altro sia applicata una forza che la incurvi a foggia di cilindro, e cerchiamo la curva che nasce dalla sezione di un piano perpend. alla larghezza.



(Fig. 63)

Sia nella (fig 63) la nominata sezione e sia fissa in k' la lamina che distesa abbia la lunghezza kk''. L'estremità della lamina essendo immobilmente fissa in k', se in k si applicherà una ~~forza~~ verga diretta secondo la tangente al punto k ed in C sia applicata una forza colla direzione CP, e si supponghi che sia capace di tenerla incurvata.

Dunque dovrà sussistere equilibrio fra la forza e l'elasticità della lamina che tende a rimettere ~~la lamina~~ nella sua prima posizione.



(Fig. 64.)

§. 293. Al trovare le condizioni di questo equilibrio surroghiamo alla curva elastica un tr.° di lati di un poligono, indeterminatamente grande di lati indeterminatamente piccoli. Sia (fig. 64) il 1.° lato K'H che abbia la posizione della lamina prima di essere incurvata, e sieno m_1m, mm' due lati consecutivi, coi loro prolungamenti mt, $m't'$. Figuriamoci che le due porzioni K'm, mK diventino tanto flessibili di guisa che il poligono non conservi la sua elasticità e flessibilità che in m, e sia di giri potendo girare intorno ad uno snodare fisso m. Questa supposizione non toglierà l'equilibrio e l'elasticità tenderà a far ruotare il lato mm' intorno ad m per metterlo in linea retta con m_1m; onde possiamo considerare la elasticità come una forza perpendicolare ad mt' ed agente in un punto di essa da B verso K. Questa forza incognita la presenteremo

per $\mathfrak{F}$, e poniamo F la forza che agisce nella direzione GD. Da m si conduca su GD la perpendicolare mF, e porremo mF = p, e sia mB l'unità di misura. Le due forze $\mathfrak{F}$, e F si fanno equilibrio intorno al punto fisso m, e però i momenti relativi a questo punto esser debbono eguali, e quindi avremo la

(1.) $\mathfrak{F}$ = Fp. Reciprocamente se il 1.° lato KH è fisso si avrà egualmente equilibrio

Lezione 67.

= S.294. La forza F varia da un vertice all'altro del poligono, avvegnacchè dipende dall'angolo tmt' (fig. antec.) il quale angolo dicesi angolo di contatto. Nella fatta supposizione la forza F è nulla quando esso è zero, ed aumenta aumentando l'angolo. In una lamina omogenea in tutta la sua estensione la forza F è proporzionale a quest'angolo. Sia F = A il valore di essa in un vertice del poligono dell'angolo a, sia w = tmt', e si avrà F : A :: w : a, si ha quindi la

(2) $F = \frac{Aw}{a}$; l'angolo di contatto diventa indeterminatamente piccolo allorchè il poligono

(391.)

si accosta alla curva continua, anzi quando si è alla curva si ha $\frac{0}{0}$ invece di $\frac{\omega}{a}$. Ad evitare ciò si osservi che la curva tocca il poligono circoscritto nei mezzi dei lati, perchè agli archetti della curva si possono surrogare gli archetti dei circoli osculatori che li toccano nei loro mezzi. Siano m, m' i mezzi di due latercoli u, u' mm', ed innalzate le mg, m'g perpendicolari ad essi che andranno ad incontrare l'evoluta in due punti; diminuendo i lati quei due punti si accosteranno e si andranno finalmente ad incontrare in g punto dell' evoluta e gu sarà il raggio osculatore del punto u; essendo gu perpend. ad ut, e gu' perpend. ad ut', sarà l'ango. ang. $ugu' = tut' = 2ugm$: dal D. rett. mug si ha

$\theta ugm : um :: 1 : gu$, e però avremo la

(3.) $\theta ugm = \frac{um}{ug}$. L'angolo tut' è doppio del ugm, e gli angoli sono indeterm. piccoli, e però all'angolo ugm si può sostituire il seno, e quindi avremo la

(4.) $tut' = 2\theta ugm$: ma mu è il seno di ugm, ed $mu = \frac{1}{2} mm'$,

Dunque avremo la

(5) $\tan t' = \frac{mm_1}{ug}$; si dovrà dunque concludere che l'angolo di contatto eguaglia l'elemento della curva diviso pel corrispondente raggio d'osculo. Supposta dunque la curva partita in elementi eguali; e detti r, a i raggi di curvatura che corrispondono agl'angoli ω ed α, avremo

(6) $\frac{\omega}{\alpha} = \frac{a}{r}$, che sost.e nella (2) avremo la

(7) $\mathfrak{F} = A\frac{a}{r}$, che sostituita nella (1) si ha

$A\frac{a}{r} = Pp$; posto $Aa = b$, dedurremo la

(8) $Pp = \frac{b}{r}$; la b dipende dalla densità e materia di che si compone la lamina elastica, e si conserva la medesima per la lung.a di una lamina elastica omogenea. È necessario conoscere b dall'esperienza.

§. 295. La (8) che addicesi a tutti i punti della curva elastica $Km k$ rappresenta questa curva. Per avere l'equazione colle coord.e sia (fig 68) ~~Ka, aY~~ KX, KY i due assi ortogonali. Siano $x = KQ$, $y = mQ$ le coord.e e sia $Ka = a$.

La forza F che agisce secondo la CD si scomponga in due secondo CK e CA normali ad essa, e queste verranno espresse da $F\,c\,y$, $F\,\theta y$, e i loro momenti da $xF\theta y$ $(y+c)F\theta y$ e per l'equilibrio si avrà

(9) $Fp = \frac{b}{r} = -xF\theta y + (y+c)F\theta y = F((y+c)\theta y - x\theta y)$; si è messo il segno negativo ad uno dei due momenti perchè i movimenti che ne deriverebbero sarebbero contrarj. Posto dy costante si è veduto che il raggio d'osculo è presentato da $r = \pm\frac{(1+y'^{2})^{\frac{3}{2}}}{y''}$; per avere il raggio d'osculo positivo dovrà prendersi opportunamente il segno che sta dinanzi al radicale; ma y'' è positivo quando rivolge la convessità all'asse delle ascisse, ed è negativo quando vi volge la concavità; ma dalla fatta costruzione la curva rivolge la concavità all'asse delle x, dunque si dovrà prendere il segno inferiore, e però avremo la

(10) $F((y+c)\theta y - x\theta y) = \frac{-by''}{(1+y'^{2})^{\frac{3}{2}}}$

che rappresenta la curva elastica

(392.)

§.° 296. Dalla (13) facilmente si deriva una derivata di 1.° ord.° All'uopo si ponga

(11) $(y+a)\theta y - x\theta y = z$; la derivata di questa è

$\theta y y' - \theta y = z'$;

la 2.ª è

$\theta y y'' = z''$, onde

$y'^2 = \dfrac{z'^2 + 2\theta y z' + \theta^2 y}{\theta^2 y}$, onde

dall'(11) avremo la

(12) $Pz = -\dfrac{bz''}{\theta y} : \left(1 + \dfrac{z'^2 + 2\theta y z' + \theta^2 y}{\theta^2 y}\right)^{\frac{3}{2}}$;

e riducendo si ha

$Pz = -\dfrac{b\theta^2 y z''}{(z'^2 + 2\theta y z' + 1)^{\frac{3}{2}}}$, essendo

$\theta^2 y + \theta^2 y = 1$; poniamo $z' = u$, sarà $z'' = u'$, e sostituendo avremo la

(13) $Pz = -\dfrac{b\theta^2 y u'}{(u^2 + 2\theta y u + 1)^{\frac{3}{2}}}$; equazione separata che contiene due variabili z, u ed è di 1.° ordine, ed i risultati che se ne ottengono poco servono alla pratica.

Capitolo XXII.

= Della Leva =

§. 297. Una leva in generale è un corpo solido sollecitato da forze qualunque che può rotare intorno ad un punto od asse; però l'equilibrio di essa dipende dal dettato al Cap.° X.

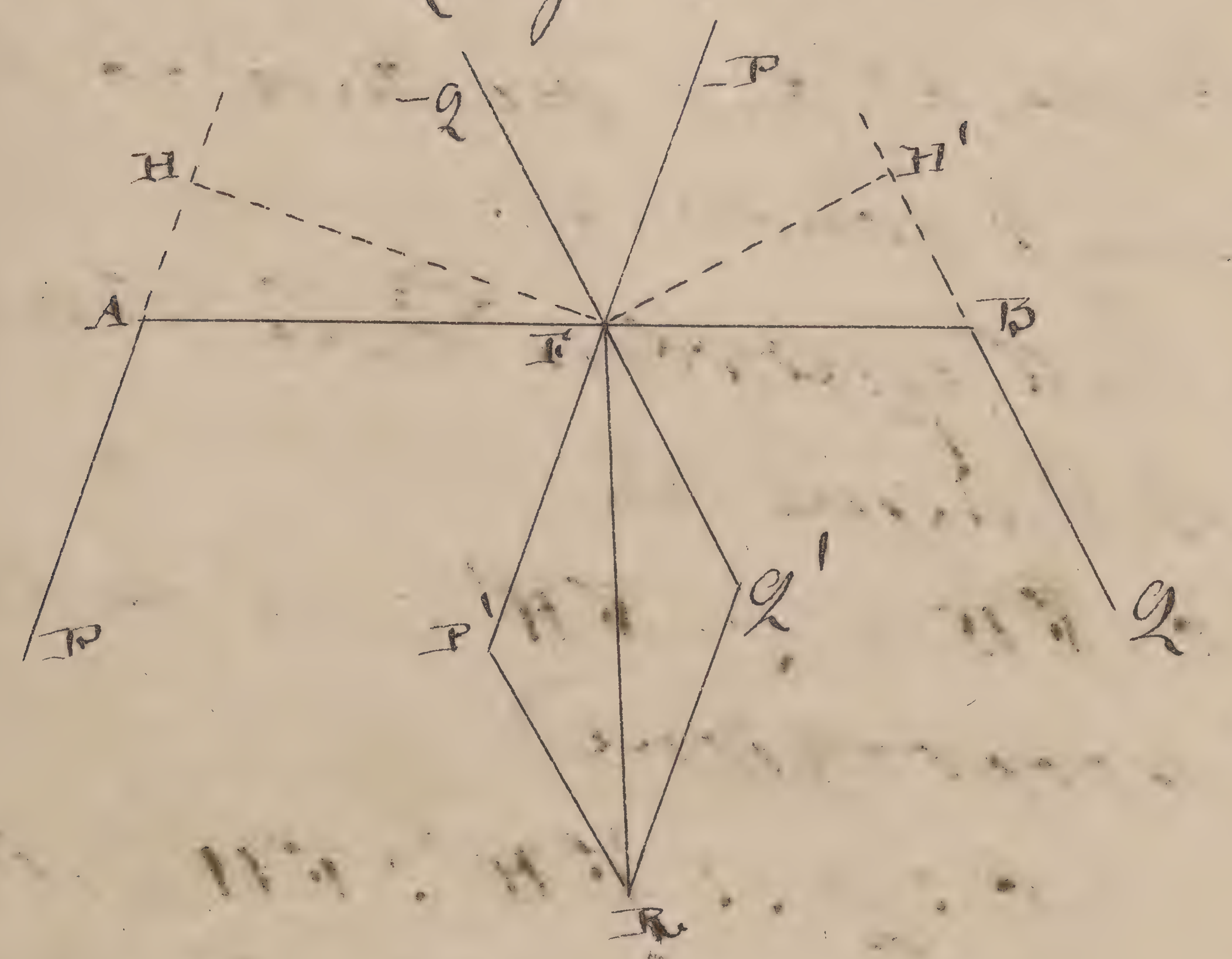
Ma nella pratica la leva è una spranga o verga rigida retta o curva alla quale son applicate due forze, una delle quali dicesi potenza e l'altra resistenza e può rotare intorno ad un punto fisso o ipomoclio (hypo- punto fisso - mochlos - leva) le distanze del fulcro dalle direzioni delle due forze diconsi bracci di leva. —

La leva dicesi di 1.° genere se l'ipomoclio sia fra la potenza e la resistenza. —

Di 2.° genere quando la resistenza è fra l'ipomoclio e la potenza. —

Di 3.° genere quando la potenza è fra l'ipomoclio e la resistenza. - Supporremo la leva retta e non pesante finchè Ec

(Fig. 65)



§. 298. Siano (fig. 65) le due forze P, Q applicate agli estremi della verga AB che possano farla ruotare intorno al punto F. Esse si possono trasportare ad essere applicate in F, e siano le PF, QF eguali in direzione ed intensione alle prime, introducendo due coppie (P, -P) (Q, -Q): la risultante delle P, Q è distrutta dalla resistenza del punto F. E si è veduto che la resistenza di questo punto non può elidere la risultante delle due coppie; dunque converrà che sia zero da per sè però essendo esse o sullo stesso piano o su piani paralelli; ma i due piani sono contrarj, dunque sono sullo stesso piano. Affinchè adunque sia zero conviene che siano eguali: conducendo le perpendicolari FH, FH', i momenti che le rappresentano P.FH, Q.FH' debbono essere eguali. All'equilibrio adunque della leva sono necessarie le 3 condizioni. — 1.º Che le due forze e il sostegno siano sullo stesso piano, 2.º Che i momenti delle due

(307.)

forze relativi al fulcro sieno eguali.
3.° Che le due forze P, Q tendano a far ruotare la leva in sensi contrarj.
Nell'equilibrio della leva avrassi dunque la
(1) $P.FH = Q.FH'$, ne avrai la proporzione
$P : Q :: FH' : FH$; cioè le forze applicate alla leva in equilibrio esser debbono fra loro in ragion reciproca delle perpend.i sulle loro direzioni.
Fatto $FH = p$, $FH' = q$, si ha
(2) $Pp - Qq = 0$, che è l'equazione d'equilibrio.

§. 299. Nel caso dell'equilibrio, alla pressione contro l'ipomoclio non contribuiscono le due coppie, ma soltanto le forze $P' = P$, $Q' = Q$; deriva quindi che la pressione sopportata dall'ipomoclio è assolutamente la med.e che se si trasportassero parallelle e senza cambiar direzione nell'ipomoclio stesso, e però per trovare la pressione dell'ipomoclio compiuto il parallelogrammo FR, e condottane la diagonale questa rappresenterà la pressione sopportata dal punto fisso. Si ha dunque d'onde avere la maniera

per vedere se un punto fisso sia capace di una certa resistenza.

§. 300. Le forze P', Q', trasportate nel fulcro sono eguali alle P e Q ed hanno le medesime direzioni, e quindi i tre lati e i tre angoli di uno dei due triangoli PRP', PQR rappresentano le 6. cose che nella leva prendere si possano in considerazione, e cioè le forze P, Q la R o pressione contro il fulcro e le mutue loro inclinazioni, onde date tre cose si ne trovano per la Trig. gli altri tre quando non sieno i tre angoli od un lato e due angoli senza più che sarebbe dubbio.

§. 301. Se le forze P, Q sieno tra se parallele si può pel fulcro condurre una perpend.e comune alle direzioni delle forze P, Q, le quali forze essere dovranno tra se in ragione reciproca delle porzioni di perpend.e compresa fra le forze e l'ipomoclio. Se la leva AB sia retta (Fig 66) e le forze AP, BQ sieno parallele e la HH' perpend.e commune si avrà

P : Q :: FH' : FH :: FB : FA.

(Fig. 66)

(392.)

Dunque nella leva le forze applicate agli estremi sono tra lo-ro in ragion reciproca delle perpend: Dunque nella leva retta, le forze sono in ragion reciproca dei bracci di leva.

§. 302. Le cose dette si adattano ai tre generi diversi di leva, e di conseguenza, allorchè le due forze sollecitanti la leva sono tra se parallele, la pressione sul fulcro eguaglia la somma delle 2 forze nella leva di 1.° genere, e la diff. nelle leve di 2.° e 3.° genere; avvegnacchè in quella di 1.° genere hanno la stessa direzione, e contrarie nelle altre 2.

§. 303. Sia ora la leva sollecitata da un N.° di forze P, P′, P″ sullo stesso piano sul quale sia il fulcro; sieno p, p′ - p″ le perpend.i che dal fulcro si conducono sulle -P, -P′, -P″ se è d'uopo prolungate.

Trasportando parallelamente a se stesse le forze nell' ipomoclio s'introducono le coppie (P, -P) (P′, -P′) - P″ la risultante delle quali annullare si debbe come se non vi fosse

il fulcro; nella fatta supposizione dovrà dunque essere

(3) $Pp + P'p' + P''p'' + \&c. = 0$,

avendo riguardo ai segni dei momenti. — Le forze P, P' &c. trasportate parallel.te a se stesse al fulcro avranno una risultante che resterà annullata dalla resistenza del fulcro stesso, e perciò sarà la pressione sopportata dal fulcro per l'azione delle forze. —

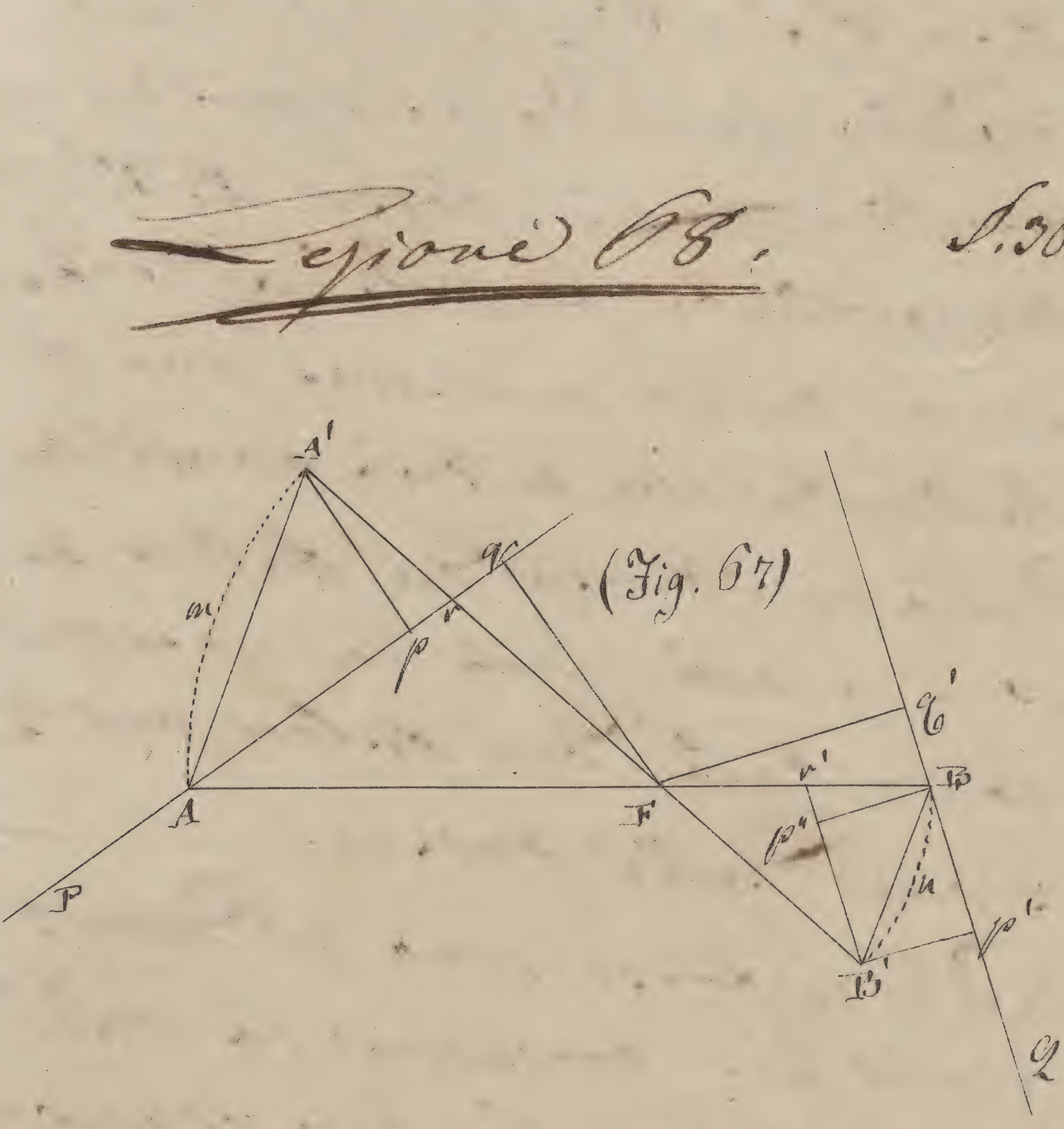
Se le forze sono in diversi piani per trovarne la cond.e d'equilibrio nella leva converrebbe aver riguardo al detto al Cap.o X. —

§. 304. Finora si è fatta astrazione dal peso della leva, ma se vogliasi tenerne conto si dovrà considerare come una forza verticale nel centro della leva. Se si combini questa colle altre si potrà prescindere da questa forza; si vede adunque che nella ipotesi di tutte le forze applicate alla leva e la gravità di lei abbiano le direzioni sopra un piano che passi pel fulcro, la somma dei loro momenti relativi al fulcro esser dee nulla per l'equilibrio. —

Se si voglia far uso di una

leva pesante senza considerarne il suo peso si dovrà porre in modo che la verticale passi per l'ipomoclio.

Lezione 68.



§.385. Il dimostrare per mezzo delle velocità virtuali l'equazione d'equilibrio della leva, si figuri nella leva un movimento indeterminatamente piccolo e sia (fig. 67) AB la leva ecc. F il fulcro e il mov.° trasporti il punto A in A', B in B' essendo piccolissimo. I due punti A, B in questo movimento descriveranno due archetti simili AmA', BnB' ai quali si potranno sostituire le loro corde. Da A' si conduca la perpend. A'p alla Pq e B'p' alla BQ: le Ap, Bp' saranno le projezioni delle velocità virtuali sulle direzioni delle forze P, Q. Posti Ap = p, Bp' = p', pel principio delle velocità virtuali esser debbe la

(1) $Pp + Qp' = 0$, la quale dovendo si verificare ci mostra che una projezione esser debbe su di una forza, e l'altra sul suo prolungamento. Vedesi adunque che le due forze P, Q debbono produrre movimenti contrarj, e perciò debbe aversi la

(5) $Fp - Qp' = 0$. Pei triangoli rettangoli si hanno le

(6) $p = AA'\theta A'Ap$,

(7) $p' = BB'\theta B'Bp'$.

Supponiamo che nella figura la forza Q cada dalla parte convessa dell'archetto B'm'B. Si protraggano B'o' parallella a BQ, e Bp'' parallella Fq; e sarà l'angolo $p''BB' = B'Bp'$ ma dai due Δ' $AA'F$, $BB'F$ si ha $AA' : BB' :: AF : BF$; dunque se moltiplicheremo gli antecedenti per $\theta A'Ap$ e i conseguenti per $\theta B'Bp'$, si avrà $AA'\theta A'Ap : BB'\theta B'Bp' ::$ $AF.\theta A'Ap : FB\theta B'Bp'$, e però dipend. dalle (6) e (7) avremo

$$\frac{p}{p'} = \frac{AF.\theta A'Ap}{FB.\theta B'Bp'}.$$

Da F si conducano sulle direzioni delle F, Q prolungate le perpendicolari Fq, Fq': essendo la corda AA' indeterminatamente piccola, l'angolo $AA'v$ si può considerare retto, quindi l'angolo $vA'p = A'Ap =$ vFq: ma l'angolo AFq è piccolissimo e si confonde coll'angolo vFq e però $vFq = AFq$; quindi il Δ^o. retto AqF ci dà $Fq = AF\theta A'Ap$; similmente si ha $Fq' = FB\theta B'Bp'$; onde sarà

$$\frac{p}{p'} = \frac{Fq}{Fq'}.$$

Dalla (5) adunque si avrà
$P\frac{\partial q}{\partial q'} - Q = 0$; il che dà
$P.\partial q - Q.\partial q' = 0$; oppure
$Pp - Qp' = 0$. Dunque
Se la forza Q cadesse dalla
parte convessa dell'archetto
come nella (fig. 68) il ragionamento è lo stesso. Osserviamo che $P.\partial q$, e $Q.\partial q'$ esprimono le energie delle due coppie trasportando le forze P, Q parallelamente a se stesse in F senza cambiare, le quali esser devono nello stesso piano, e però le P e Q esser devono sullo stesso piano del fulcro.

§. 386. Comunemente a trovare l'equilibrio della leva si scompongono le forze in 2 una diretta secondo la leva e l'altra perpend.^e ad essa: le due dirette secondo la lunghezza della leva saranno elise da essa non potendo scorrere, onde saranno le due forze rimanenti moltiplicate pei loro bracci, eguali: dunque anche qui si vede che tendono a produrre movimenti contrarj

§. 307. Se la leva non si potesse muovere che su d'un piano verticale, scomposte le forze ciascuna in 2 una orizzontale, e l'altra verticale, le orizzontali resterebbero elise, e le verticali si dovrebbero coi loro momenti equilibrare.

§. 308. Sovente la leva non poggia che sull'ipomoclio, ed allora fatta astrazione dall'attrito, le trovate condizioni non bastano, perchè il fulcro non può distruggere che le forze che le sono perpendicolari, e però bisogna che per l'equilibrio la risultante sia normale alla superficie tangente, e passi per l'ipomoclio. Ciò vedremo meglio trattando del piano inclinato.

§. 309. Allorchè mediante una leva di 2.° genere con una potenza P si vuol fare equilibrio ad una resistenza Q applicata ad una distanza q dall'ipomoclio, si dica si g l'unità di misura della leva di peso uniforme, ed x la distanza della potenza, il peso della leva sarà gx, e pei momenti si avrà la

$$(1)\quad Px - Qq - \tfrac{1}{2}gx^2 = 0.$$

Dalla (8) si

(9) $F = \frac{2Q}{x} + \frac{1}{2}gx$, e di conseguenza $F = \infty$, tanto se $x = 0$, che $x = \infty$. Fra questi limiti adunque debbe trovarsi un valore di x cioè un punto della leva al quale applicata la forza F sia la minima nell'equilibrio. A trovare ciò converrà eguagliare a zero la 1.ª derivata della (9) e si avrà

$F' = -\frac{2Q}{x^2} + \frac{1}{2}g$, e quindi la

(10) $gx^2 - 2\cdot 2Q = 0$, e però

(11) $x = \pm\sqrt{\frac{2\cdot 2Q}{g}}$; lunghezza della leva col mezzo della quale si equilibra la resistenza Q colla minima potenza: posto questo valore nella (9) e riducendo si ha

$F = \sqrt{2gQ}$.

Capitolo XXIII.

Del piano inclinato

§. 310. Si è già considerato l'equilibrio di un solido che poggia su di un piano con un N.° qualunque di punti, e si è veduto che la risultante esser deve perpend.e al piano ed incontrarlo in un punto posto nella figura formata dai punti uniti colle linee rette, e che due a due comprendono lati rispetto ai cui i vertici del poligono sono situati dalla medesima parte.

§. 311. Se due siano le forze P, e Q sollecitanti il solido, esser debbono nel med.o piano per avere risultante unica che dev'esser nel piano delle forze e per l'equilibrio esser deve perpendicolare al piano, e però la risultante delle P, Q esser deve perpend.e al piano inclinato.

Se una delle forze Q ad essa fosse verticale come il peso del solido, le tre forze P, Q, R per l'equilibrio esser dovrebbero nello stesso ~~tempo~~ piano perpendicolare al

piano ove sta il solido; e per-
pendicolare ad un piano oriz-
zontale.

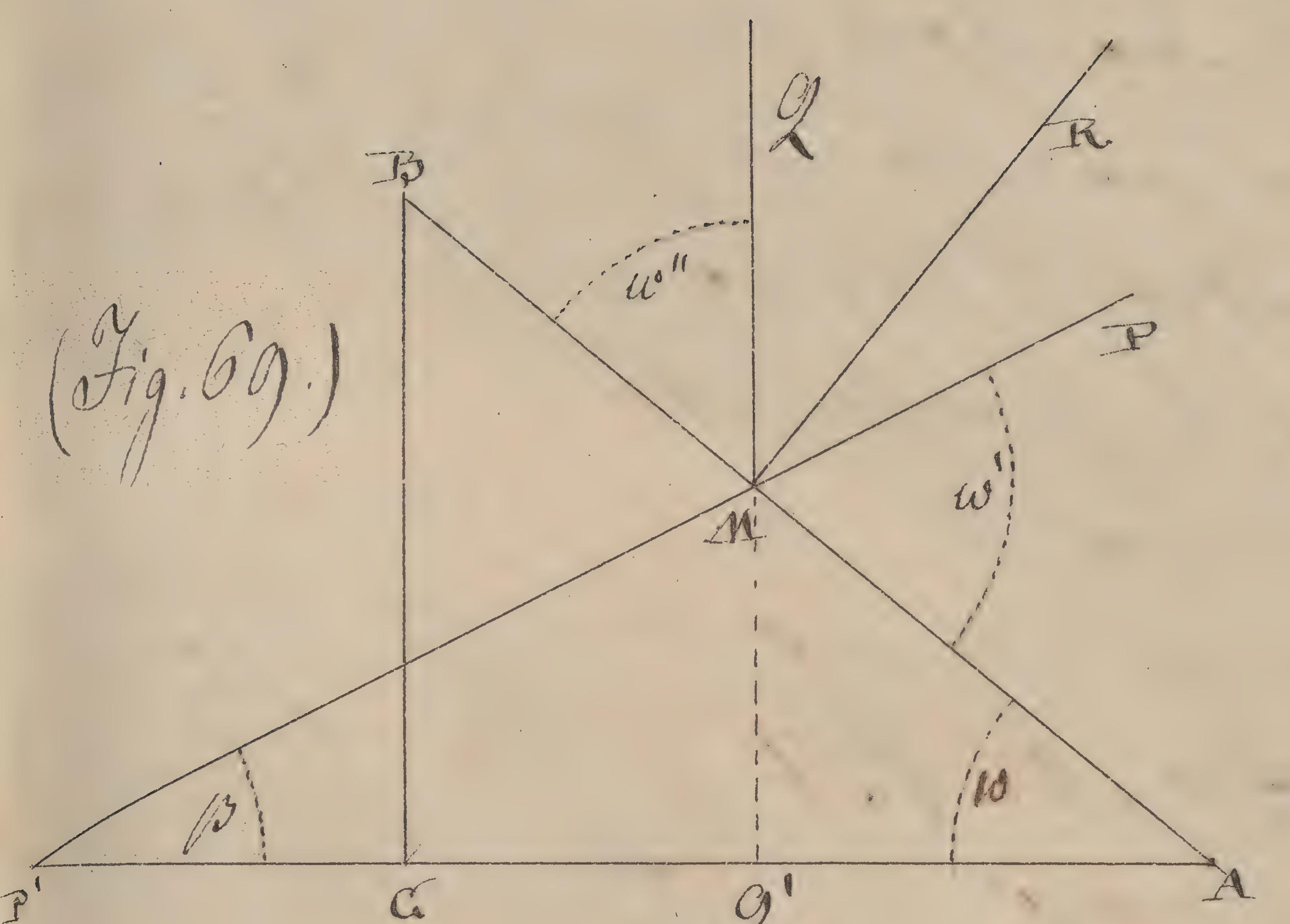
§. 312. Poniamo che un solido poggia
di un piano con un solo punto
e facemo astrazione del peso del corpo.
Se nel punto di appoggio si
trasportino parallelamente a
se stesse le P, Q s'introdu-
cono due coppie $(P, -P)(Q, -Q)$
le energie delle quali saran-
no presentate da Pp, Qq;
ed p, q rappresentano le per-
pend: che dal punto si con-
ducono sulle direzioni delle
forze. Le forze così applica-
te al punto d'appoggio dovran-
no avere una risultante per-
pendicolare al piano indica-
to; le due coppie $(P, -P)$,
$(Q, -Q)$ devono avere una
risultante nulla; ma pas-
so per il med.° punto, dunque
dovendosi elidere saranno
sullo stesso piano ed avran-
no energie eguali ed opposte,
cioè tenderanno a produr-
re movimenti contrarj;
per l'equilibrio avremo

(1) $Pp - Qq = 0$; equazione simi-
le alla trovata per la leva,
oltre la quale all'equilibrio
è necessaria la cond.e che la
risultante delle P, Q tra-

sportato parallelamente a sè stesso sia normale al piano per ivi esser eliso. Se si concepisce un movim.to indeterminatamente piccolo nei punti d'applicazione delle P, Q essi sarebbe un mov.to di rotazione e progressivo, e per tale il punto d'appoggio lo concepirebbe. ——

§. 313. Sia la forza P che sollecita il punto materiale M essendo in un piano la direzione della P perpendicolare al piano inclinato e orizzontale. Questi due piani inclinato e orizzont. le li verremo presentando per BA, e CA intersecazioni col piano della P. — La BA dicesi <u>lunghezza</u> CA <u>base</u> e BC <u>altezza</u> del piano inclinato.

(Fig. 69.)



Sia QM la direzione della forza Q che sia sul piano anzidetto agente sul punto M. Sia PM la direzione della P, e RM sia la risultante delle forze P, Q che dovrà per l'equilibrio essere perpendicolare a BA. Scomposta ciascuna delle forze P, Q in due l'una diretta secondo BA e l'altra ad essa perpend.e le componenti secondo BA sono

P cos ω', Q cos ω'', e secondo le

perpend.^e al piano $P\theta w'$, $Q\theta w''$; per l'equilibrio è necessario che sia la

(2) $P\theta w' - Q\theta w'' = 0$. Le altre due forze che sono perpendicolari al piano non fanno che produrre una pressione sul piano, dunque se porremo N questa pressione, si avrà la

(3) $N = P\theta w' + Q\theta w''$. Allorchè il punto non fa che poggiare sul piano la forza N spinge contro il piano; se le due pressioni premano amendue il piano si prenderanno collo stesso segno &c

Dalla (2.) si ha la

(4) $P = Q\frac{\theta w''}{\theta w'}$, quindi avremo sost. nella (3) la

(5.) $N = Q\frac{\theta w''\theta w' + \theta w' \theta w''}{\theta w'}$, ovvero avremo la

(6.) $N = Q\frac{\theta(w'+w'')}{\theta w'}$; ma $w'' = 90^o - w$ essendo la direzione di Q normale a GA; e però $\theta w'' = \theta w$; dunque la (2) mutasi nella

(7.) $P\theta w' - Q\theta w = 0$, e la (6) nella

(8.) $N = Q\frac{\theta(w'-w)}{\theta w'}$.

Nel triangolo rettangolo BGA si ha la proporzione $BA : BG :: 1 : \theta w$, e però la

(9) $\theta w = \frac{BG}{BA}$; per cui la (7) si muta nella

(10) $P\theta w' - Q.\frac{BG}{BA} = 0$, ovvero

(410.)

(11) $P.BA\theta\omega' = Q.BG$, e quindi avremo la proporzione

(A) $P : Q :: BG : BA.\theta\omega'$.

§. 314. Se la forza P sia orizzontale cioè parallella alla base, si avrà $\omega' = \omega$, e la (7) si muterà nella

(12) $P\sigma\omega - Q\theta\omega = 0$, e quindi $P = Q\sigma\omega$; ma $\sigma\omega = \frac{BG}{AG}$, dunque avremo la

(13) $\frac{Q}{P} = \frac{GA}{BG}$; laonde se la forza P sia parallella alla base del piano, il peso Q sta alla forza P :: la base del piano alla sua ~~lunghezza~~ altezza

§. 315. Se la forza P sia parallella alla lunghezza AB, si avrà $\omega' = 0$, $\theta\omega' = 1$, e la (7) si ridurrà alla

(14) $P - Q\theta\omega = 0$; ma $\theta\omega = \frac{BG}{BA}$, dunque avremo la

(15) $\frac{Q}{P} = \frac{BA}{BG}$; cioè quando la potenza è parallella alla lung.e del piano, il peso sta alla potenza come ~~la base~~ la lunghezza alla altezza.

§. 316. Dall' (11) si ha la

(16) $\frac{Q}{P} = \frac{AB\,\theta\omega'}{BG}$; dei tre valori trovati di $\frac{Q}{P}$, il mass.e è $\frac{BA}{BG}$; e da ciò si dovrà conchiudere che per sostenere un punto materiale su di un piano inclinato con la minima

(411.)

forza, bisogna che la direzione di questa sia parallela alla lunghezza del piano.

§.317. Se la forza P sia perpendicolare alla lunghezza del piano BA, si avrà $w' = 90°$, e però avremo la

(17) $P = Q\frac{\theta w''}{\theta w'} = \infty$, la quale dimostra che non vi ha forza finita valevole a mantenere un punto materiale in equilibrio su di un piano inclinato quando la sua direzione è perpend. al piano. —

Alla (7) si soddisfa ponendo $w = 0$, ed allora il piano inclinato diventa orizzontale e si ha la

(18) $P = \frac{0}{0}$, avvegnacchè, il punto materiale è già in equilibrio da se sul piano e vi starà se la forza non faccia che premerlo contro il piano. —

Lezione 69

la 70. Ripetizione

§.318. Se la P sia verticale cioè perpend. alla base BA, esser debbe la P eguale ed opposta alla Q, vale a dire dovrà essere

(19) $P = -Q$; infatti, nella fatta ipotesi l'angolo w' diventa l'angolo $QMA = PMA + QMP$; ma $QMP = 90° - QMB = 90° - CBM = w$. Dunque, l'angolo $QMA = w' = 90° + w$, e riuscirà

$\theta\omega' = -O\omega$; per cui la (7) diventa

$O\omega(F+Q) = 0$, che si debbe verificare nell'equilibrio, e ciò non può essere se F non sia $= -Q$. La (8) diventa

(20) $N = \frac{\theta 90^\circ}{-O\omega} Q = 0$; sarà dunque nulla la pressione sul piano inclinato, come esser deve ove quando la F sostiene il peso Q.

Dalla (7) si ha

(21) $\frac{Q}{\theta\omega'} = \frac{F}{O\omega}$, e dalla (8) la

(22) $\frac{Q}{\theta\omega'} = \frac{N}{\theta(\omega'-\omega)}$, e quindi

$Q : F : N :: \theta\omega' : O\omega : \theta(\omega'-\omega)$, ma $\omega = 90^\circ - \omega''$; ed inoltre $\omega' - \omega = \beta$, dunque avremo la proporzione

(B) $Q : F : N :: \theta\omega' : \theta\omega'' : \theta\beta$.

Il che mette davanti essere tra loro il peso, la forza, e la pressione, come i coseni degli angoli che la forza fa colla lunghezza, che il peso fa colla lunghezza, e la forza colla base del piano.

= §. 320. Dalla (B) si ha

$Q : F :: \theta\omega' : \theta\omega''$,

$Q : N :: \theta\omega' : \theta\beta$,

$F : N :: \theta\omega'' : \theta\beta$, e però le equazioni

(23) $Q\theta\omega'' = P\theta\omega'$,

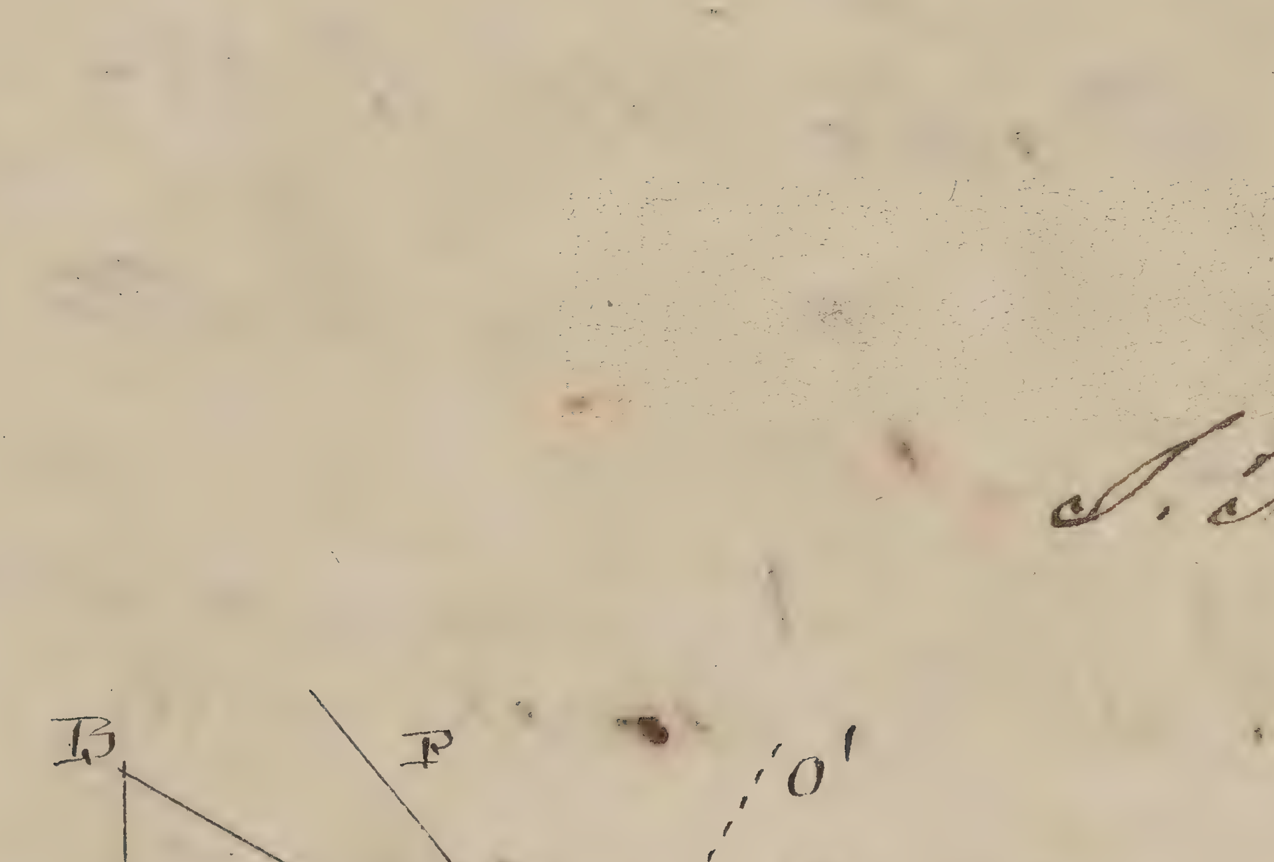
(24) $Q\theta p = N\theta\omega'$,

(25) $P\theta p = N\theta\omega''$: da due delle quali deriva la terza. Si hanno quindi due equazioni che contengono 6 quantità $P, Q, N, \omega', \omega'', p$: ma $\omega = 90° - \omega''$, $\omega = \omega' - p$; dunque $90° - \omega'' = \omega' - p$, e quindi

(26) $\omega' = 90° - (\omega'' - p)$. Le due equazioni adunque riduconsi a contenere le 5 quantità P, Q, N, ω'', p.

§. 321. Si osservi la (Fig. 70.) — Sia O' attaccato al punto M mediante una verga rigida che sia O'M perpendicolare alla lunghezza del piano AB, ed O'M = MO. — Se da O' si conducessero due perpendicolari sulle direzioni delle P, Q si avrebbero due triangoli simili a quelli che si avrebbero conducendo due perpend. ad esse direzioni condotte da O, cioè i due triangoli ONM, OMN' sarebbero simili agli altri due; dunque OM, ON' avranno lo stesso valore che quelle due perpendicolari. Le forze P, Q trasportate in O' saranno

(Fig. 70.)



in equilibrio, si sia

(27) $P . OM = Q . ON'$. Si osservi che ON è il coseno che fa P colla lungh. del piano, ON' è il coseno che fa Q colla lunghezza del piano, e però la (27): ma $ON = OM . \theta ONM = OM \, \theta P'MA = OM \, \theta BMP$. — $ON' = OM . \theta OMN' = OM . \theta M'NA = OM . \theta GBA$; e $\cos . GBA = \frac{BG}{BA}$, dunque la (27) si muta nella

$P . OM . \theta BMP = Q . OM . \frac{BG}{BA}$ ossia

(28) $P . BA . BMP = Q . BG$, e però

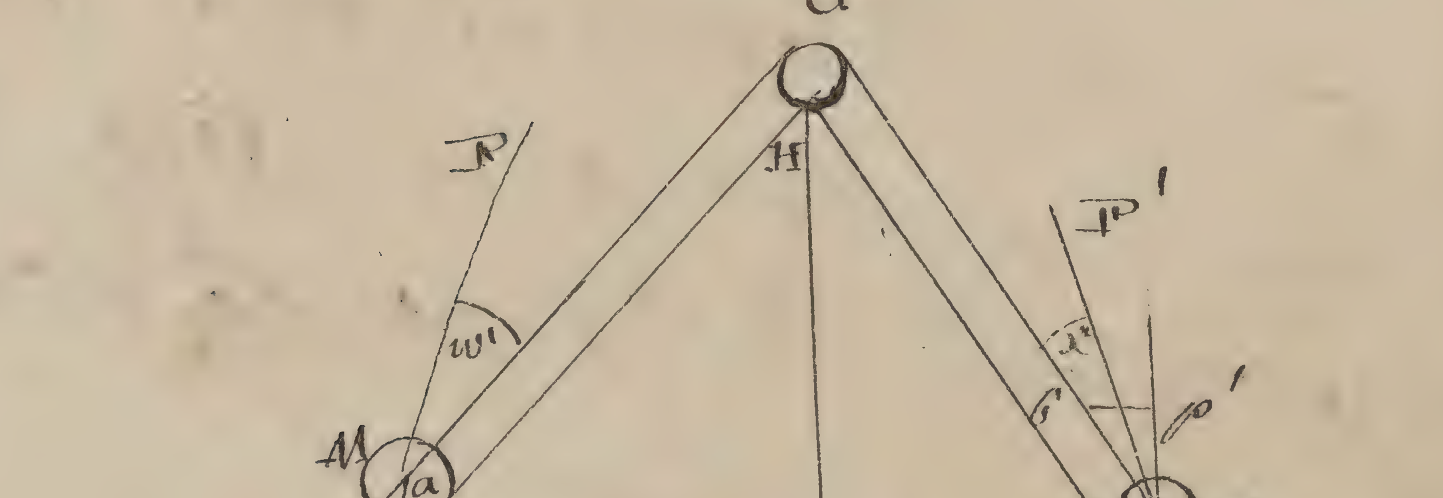
(A) $P : Q :: BG : B . \theta BMP :: BG : BA \times \theta \omega'$. ——

§. 322. Figuriamo un movimento indeterminatamente piccolo per cui il punto passi in M', se si condurranno le perpendicolari $M'p$, $M'q$, saranno le Mp, Mq le projezioni delle velocità virtuali, e si avrà

$Q . Mp = P . Mq$; ma il Δ° MpM' è simile all' OMN', ed Δ°. MqM' è simile all' MNO. e però $MM' : Mq :: MO : ON$, inoltre $MM' : Mp :: OM : ON'$, e però $Mq : OM :: Mp : ON'$, per cui la (29) si muta nella (27) da cui si deriva la (28) e quindi la proporz. (A) Dunque anche dal principio delle velocità virtuali si ricava la condizione d'equilibrio —

(415.) (Fig. 70) §. 323. Se OM figuri una verga rigida [fissa] in O di guisa che circolar[mente] vi possa: il punto M in un movimento indeterminatamente piccolo descriverà un'arco indeterm. piccolo al quale si può sostituire il lato del poligono di un circolo di grandiss. lati; sia OM perpend. a BA che sarà tangente il circolo; ma il lato è nella direzione della tangente, dunque esso si farà lungo la tangente ad impedire il quale basta una forza nella direzione BA, cioè basta la (27).

(Fig. 71)



§. 324. Sieno due punti materiali M, M' sui piani inclinati che abbiano la stessa altezza CD ed in H vi sia una girella nella scanalatura della quale scorra una funicella flessibile che non soffri alcuna resistenza agli estremi della quale sono applicati i due punti M, M' sollecitati da due forze P, P'. Scomposte queste in due l'una perpend. al piano su cui giace il punto, e l'altra secondo la sua lunghezza, le componenti perpendi. saranno

(416.)

$P\theta\omega'$, $P'\theta\lambda'$, e quelle delle
direzioni dei piani
$P\theta\omega'$, $P'\theta\lambda'$. Nell'equilibrio
le due porzioni di corda CM
CM' esser debbono egualmen-
te tese, dunque è necessa-
rio che sussista la

(30) $P\theta\omega' = P'\theta\lambda'$. Se le due for-
ze P, P' sieno verticali, si ha
$\theta\omega' = \theta\omega$, $\theta\lambda' = \theta\lambda$, e perciò

(31) $P\theta\omega = P'\theta\lambda$; ma $\theta\omega = \frac{HD}{AH}$,
$\theta\lambda = \frac{HD}{HB}$, dunque sarà
$P\frac{HD}{AH} = P'\frac{HD}{HB}$, ovvero

(32) $\frac{P}{P'} = \frac{HB}{HA}$, che ha luogo
quando i pesi P, P' sono i
due corpi: la (32) mostra
ancora essere i pesi dei
due punti come le lun-
ghezze dei piani. ——
Ciò succede anche pei due
corpi fatta astrazione
dall'attrito. ——
Ciò si ha ancora col
mezzo delle velocità vir-
tuali: essendo le P, P'
verticali, se si figuri un
piccolo movimento dei
punti a, b, di guisa che
a passi in a', e b, in b'
e dai punti a', b' si pro-
traggano le a'p, b'p' sulle
direzioni verticali aq, bq,
delle forze si avranno le
projezioni presentate da ap,
ed ap'.

(417.)

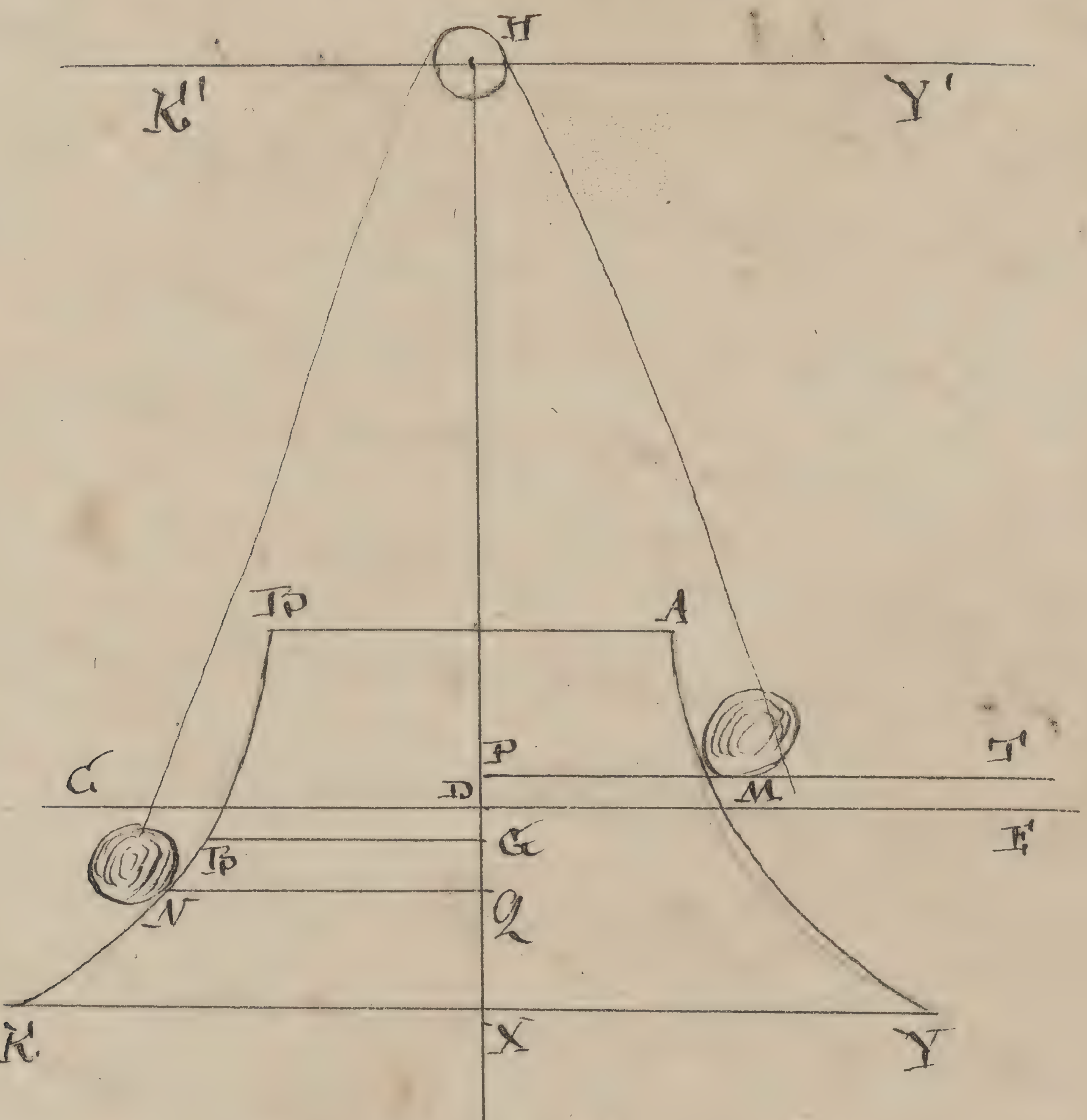
e quindi pel principio delle velocità virtuali, si avrà
$P.ap - P'.bp' = 0$; ma
$ap : aa' :: HD : AH$, e
$bp' : bb' :: HD : HB$ ed inoltre
$a'a = bb'$, dunque
$ap.AH = aa'.HD$, e
$bp'.HB = aa'.HD$, e però
$ap.AH = bp'.BH$ e quindi la

$$(32) \quad \frac{P}{P'} = \frac{AH}{BH}.$$

§. 326. Prima di terminare il Capitolo risolviamo il problema. Data la

(33) $y=\varphi(x)$ equazione della linea piana BNK sulla quale è situato un punto materiale N attaccato all'estremo di una corda che passa per la scanalatura della girella H senza sopportare sfregamento, essendo all'altro estremo attaccato il punto materiale M' essendo sollecitati solo dalla gravità. — Si vuole determinare la linea AMY sulla quale movendosi il punto M', tenga in equilibrio il punto N. Sia asse delle X, la verticale HX che passa pel centro della girella H, essendo positive le ascisse da H verso X, e K'Y' l'asse delle Y parallelo alla

(Fig. 72.)



orizzontale KY. Siano $x = HQ$
$y = NQ$ le coord.e del punto N;
$x_1 = HP$, $y_1 = PM$ quelle del pun-
to M.

Poniamo la lunghezza costan-
te della corda NHM = a
$NH = z$, $MH = z_1$, ed avremo
la

(34) $z + z_1 = a$. Si figuri che il
punto N discendendo passi un
archetto elementare della cur-
va BNK, e l'altro punto ascen-
dendo passerà un'archetto del-
la curva AMY. Ciascun ar-
chetto ~~sarà~~ d'avanti le velo-
cità dei due punti; le proje-
zioni loro saranno presen-
tate da dx, e dx_1, che
dovranno prendersi con se-
gni contrarj: i prodotti
delle projezioni delle veloci-
tà virtuali colle forze,
saranno presentati da
$N dx$, e $- M dx_1$; ma una
è nella direzione della forza
e l'altra nel suo prolunga-
mento, dunque avremo

(35) $N dx + M dx_1 = 0$, la primi-
tiva di q.ta sarà la

(36) $N x + M x_1 = C$. La quale ci
mostra, che in qualunque
posizione dei due punti ma-
teriali M ed N, la distanza da
H del centro di gravità dei
due punti è sempre la stessa.

(419.)

e si troverà sopra una orizzontale come G E. Vi è evidente che una cosiffatta distanza (centri gravità) viene rappresentata da

$$\frac{Nx + Mx_1}{N + M} = \frac{G}{N+M}.$$

Per costruire la linea AMY, che debbe aver principio al punto determinato A, si trovi prima la posizione della G E, ove giace il centro di gravità dei due punti,(a) e si avrà HD che pongo $= b$, ed avremo l'equazione

(a) quando il punto è in A,

(37) $\frac{Mx + Mx_1}{N+M} = b$, ovveramente

(38) $\frac{G}{N+M} = b$, d'onde

(39.) $G = b(N+M)$. Dalla (37) si ottiene la

(40) $x_1 = \frac{N(b-x) + Mb}{M}$; costruita la linea PNK che si suppone data sarà dato il valore di x che si pone NQ, dunque avremo

(41) $x_1 = HP = \frac{M(b - HQ) + Mb}{M}$, così si trovano gli altri punti della curva cercata.

Vediamo come si trovi col principio delle velocità virtuali. Allorchè più gravi agiscono gli uni sugli altri

il centro di gravità dell'essere
il più alto od il più basso, ed
in questo caso il più basso,
dunque la funzione
$\frac{Nx + Mx_1}{N + M}$ dev'essere un mi-
nimo, e però dev'essere
$N dx + M dx_1 = 0$. Equazione
dalla quale siamo partiti.

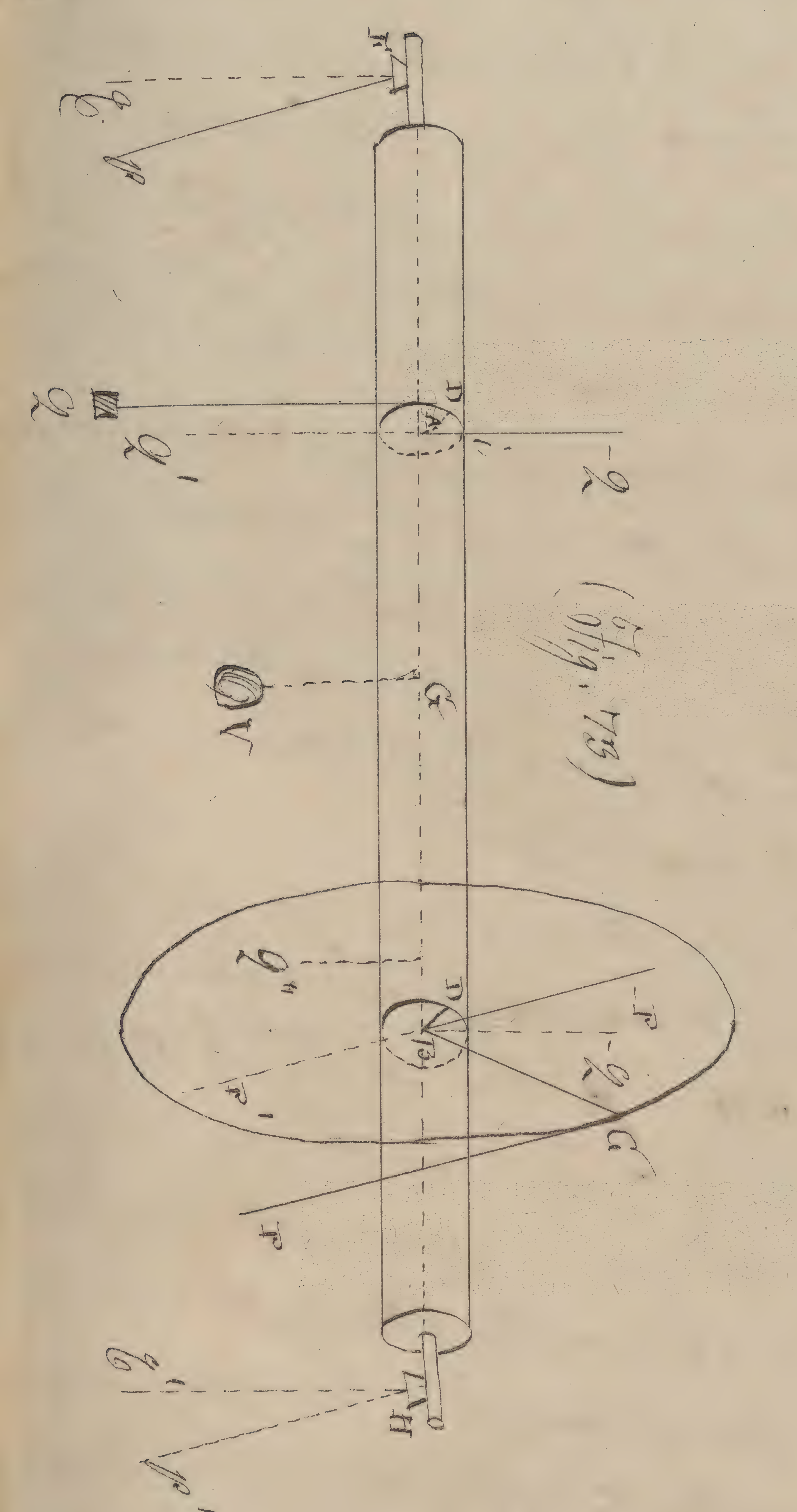
(121.)

Capitolo XXIV.

Dell' Asse alla Ruota

§. 325. Una ruota verticale infissa in un cilindro orizzontale il cui asse passa pel centro della ruota, alle cui estremità sieno due forti sostegni forma la macchina che dicesi asse nella ruota. Talvolta s'infiggono nel cilindro, ovvero della ruota delle manovelle che sono perpendi. alla di lui circonferenza che passano pel centro. — A questa si danno diversi nomi secondo la sua posizione, ed gli usi ai quali viene destinata. — Attaccato un capo della fune al cilindro, ed all'altro capo un peso, se una forza P perpendicolare al raggio della ruota agisca, la ruota girerà, e la corda si avvolgerà al cilindro. —

(Fig. 73.) Sia D il centro della ruota che è sull'asse del cilindro, e protratti i raggi DC ed AD questi riesciranno perpendicolari alla forza ed al peso. Trasportata la forza Q ad essere applicata in A, si avrà con ciò la forza Q' eguale e parallela alla Q, ed una coppia



(Q, Q) agente col braccio AD. —
Similmente, trasportata la forza P da G in B, si avrà una forza P' parallela ed uguale alla P ed una coppia (P,P'), che ha per braccio BG, raggio della ruota. Le due forze Q', P' applicate ai punti A, B dell'asse del cilindro che non può discendere perchè sostenuto dai due punti fissi F, H verranno elise da tal resistenza.

Le coppie (P, −P) (Q, −Q) debbono farsi equilibrio da se stesse. I piani delle due coppie sono paralleli, e però la coppia (Q, −Q) si può trasportare sul piano della (P, −P) e far in modo che il braccio dell'una cada sul braccio dell'altra, ed affinchè vi sia equilibrio, dovrà essere

(1) $P \cdot BG = Q \cdot AD$, d'onde ne viene

(A) $P : Q :: AD : BG$; cioè nell'equilibrio dell'asse nella ruota, la potenza sta alla resistenza, come il raggio del cilindro a quello della ruota. —

Lezione 71.

423

§. 327. Le due coppie (F, −F) (Q, −Q) elidonsi, e le sole forze F, Q possono caricare l'asse del cilindro sul quale poggia. — Dal che rendesi aperto che la pressione sofferta dall'asse nella ruota è la stessa delle forze fossero trasportate parallelamente a sè stesse sull'asse mantenendosi nei piani ad esso perpendicolari. Ad ottenere le pressioni sopportate dai due sostegni si scomponga la Q in due adessa parallele applicate in F, H, e così si scomponga la P in due s', s applicate ad essi punti e parallele: la risultante delle pq esprimerà la pressione sopportata da I, e la risultante delle s', e quella sopportata da H. —

§. 328. Alla cond. d'equilibrio dell'asse nella ruota si arriva anche col principio delle velocità virtuali. Immaginato un movimento infinitamente piccolo nella macchina, i due punti d'applicazione delle 2 forze descriveranno due archetti proporzionali ai raggi della ruota (a) rappresentati per p, q questi archetti, si avrà pel principio delle velocità virtuali

(a) e del cilindro. Le projezioni saranno i due lati del poligono circoscritti ai circoli. —

(124.)

(2) $Pp - Qq = 0$; ma $p : q :: BC : AD$,
dunque
$\frac{p}{q} = \frac{BC}{AD}$, per cui la (2) riducesi alla (1.)

§. 329. Si noti si è fatta astrazione dalla gravità della macchina. Poniamo che il centro di gravità della macchina sia uno dei punti dell'asse il che d'ordinario succede, e ciò non turba la (1.) ma porta cambiamento alla pressione sui sostegni.

Per determinare le pressioni in questo caso si ponga N il peso della macchina applicato nel centro G. Decomposta nelle q, q' a lei parallele ed applicate in F, H, la risultante delle p, q, q poscia tirate in direzione ed in intensità ne le pressione contro il fulcro F, e la risultante delle p, q, q' metteri davanti la resistenza del sostegno H. Di questa guisa si può determinare la robustezza dei sostegni.

§. 330. Se la forza P agisca mediante una corda, la (1) suppone le corde come linee materiali, benchè siano di diametro finito ed anche

considerevole affinchè non si rompano sotto l'azione delle forze. Considerate le corde come realmente sono, s'hanno da considerare le forze applicate agli ~~diametri~~ assi delle corde, ed in allora, le braccia delle coppie restano aumentate dai raggi delle corde. Sia r, il raggio della corda che si ravvolge intorno alla ruota, ed r' il raggio della corda che si ravvolge intorno al cilindro, ed in tal caso si averà la

(3) $P(r + CB) = Q(r' + AD)$;

se sia

(B) $r : r' :: BC : AD :: R : R'$, ne viene

$r = \frac{Rr'}{R'}$; ma dalla (3) si ha

$P : Q :: r' + R' : r + R'$; dunque avremo

$P : Q :: r' + R' : \frac{r'R}{R'} + R : R'(r' + \ldots$

$:: R' : R$, che è la (A).

Allorchè dunque ha luogo la (B) l'equazione dell'equilibrio si mantiene la stessa supposte le corde linee materiali.

§. 331. Consideriamo ora l'asse della ruota animato da

(425.)

quante si vogliano forze ad esso applicate in piani perpendicolari all'asse, e si avranno tante forze applicate all'asse che verranno distrutte dalla di lui resistenza. Le coppie introdotte sono tutte su piani paralleli, ed inallora trasportate sullo stesso piano la risultante loro sarà la loro somma, cambiando segni rispetto alle pressioni sui sostegni è patente che sarà la stessa la pressione se vengano trasportati in essi parallelamente. —

Se le forze sono in piani qualunque, si determineranno le condiz. dipendentemente dal detto §. 116.

§. 339. Le ruote dentate non sono che un composto di dischi assi nella ruota, aggiunti gli uni sugli altri. La macchina si compone di una ruota non dentata, tangenzialmente alla quale è applicata una potenza, la qual ruota porta nel suo centro infisso un rocchetto, fra i denti o le ale del quale s'incastrano i denti di una 2.ª ruota, che come la 1.ª ha il proprio rocchetto, e così di seguito fino

$R(V'+R')$

all'ultima ruota dentata, la quale invece del rocchetto porta infissa una ruota a cui è attaccata la resistenza che supporremo il peso. ~~[illegible]~~ I denti sì della ruota, che dei rocchetti si supporranno in direzione a loro normale.

Sia P la forza applicata alla prima ruota non dentata, e sieno R, R', R'' & i raggi di questa e delle altre dentate, e sieno r, r' i raggi dei rocchetti e dell'ultima ruota, che porta il peso, e sieno p, p' & le resistenze applicate ai denti dei rocchetti e ultima ruota, e si avrà

$PR = pr$. Si osservi che la P che tende a muovere la 1.a ruota, tende pure a muovere il 1.o rocchetto, e la p è la resistenza che ~~[illegible]~~ oppone la seconda ruota ~~rocchetto~~, e questa ~~[illegible]~~ ~~seconda ruota, e [illegible]~~.

Per l'equilibrio adunque essere dovrà

$pR' = p'r'$ e così di seguito passando innanzi onde per l'equilibrio si avrà

$$PR = pr,$$
$$pR' = p'r'$$
$$p'R'' = p''r''$$
$$p''R''' = p'''r'''$$

$F^{(m-1)} R^{(m)} = p^{(m)} r^{(m)}$

Moltiplicando insieme queste equazioni, e levati i fattori comuni, si ha la

(4) $F . R . R' - - - R^{(m)} = p^{(m)} (r . r' . r'' - r^{(m)})$

e quindi

$F : p^{(m)} :: r . r' . r'' - - r^{(m)} : R . R' . R'' - - - - R^{(m)}$.

§. 333. Sia una ruota alla cui circonferenza venga applicata una potenza in direzione tangenziale, ed al centro di essa sia applicata un rocchetto le cui ale s'incastrano con quelle di un'altra ruota, e l'ultima è una ruota o un cilindro infisso nel proprio centro. Sieno $n, n', n'' - - - n^{(m)}$ i numeri dei denti del 1°. 2°. 3°. - - $(m+1)$^{esimo} rocchetti; ed $N', N'', N''' - N^{(m)}$ i numeri dei denti della 1ª. 2ª. 3ª. - - - $(m+1)$^{esima} ruota dentata. — Nel mentre che la ruota (1ª) fa una rivoluzione, farà pure una rivoluzione il rocchetto di lei; ma la 1ª ruota dentata non farà che $\frac{n}{N'}$ di rivoluzione; se adunque la 1ª ruota faccia c rivoluzioni la 1ª ruota dentata farà $C = \frac{nc}{N'}$, onde avremo

$C : c :: n : N'$.

Così mentre la 1ª ruota dentata fa $\frac{nc}{N'}$ rivoluzioni così farà il suo rocchetto, e

429.

la 2.a ruota dentata farà
$c'=\frac{u'u''c}{N'N''}$ rivoluzioni, e si avrà
$c':c::u'u'':N'N''$, e così di seg.

(S) $c^{(m)}=\frac{u'u''u'''\ldots u^{(m-1)}c}{N'N''\ldots N^{(m-1)}}$, da cui
nasce la proporzione
(D) $c:c^{(m)}::N'N''N'''\ldots N^{(m-1)}:u'u''u'''\ldots u^{(m-1)}$

Da cui mostrasi che la relazione di un N.o di rivoluzioni del 1.o rocchetto, o della 1.a ruota, a quelli dell'ultima ruota, è quella del prodotti del numero dei denti di tutte le ruote, al prodotto del N.o dei denti di tutti i rocchetti.

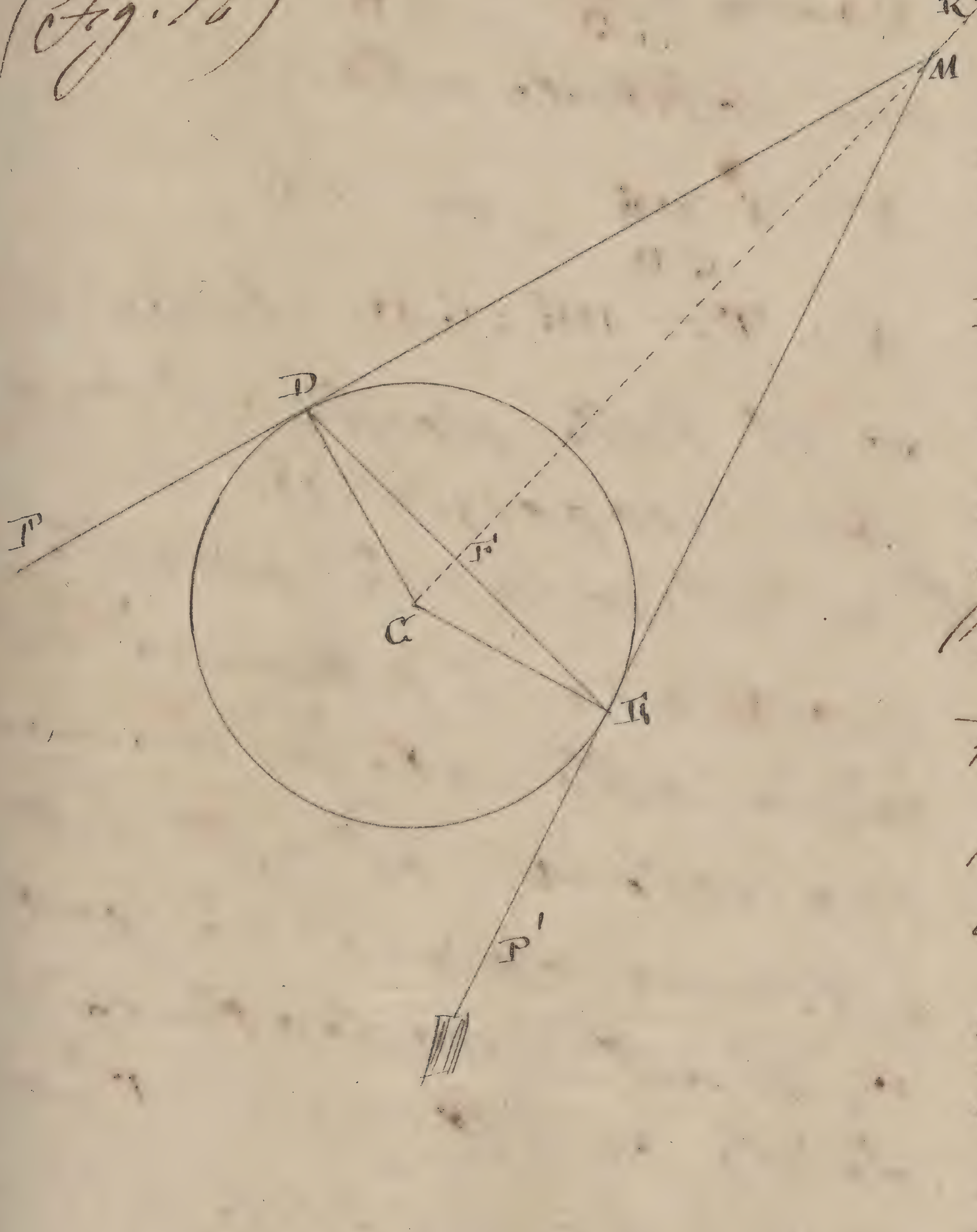
§. 334. La (S) serve in generale a determinare una delle quantità, c, $c^{(m)}$, $u'u''u'''\ldots u^{(m-1)}$, $N'N''N'''\ldots N^{(m-1)}$ date le altre 3. Allorchè è dato $\frac{c^{(m)}}{c}=a$ il numero delle ruote e dei rocchetti non va soggetto ad altra cond.e che alla seg.e
$a.N'N''N'''\ldots N^{(m-1)}=u'u''u'''\ldots u^{(m-1)}$,
ove sì le N che u devono essere numeri interi e di conseg.a il problema riesce indeterminato.

Capitolo XXV.
Delle Taglie

§. 335. La taglia è una macchina che componesi di girelle scanalate, alcune mobili, ed altre fisse ovveramente di castelli contenenti più girelle fisse nelle scanalature delle quali si adatta una corda di cui un estremo è applicato ad un punto fisso ed all'altro è applicata la potenza. Un peso è attaccato ad un capo della fune o ad una delle girelle, o ad uno dei castelli mobili, e dicesi resistenza.

La girella fissa è quella il cui centro, o la cui armatura o cassa, è fissa.

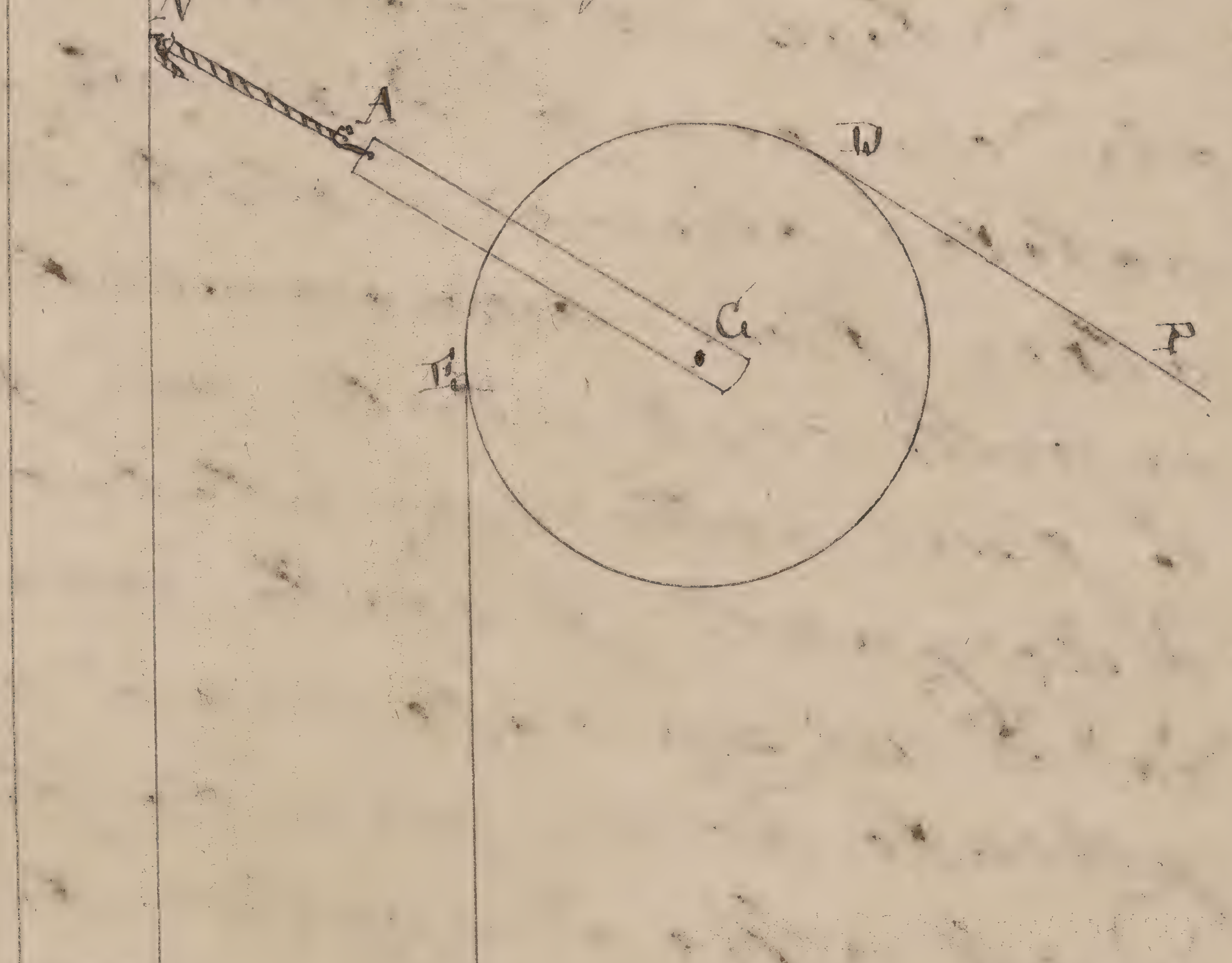
(Fig. 76)



Nella girella fissa nel presente qualunque sia ecc. delle potenze e forze applicate la porzione di corda DE dev'essere egualmente tesa nei punti D, E, supposto non esservi attrito.

La pressione contro il centro C della girella fissa, cioè l'attual reazione che esercita questo punto contro gli sforzi uniti della potenza e resistenza, è chiamata e eguagliar deve la risultante delle tensioni in D ed E, le quali essendo eguali, la

(Fig. 75)



reazione avrà la direzione della retta che unisce il centro C col punto M di concorso delle tangenti la girella in D, E che partisce per metà l'angolo DME.

Nel caso presente la girella si metterà da se alla posizione d'equilibrio.

Sia 2ω l'angolo d'inclinazione delle due tangenti in D ed E, e sia T la tensione della fune DE ed N la pressione rapportata al centro C, e si avrà

$N : T :: \theta 2\omega : \theta\omega$. S. 13, e quindi

(1.) $N = \frac{T\,\theta 2\omega}{\theta\omega} = 2T\theta\omega$.

Da C si conduca la CM, i raggi CD, CE, e la corda DE. Il triangolo CDF è simile al CDM, e però l'angolo CDF = CMD, e però

$2\theta\omega = \frac{2FD}{CD} = \frac{DE}{CD}$,

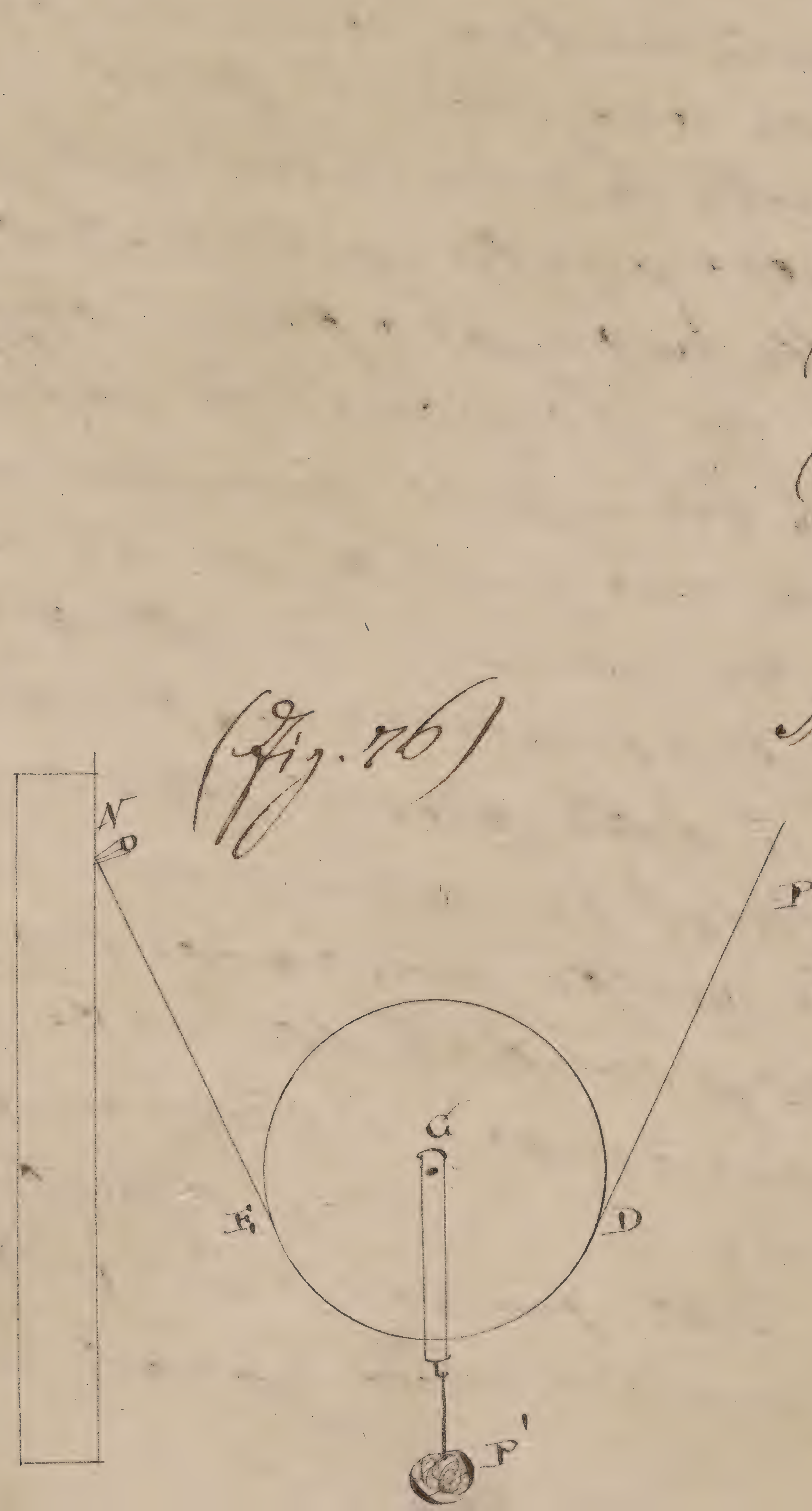
che sostituito nella (1) ne verrà

(2) $N = T\frac{DE}{CD}$, da cui

(A) $N : T :: DE : CD$. Anche nel caso 2° della girella si ha questa proporzione.

§. 336. Allorchè la girella è mobile e l'estremo della corda attaccato ad un appiccagnolo N, ed all'altro estremo agisca la potenza P, ed all'incassatura penda la resistenza P', nel caso dell'equilibrio la P' tien luogo della forza N

(Fig. 76)



(432)

ed una tensione in E o D rappresentata dalla P, ~~ritenu~~te adunque le rappresentanti precedenti si ha

(3) $P' = 2P\cos w$

(B) $P : P' :: 1 : 2\cos w$. Concluderà adunque si debbe

1º Che la potenza e resistenza nella girella fissa all centro esser debbono eguali e la potenza debbe stare alla resistenza del pieno :: ~~1~~ $2\cos w : 1$

Lo stesso vale egualmente per la girella attaccata col mezzo di una fune all'appiccagnolo.

2º Nella girella mobile la ragione della potenza alla resistenza è come il raggio al doppio coseno della metà angolo formato dalle direzioni delle funi.

Da ciò si vede che le girelle fisse non avvantaggiano la potenza, ma le può benssi dare qualunque direzione. Per la mobile se $w = 60°$ $\because \cos w = \frac{1}{2}$ si ha $P' = P$ dalla (3): se $w = 0$, $P = \frac{1}{2} P'$.

Rendesi quindi aperto che la più piccola potenza che possa equilibrare la resistenza colla girella mobile è quando $w = 0$, che è $P = \frac{1}{2} P'$ ed in allora le due corde sono parallele —

Lezione 72.

(433.)

§. 337. Figuriamo un sistema di girelle mobili, alla prima delle quali sia circondotta una corda, ad un estremo della quale è fissa la potenza, e all'altro un punto fisso. Ciascuna delle altre girelle è circondotta da una fune uno dei cui estremi è fisso alla cassa precedente e l'altro estremo è ad un punto fisso; finalmente all'ultima cassa pende un peso. Nell'equilibrio la potenza equivale alla tensione della fune compresa fra la 1ª e la 2ª girella. Siano n di numero le girelle mobili, e siano P, P', P'', --- e $P^{(n-1)}$ le tensioni comprese fra girella e girella; siano 2ω, $2\omega'$, $2\omega''$... --- $2\omega^{(n-1)}$ gli angoli che fanno due porzioni di corda prolungate, e detta Q la resistenza si avrà

$$P' = 2P\theta\omega,$$
$$P'' = 2P'\theta\omega'$$
$$P''' = 2P''\theta\omega''$$
— — — —
$$P^{(n-1)} = 2P^{(n-2)}\theta\omega^{(n-2)}$$
$$Q = 2P^{(n-1)}\theta\omega^{(n-1)},$$

le quali moltiplicate insieme e levati i fattori comuni ne nasce, le

(4) $Q = 2^n \theta w \theta w' \theta w'' \ldots \theta w^{(n-1)} P$.
Il valore di Q diventa massimo quando $w = w' = w''$ &c $= 0$; ed in allora si ha la

(5) $Q = 2^n P$, d'onde la

(6) $P = \frac{Q}{2^n}$. La più piccola potenza sufficiente a sostenere il peso, ha luogo quando le corde sono parallele.

§. 338. Se la taglia compongasi di $2m$ girelle, metà mobili e metà fisse essendo ciascuna circondotta dalla med.ma corda un estremo della quale sia fisso ad un appicagnolo, ed all'altro sia la forza P, ad ogni cassa delle girelle mobili siano applicati i pesi $P, P' \ldots$ &c $P^{(m)}$, e pel detto si avrà

$P' = 2P\theta w'$
$P'' = 2P\theta w''$
$P''' = 2P\theta w'''$
$\ldots\ldots$
$P^{(m)} = 2P\theta w^{(m)}$, poichè le tensioni delle porzioni di corda fra girella e girella sono eguali alla 1.a P, e però
$P' : P'' : P''' : \ldots : P^{(m)} ::$
$\theta w' : \theta w'' : \theta w''' \ldots : \theta w^{(m)}$.
Sommando le precedenti equazioni, si ha la

(435)

(7) $P' + P'' + P''' + \text{———} + P^{(m)} =$
$2P(\theta\omega' + \theta\omega'' + \theta\omega''' + \text{----} + \theta\omega^{(m)})$
e quindi
$P' + P'' + P''' + \text{—}\&c + P^{(m)} : P ::$
$\theta\omega' + \theta\omega'' + \theta\omega''' + \&c + \theta\omega^{(m)} : \frac{1}{r}$

Dalle equazioni che danno $P', P'' - \&c\ P^{(m)}$ si hanno le

$P' : P :: \theta\omega' : \frac{1}{r}$

$P'' : P :: \theta\omega'' : \frac{1}{r}$

$P''' : P :: \theta\omega''' : \frac{1}{r}$

— —— — ——

$P^{(m)} : P :: \theta\omega^{(m)} : \frac{1}{r}$, laonde:

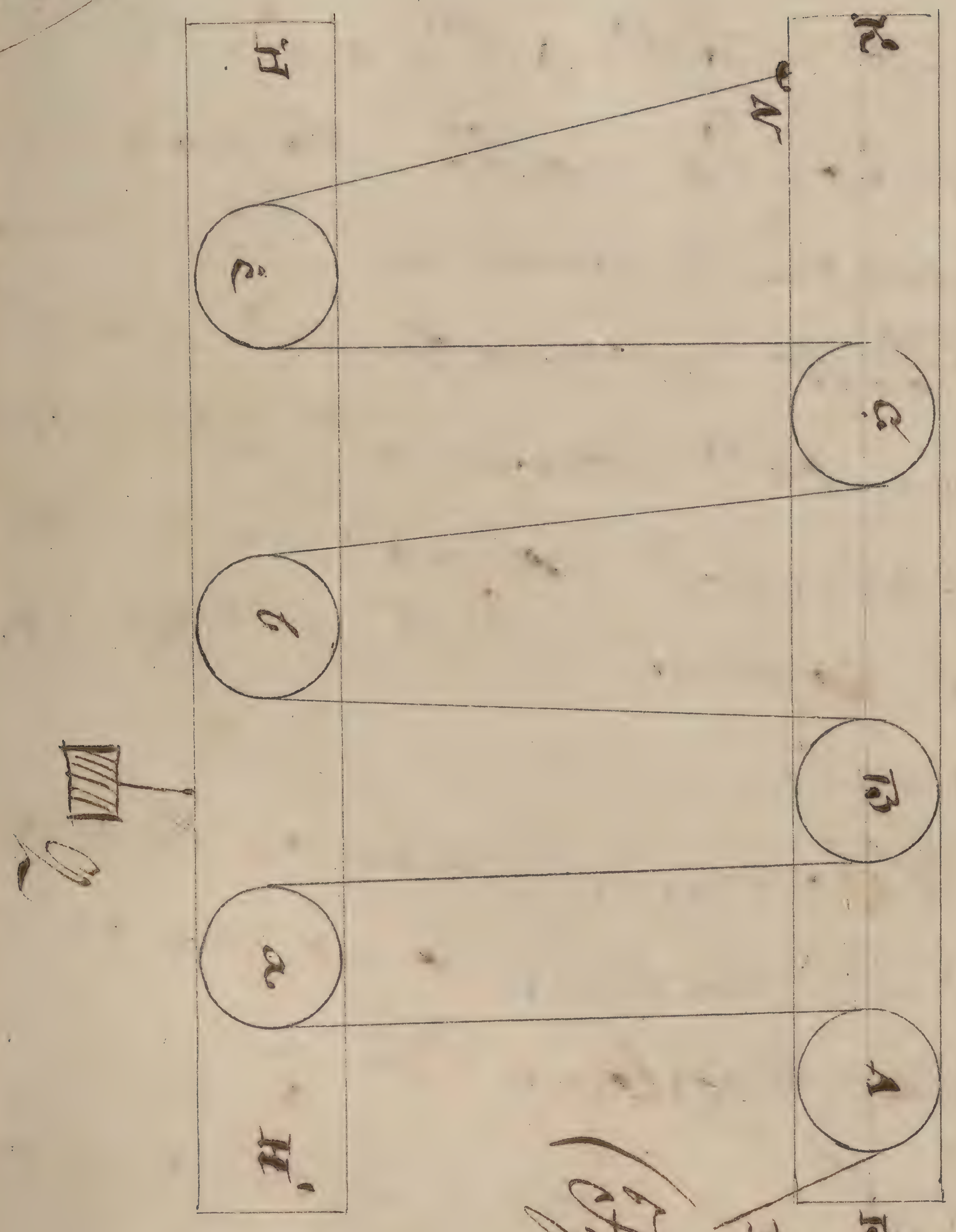
1°. Le resistenze sono fra loro come i coseni degli angoli $\omega', \omega'', \omega''' - \&c\ \omega^{(m)}$.

2°. La somma delle resistenze sta alla potenza come la somma dei coseni degl'angoli $\omega', \omega'', \omega''' \&c$ sta alla metà del raggio.

3°. Ciascuna potenza sta alla resistenza come il coseno dell'angolo fatto dalle due corde sta al mezzo raggio.

§. 239. Sia la taglia formata di guisa che l'armatura kk' (fig. 77.) che contiene le girelle fisse A, B, C &c rimanga immobile; e la H, H' che contiene le girelle mobili ~~fisse~~ a. b, c &c sia mobile,

(136.°)



(Fig. 77)

ad essa sia attaccato un peso Q; ed un estremo della corda sia attaccato ad un'armatura ed all'altro sia attaccata la potenza P. Il peso dell'armatura mobile, è una forza parallela alla Q; sia R la somma di queste due forze, e supponiamo che questa resistenza agisca uniformemente sulla somma della forza Q, e della massa HH'. Per l'equilibrio, le porzioni di corda comprese fra l'appiccagnole e le girelle saranno egualmente tese, e tale tensione sarà misurata dalla forza P. Siano $\delta, \delta', \delta''$ &c gli angoli che fanno colla direzione della resistenza R le porzioni della corda che vanno da un'armatura all'altra (senza P), le componenti di P parallele alla direzione verticale della resistenza R saranno la P moltiplicata pei coseni degl'angoli $\delta, \delta', \delta''$ &c e sono $P\cos\delta, P\cos\delta', P\cos\delta''$ &c; verrà dunque impedito il moto parallelo della resistenza R, se si abbia

$$R = P\cos\delta + P'\cos\delta' + P''\cos\delta'' \text{ \&c}$$

(437.9)

da cui

$R : P :: \theta\delta + \theta\delta' + \theta\delta'' \ldots \zeta : 1$.

Laonde nella taglia, considerata la somma del peso Q e dell'armatura mobile questa somma sta alla potenza; come la somma dei coseni $\delta, \delta', \delta'' \ldots \zeta$ sta al raggio.

§. 340. Allorchè le prefate porzioni di fune sono parallele alla direzione di Q, si ha $\delta = \delta' = \delta'' = \ldots \zeta = 0$, e per i loro coseni, ciascheduno $= 1$; e però se sia n, il numero delle porzioni di corda che vanno da un'armatura all'altra; si avrà la

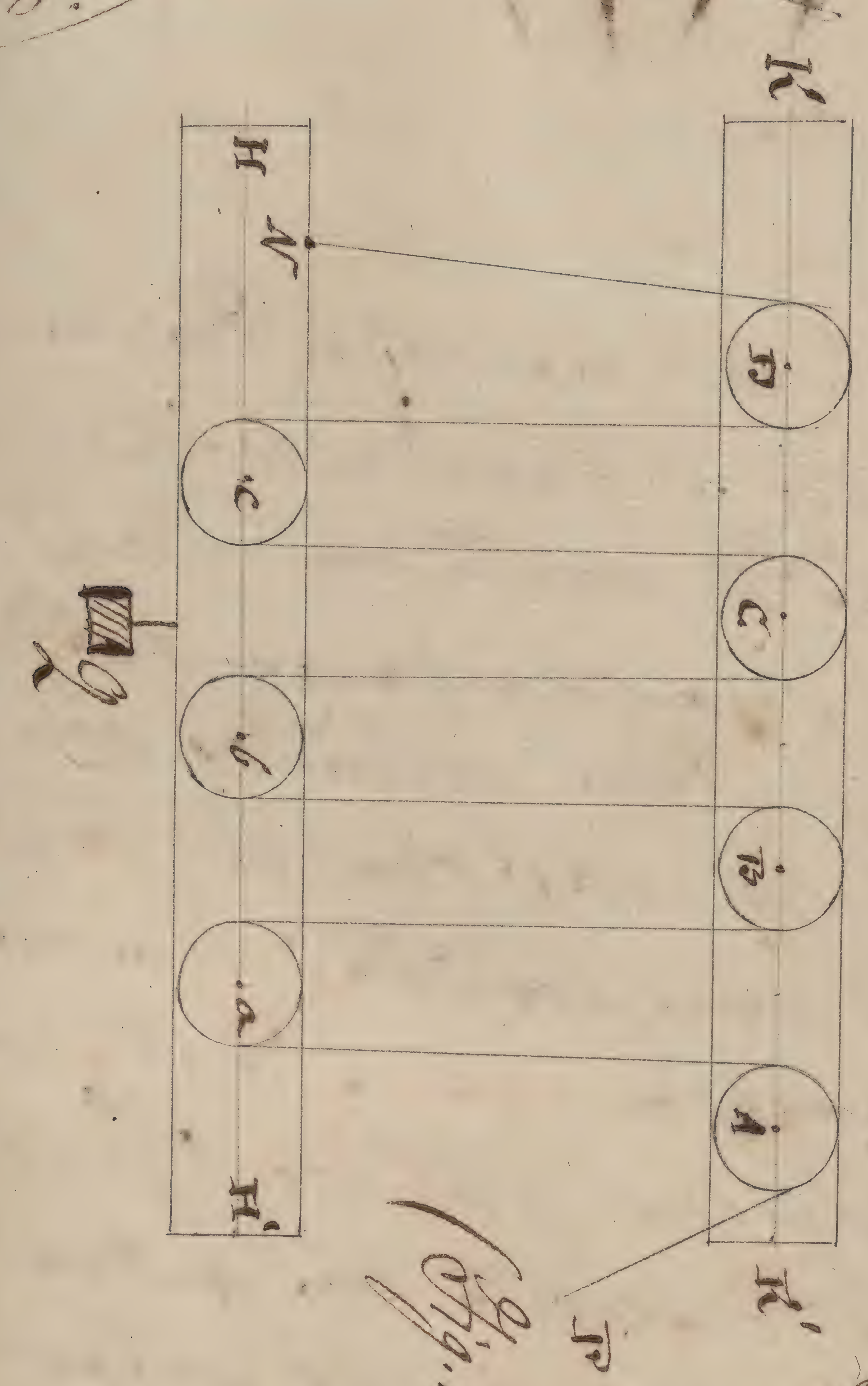
(9) $R = nP$, e però

$R : P :: n : 1$.

Rendesi quindi aperto, che quando le porzioni di corda che vanno da un'armatura all'altra sono parallele a Q, la resistenza sta alla potenza :: il numero delle porzioni di corda che terminano alle armatura sta all'unità. Se l'estremo fisso sia attaccato all'armatura fissa

(fig. 71.) inallora la girelle mobili

fono le metà dei tratti di fune che vanno da armatura ad armatura. Dunque detto r il numero delle girelle mobili, si avrà $n = 2r$, e però $R : P :: 2r : 1$. Se poi l'estremo della fune sia applicato alla cassa mobile si ha $n = 2r+1$, e però (Fig. 78.) $R : P :: 2r+1 : 1$. Si ha dunque vantaggio per la potenza attaccando l'estremo della fune all'armatura mobile. ——



(Fig. 78)

§. 341. Siccome le taglie servono nell'uso ad innalzare grandi pesi; così si pongono i tratti di fune paralleli

Capitolo XXVI
Della Vite

§. 341. Su la superficie di un cilindro retto a base circolare figurasi descritta un'elica che abbia cominciamento dalla base del cilindro con questa legge, che fra le sue spire si comprenda sempre una porzione = h della generatrice il cilindro. Immaginata descritta un'altra elica, che fra le sue spire comprenda sempre una parte $\frac{h}{2}$ della generatrice il cilindro, se incavasi fino ad una certa profondità la porzione di cilindro compresa fra le due eliche, ovveramente, se l'incavo si pratichi di guisa che la 1.ª elica termini uno spigolo sporgente, e che giaccia sulla superficie del cilindro, ed uno spigolo entrante che sarà sull'elica di una seconda che sarà sulla superf. di un cilindro a base minore, ne risulterà la vite. La lunghezza h, dicesi passo

della *vite*, e la parte inca-
vata del cilindro di maggior
base, ovveramente lo spigo-
lo che giace su tale superf.
dicesi *verme* o *maschio della*
vite, *quadrato* nel 1.° caso
e *triangolare* nel 2.° —

Se alla superf. conca-
va di un cilindro vuoto, si
pratichi un verme che si
adatti all'incavato dell'
altro, dicesi madrevite.

La vite colla sua ma-
drevite serve a compri-
mere i corpi, e talvolta
ad elevare de' pesi. —

La potenza P è d'ordina-
rio applicata ad una manovella
fissa alla vite o alla *ma-*
drevite, secondo che quella
o questa sia mobile. In o-
gnuna di queste due suppo-
sizioni la potenza agisce
nello stesso modo, e però
potremo supporre ad arbitrio
fissa la vite e mobile la
madrevite e per converso. —

§. 342. Le condizioni per l'equili-
brio della vite determinare
si potrebbero considerando
che essa partecipa della
leva e del piano inclinato.
ma col mezzo delle velo-
cità virtuali assai facil-
mente si attinge lo scopo.

Sia una manovella della lunghezza L conficcata nella vite fissa a computare dal suo asse, ed essa perpend. La direzione della potenza sia perpend.e alla manovella e situata in un piano perpend.re all'asse della vite. Sia P la potenza, R la resistenza, ed h il passo della vite: Supponiamo che s'abbia equilibrio mediante la vite fra la potenza e la resistenza; si rompa esso di modo che la potenza P scorra un'archetto indeterminatamente piccolo del circolo che ha L per raggio, che verrà presentato da $\frac{2\pi L}{w}$, essendo w indeterminato grande. La resistenza R, passerà allo spazio $\frac{h}{w}$ parallelo all'asse della vite cioè alla direzione della resistenza: Onde $\frac{h}{w}$ sarà la projezione della velocità virtuale sulla direzione della resistenza stessa, e cadrà sul suo prolungamento; l'archetto $\frac{2\pi L}{w}$ può considerarsi come un lato del poligono circoscritto al circolo della forza, e che

(442.)

nella direzione della tangente cioè della potenza P; ma questo latercolo è la projezione di lui; dunque la projezione dell'archetto $\frac{2\pi L}{\omega}$ sulla direzione della P può esser rappresentato da lui, dunque pel principio delle velocità virtuali avremo la

(1.) $\frac{2\pi L}{\omega} P - \frac{b}{\omega} R = 0$, ossia la

(2.) $2\pi L\, P = bR$. Dunque

$P : R :: b : 2\pi L$; e però la potenza alla resistenza sta :: il passo della vite alla circonferenza del raggio L.

Nel caso che la potenza e la resistenza non avessero le prefate direzioni sarebbe necessario scomporre le 2 forze, e tener conto solo delle forze che agiscono in tali direzioni essendo distrutte le altre dalla resistenza degli appoggi.

§. 313. La vite perpetua si compone di una vite, che solo può rotare intorno al proprio asse, il maschio della quale s'incastra fra i denti di una ruota che gira intorno al proprio centro in cui è infisso un cilindro o ruota al quale viene applicata la resistenza —

445.

Dando moto alla vite mediante la potenza applicata a manovelle si communica la spazzione alla resistenza Q. —

Sia P la potenza applicata perpend.e alla manovella all'estremità di lei e diretta in un piano perpend.e alla vite come preced.e R il raggio della ruota, r il raggio del cilindro a cui trovasi applicata la resistenza. Si ponga la potenza P applicata come prec. La resistenza Q' che oppongono i denti della ruota, considerare si può nella direzione dell'asse della vite, e di conseguenza si avrà la

(3) $2\pi l.P = hQ'$, e però

(4) $Q' = \frac{2\pi l.P}{h}$, la qual forza debbe tener in equilibrio lo sforzo della vite. Considerandola all'estremo del raggio R della ruota dentata e considerando che essa è prodotta dalla resistenza Q, dovrà essere

(5) $Q'R = Qr$, e però la

(6) $\frac{2\pi l.P}{h} R = Qr$, e però

$P : Q :: hr : 2\pi l.R$, il che mette davanti essere la ragione della potenza alla resistenza, quella del prodotto il passo della vite nel raggio della ruota infissa alla

(Atlante)

dentata, al prodotto del circolo che ha p. raggio la distanza dall'asse della vite del punto di applicazione della resistenza nel raggio della ruota dentata.

§. 344. Figurando più ruote dentate delle quali solo l'ultima fossero nei centri infissi dei rocchetti, fra i denti delle quali s'incastrassero i denti delle ruote, ed all'ultima delle quali fosse infisso un cilindro o ruota, si vedrebbe essere la potenza $P : Q ::$ il prodotto del passo della vite nei raggi di tutti i rocchetti e del cilindro, al prodotto della circonferenza che ha per raggio la distanza del punto di applicazione della potenza P dall'asse della vite, e dei raggi di tutte le ruote dentate.

Infatti, si osservi, che nell'equilibrio, la potenza applicata alla 1.a ruota e che agisce nella direz.e dell'asse della vite, cioè tangenzialmente alla 1.a ruota esser deve nell'equilibrio eguale alla resistenza che oppone la 1.a ruota in quella direzione, e però sarà

$Q' = \frac{2\pi L P}{\;}$, siano $R', R'', R''' \ldots R^{(n)}$, i raggi delle ruote dentate, ed $r', r'', r''' \ldots r^{(n)}$

quelli dei rocchetti e del cilindro.
Nell' equaz.^e (4) del §. 332.
a vece di PR porre si deve
$\frac{2\pi L F}{h}$, e quindi avremo
la

(7) $\frac{2\pi L P}{h} \cdot R \cdot R' \cdot R'' \text{---} R^{(m)} =$
$P^{(m)} r \cdot r' \cdot r'' \cdot r''' \text{---} r^{(m)}$;
ove $P^{(m)}$ rappresenta la
resistenza applicata all'
ultima ruota. Da questa
si ha la proporzione
$P : P^{(m)} :: r \cdot r' \cdot r'' \text{---} r^{(m)} : 2\pi L R' R'' R'''$;
come etc ———

Capitolo XXVII.

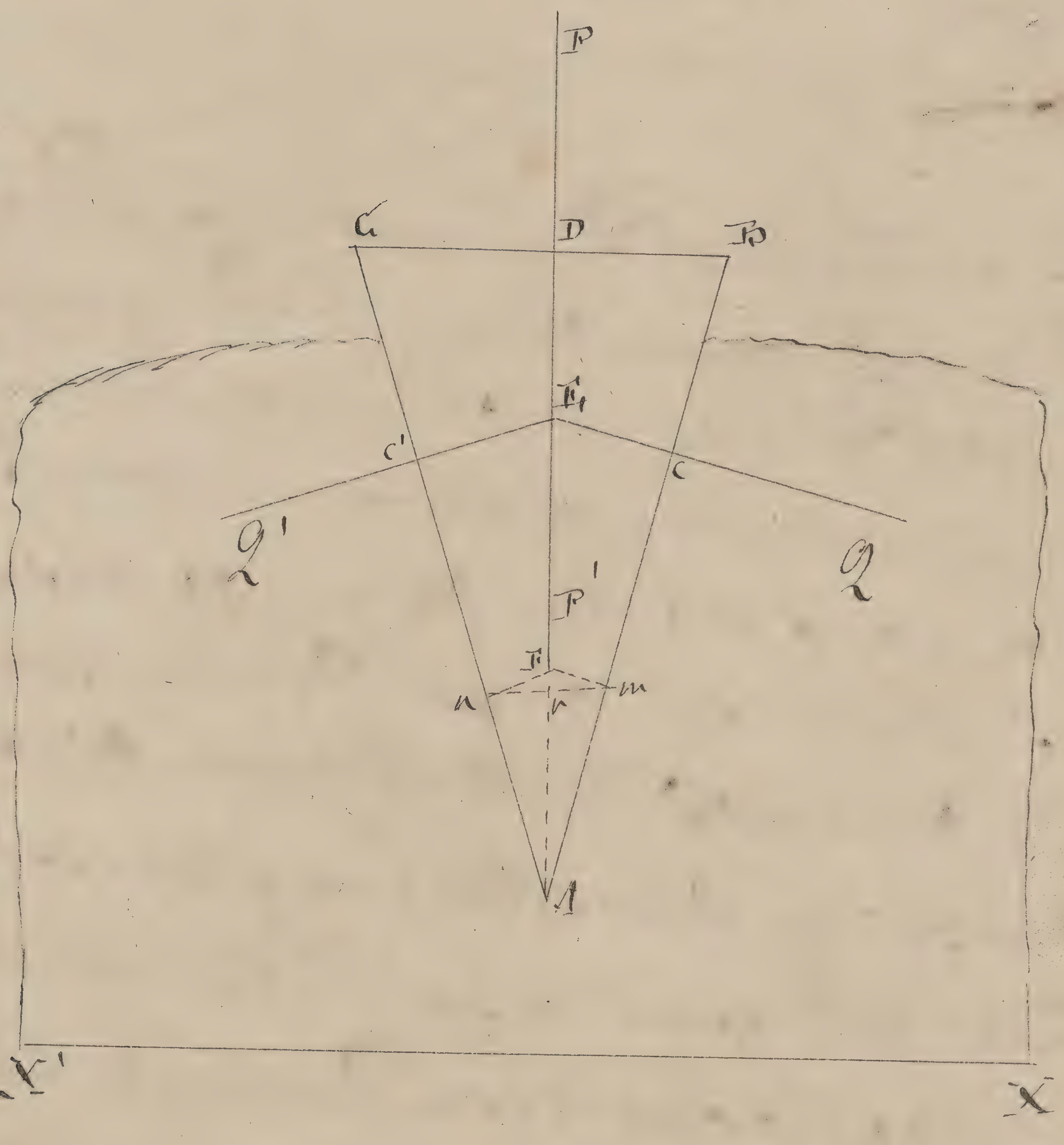
Del Cuneo

§. 346. La teorica del cuneo, considerata relativamente ai solidi, che per mezzo di lui si fendono, dipende da cognizioni fisiche, le quali non sono bastantemente chiare, ciò sono, la forza di coesione, la tenacità delle differenti sostanze & Sarebbe necessario tentare in ogni caso delle esperienze che ponessero davanti la natura dei corpi che si vogliono fendere. Prescindendo da tutto ciò, supporremo che i lati del cuneo siano a contatto colle parti del solido che fendere si deve, le quali parti oppongono una resistenza di cui valuteremo la intensione, senza aver riguardo alle proprietà fisiche.

Lezione 73.

Sia il cuneo il cui profilo è presentato dal triangolo CAB sollecitato da una forza P che lo spinga entro il solido UU sopra il piano XX (fig. 79). Supporremo la potenza perpend.e alla BC poiche si potrebbe scomporre in 2 una perpend. e l'altra oriz.le

(Fig. 79)



La P si comunica al solido che il cuneo fende; per mezzo dei punti di contatto del cuneo e del solido. I due lati GA, BA rappresentano due piani inclinati di comune altezza, sui quali i due punti c, c' sono spinti dalla forza colla quale le parti del solido tendono a ravvicinarsi. Se i due piani inclinati sono immobili, essi esser debbono perpendicolari ai lati stessi; e perciò se dai punti c, c' si innalzino le perpendicolari cE, c'E essi rappresenteranno tali sforzi; ma la potenza P nell' equilibrio equilibrar debbe queste due pressioni; laonde il punto E di concorso delle due forze esser debbe nella direzione della P e nello stesso piano, per l'equilibrio, e perciò avremo

$P : Q' : Q :: \emptyset Q'EQ : \emptyset QEP : \emptyset Q'EP$

pel §. 13. Ma gli angoli $Q'EQ$, QEP, $Q'EP$ sono rispettivamente supplementi degli angoli GAB ed E; e però

$P : Q' : Q :: \emptyset A : \emptyset B : \emptyset G$: ma

$\emptyset A : \emptyset B : \emptyset G :: GB : GA : BA$

dunque avremo

$P : Q' : Q :: GB : GA : BA$: e quindi,

$P : Q' :: GB : GA$,

$Q' : Q :: GA : BA$, onde

$Q+Q' : Q' :: GA+BA : GA$, e

$Q' : GA :: Q+Q' : GA+BA$. —

Ma $Q' : GA :: P : BG$, dunque

$P : GB :: Q+Q' : GA+BA$; e però

$P : Q+Q' :: GB : GA+BA$. —

Il che mostra che la forza P che esercita la sua azione perpend.e alla testa del cuneo nell'equilibrio sta alla somma delle resistenze che si oppongono all'introduzione di lui e ad essi perpendicolari, come la testa del cuneo sta alla somma dei due lati. —

Si osservi, che per tutti i triangoli della stessa base e stessa altezza la resistenza è minima, nel t. isoscele e però la P ha una ragion maggiore alla somma delle resistenze, ed in tal caso si ha la minima potenza per l'equilibrio, e però in tal caso

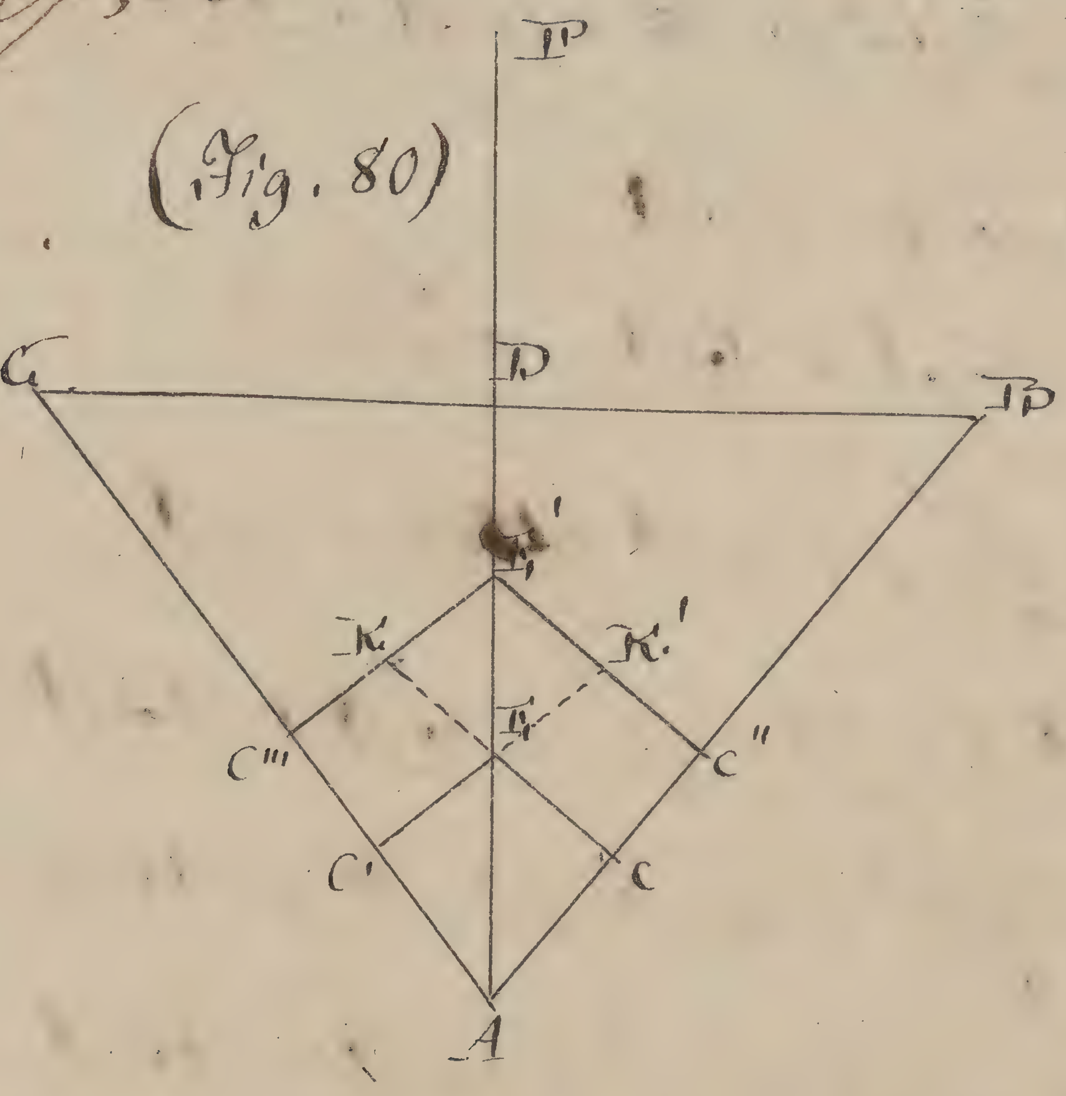
$P : Q+Q' :: GB : 2AB$, ovvero

$P : \frac{Q+Q'}{2} :: GB : AB$; se

$Q = Q'$

$P : Q :: GB : AB$. —

(449)



(Fig. 80)

§. 326. Vediamo come ciò si trovi col mezzo delle velocità virtuali. Sia E (fig 80) il punto di concorso delle tre forze P, Q, Q; giacchè Q' = Q si suppone, che abbia passato lo spazio indeterminatamente piccolo EE'. Da E si protraggano le perpendicolari EK, EK' che sono eguali, alle E'C', E'C'' perpendicolari ai lati, e queste saranno gli spazj passati in queste direzioni dalle Q, e però pel principio delle velocità virtuali, si avrà

$$P.EE' - 2QE'K' = 0, \text{ e però}$$

$$Q = \frac{P.EE'}{2E'K'};$$

ma i due triangoli DAB, EE'K' sono simili

$$E'E : E'K' :: AB : BD :: 2AB : CB,$$

e però

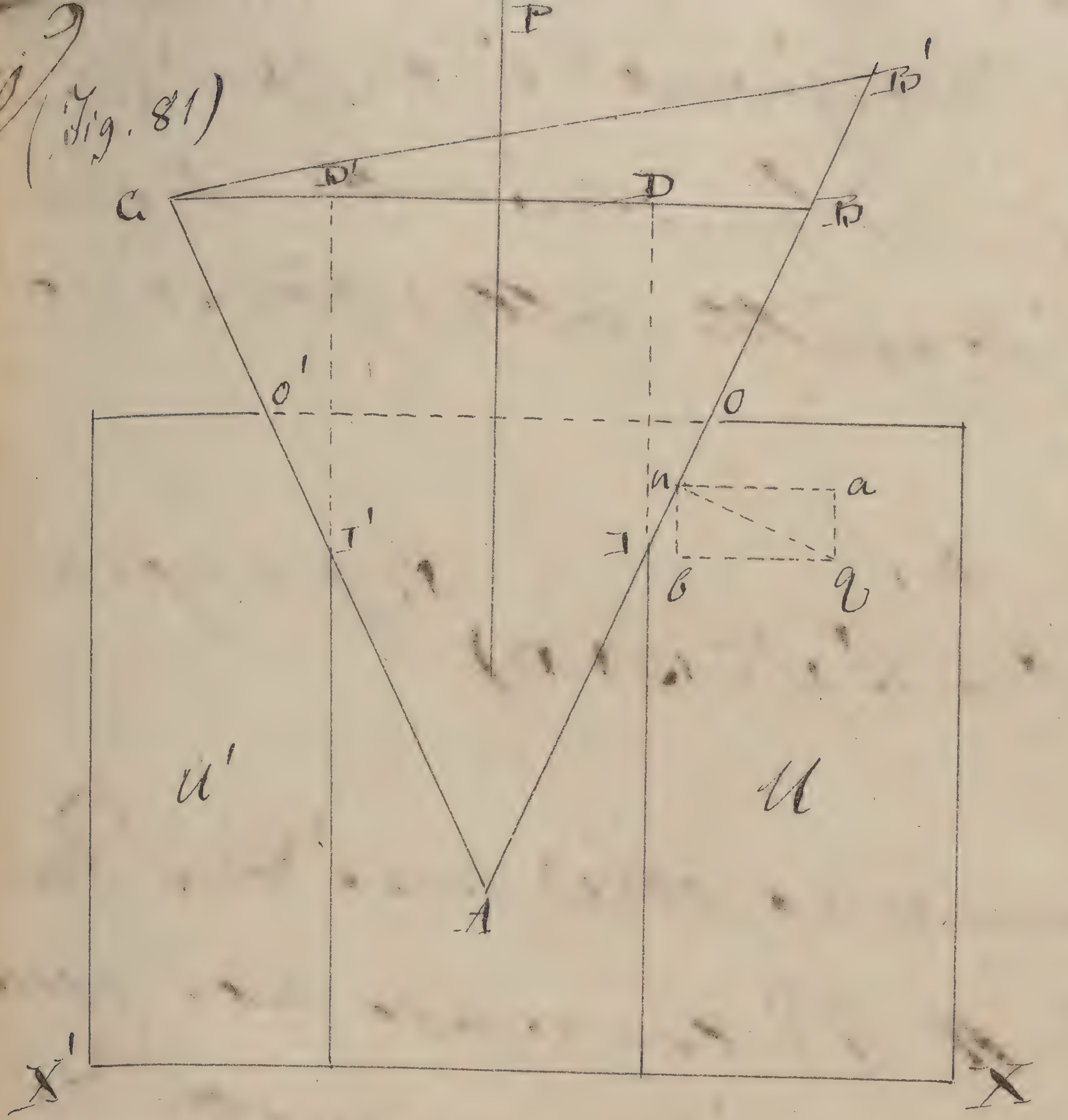
$$\frac{E'E}{2K'E'} = \frac{AB}{CB}, \text{ e però}$$

$$Q = \frac{AB}{CB} P, \text{ dal che nasce}$$

$$P : Q :: CB : AB \text{ Come } \S.$$

§. 327. Invece di supporre un cuneo che tenda a fendere un solido figuriamo che tenda ad allontanare i due solidi, il che poggiano sul piano orizzontale XX' portando la sua azione su OI, ed OI

(50) (Fig. 81)



che prolungati s'incontrano in A.

Dai punti I', I si conducano le perpendicolari ID, I'D' a CB: sieno Q, Q' le forze che debbono far equilibrio alle resistenze dei due piani nei due punti I, I', e si avrà per l'equilibrio

P : Q' : Q :: OA : OB : OC, e quindi

P : Q' :: OA : OB,

P : Q :: OA : OC : ma l'angolo $A = CI'D' + BID$, dunque si avrà

P : Q' :: O(CI'D' + BID) : OB, e

P : Q :: O(CI'D' + BID) : OC, dunque si avranno l'equazioni

(1.) $Q' = \frac{OB}{O(CI'D' + BID)} P.$

(2) $Q = \frac{OC}{O(CI'D' + BID)} P.$

§. 328. Poniamo essere XX' parallela a CB testa del cuneo, e che i solidi U', U sieno sollecitati da due forze P', P'' perpendicolari ad X'X, e però ad essa paralelle ed agenti nello stesso senso. Egli è manifesto che l'azione delle P', P'', non contrasteranno gli sforzi contro ~~[illegible]~~ O'I', OI avvegnacchè non fanno che premere i due solidi contro il piano X'X prescindendo dall'attrito, onde essi saranno sollecitati dalla combinazione delle due forze P', e $Q' = \frac{OB}{O(CI'D' + BID)} P,$

(451)

la cui direzione è perpendicolare ad OI. Similmente il solido ll è soggetto alle forze P', ed

$$Q = \frac{OG}{O(GB'D' + BID)} P, \text{ perpendic. }$$

OI.

Figuriamo che uno dei due solidi, ll ad esempio non possa concepire che un moto di rotazione nel piano paralle. lo a quello della figura intorno al punto X. — Sieno p'' q'' le perpendicolari che si conducano dal X sulle direzioni di Q, e P', e per l'equilibrio come al §. 173. si dovrà avere

(3) $$p''P' = q''Q = q'' \frac{POG.}{O(BID + GI'D')}$$

sieno p' q' le perpendic. che da X' vanno sulle direzioni delle forze Q', P' ed a togliere il moto di rotazione intorno X', si dovrà avere la

(4) $$p'P' = q'Q' = q' \frac{POB}{O(BID + GI'D')}$$

§. 340. Sieno ω, ed ω' gli angoli che i lati del cuneo BA e GA fanno con la direzione della forza P perpend. a GB, e si avrà

$\omega = BID$

$\omega' = GI'D'$, onde $B = 90° - \omega$

$G = 90° - \omega'$

152.

per cui le (1.) (2) (3) e (4) diventano le

(5) $Q' = \frac{P\theta\omega}{\theta(\omega+\omega')}$,

(6) $Q = \frac{P\theta\omega'}{\theta(\omega+\omega')}$,

(7) $p''P'' = q''Q = q''\frac{P\theta\omega'}{\theta(\omega+\omega')}$,

(8) $p'P' = q'Q' = q'\frac{P\theta\omega}{\theta(\omega+\omega')}$.

Se $\omega = \omega'$, le (5) (6) (7) (8) si mutano nelle

(9) $Q' = \frac{P\theta\omega}{\theta 2\omega}$

(10) $Q = \frac{P\theta\omega'}{\theta 2\omega}$

(11) $p''P'' = q\frac{P\theta\omega}{\theta 2\omega}$

(12) $p'P' = q'\frac{P\theta\omega}{\theta 2\omega}$. Ma $\theta 2\omega = 2\theta\omega\theta\omega$, dunque avremo

(13) $Q' = \frac{P}{2\theta\omega}$,

(14) $Q = \frac{P}{2\theta\omega}$

(15) $p''P'' = q\frac{P}{2\theta\omega}$

(16) $p'P' = q'\frac{P}{2\theta\omega}$.

§. 350. Sia il solido ll' immobile, ed il sia trattenuto sul piano XX da una forza F parallela a GB o ad X'X e perpend.e a P. La F dovrà fare equilibrio alla componente parallela ad X'X o GB della forze $Q = \frac{P\theta\omega'}{\theta(\omega+\omega')}$ la quale è perpendicolare ad OT.

Figuriamo (fig. prec.) che nq rappresenti in direzione ed in tensione la forza Q, e fatto su di essa un parallelogrammo i cui lati na, nb sieno rispett. paralleli alle direzioni X'X, e CB; i lati del triangolo naq sono rispett.e perpendicolari ai lati del Δ° BDI, e però essendo simili l'angolo qna = DIB = w, onde la componente na della forza nq = Q sarà $\frac{P\theta\omega'.\theta\omega}{\theta(\omega+\omega')}$; l'altra nb non si oppone per nulla alla forza F: nell'equilibrio adunque esser dee

(17) $F = \frac{P\theta\omega'\theta\omega}{\theta(\omega+\omega')}$. Se $\omega=\omega'$, ne viene la

(18) $F = \frac{P\theta^2\omega}{\theta 2\omega} = \frac{P\theta^2\omega}{2\theta\omega\theta\omega} = \frac{1}{r}\frac{P\theta\omega}{\theta\omega}$

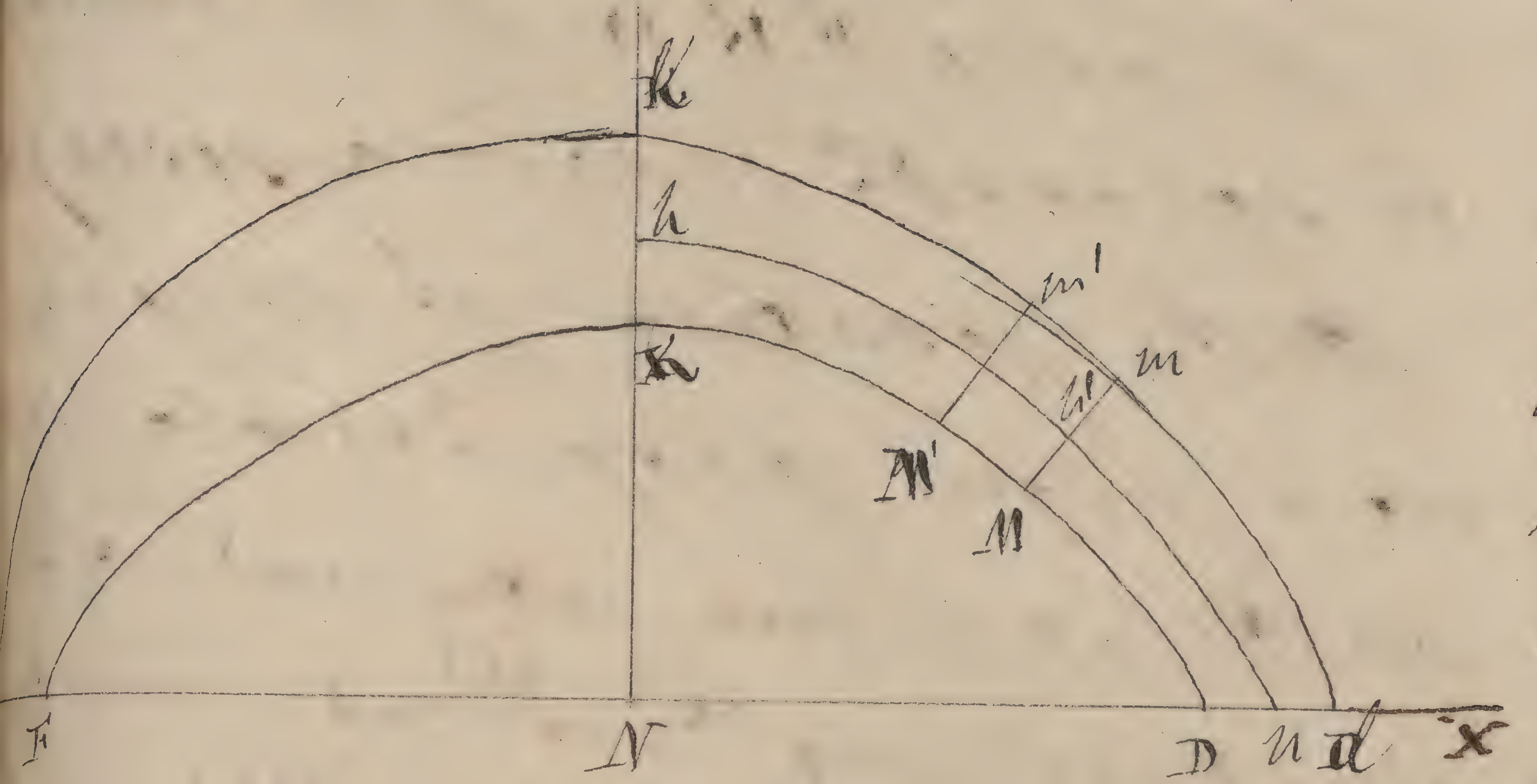
$= \frac{1}{r} P\theta\omega = \frac{P}{r\,\theta\omega}$.

Capitolo XXVIII.

Dell'Equilibrio delle Volte

§. 351. Una volta è formata da una porzione di superficie curva, la quale poggia su fermi sostegni. —

Si osservi la (fig. 82). — Sulla retta X'X si descriva l'arco FKD, e poscia l'arco fkd, di due curve, e si figuri che l'area compresa fra questi archi cioè l'area fkdDKF, si muova parallelamente a se stessa situandosi su rette parallele ad X'X; questa descriverà una volta cilindrica o a botte dei Francesi (voût en berceau). La superficie generata da fkd dicesi estradosso —; e la superficie generata dalla curva FKD intradosso. — Immaginiamo che la volta sia segata da piani secondo una data legge. Le porzioni di volta comprese fra piani e piani diconsi cunei, e le intersecazioni, giunture; l'area fkdDKF dicesi grossezza della volta, e le due linee tagli. —



(Fig. 82)

(455.)

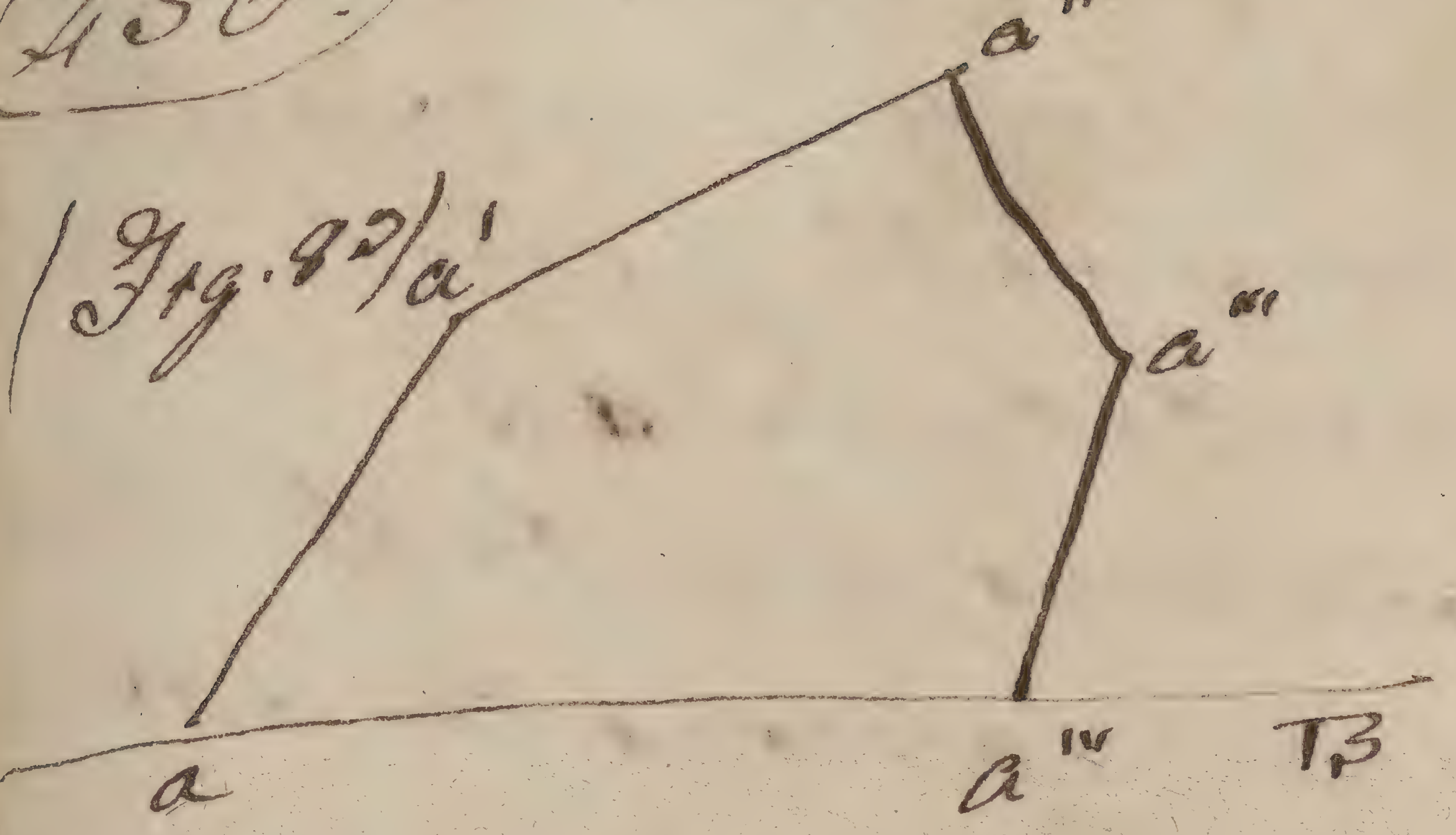
Le rette FD, fd diconsi corde degl' archi rispettivi. Se dal mezzo N della corda FD si alzi una perpend.e ad essa la NK dicesi saetta o montata della volta, la curva interna dicesi curva dell' intradosso, così per l'esterna. Il punto K dicesi rigoglio dell'arco FKD ed il cuneo le soprastà chiave o ~~serraglio~~. Nella pratica si suppongono i piani perpendicolari alle volte, o curva interna. Le giunture che dividono i cunei estremi dai sostegni, diconsi impostature. Noi supporremo i cunei animati dalla sola gravità, facendo astrazione dall'attrito e dalla coesione.

Lezione 74.

la 75 Ripetiz.e

§. 352. Si osservi la (fig. 83) sia il piano Aa'a''a'''a'''' sollecitato da quante forze si voglia e stia in questo piano in equilibrio sulla AB. Perciò la risultante di tutte le forze che sollecitano il piano detto dev'esser perpendicolare alla AB, e la deve incontrare fra i punti a, a''. Se cotali forze si scompongano in due, l'una in direzione parallela, e l'altra perpend.e ad AB, la somma delle componenti

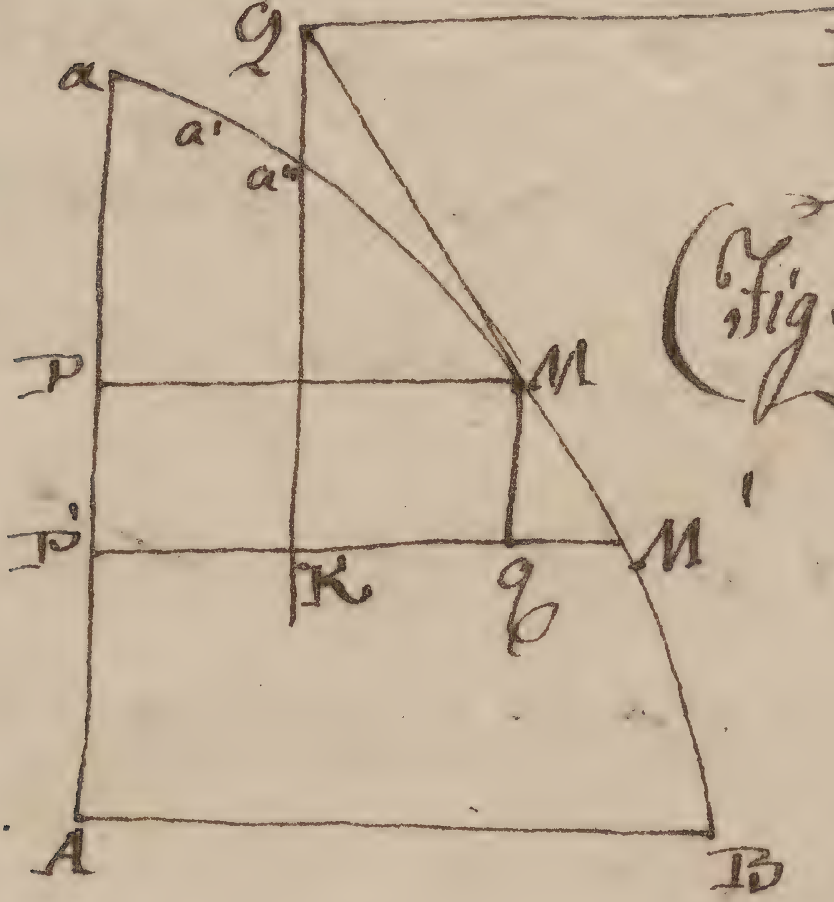
(Fig. 82)



parallele esser debbe nulla p. l'equilibrio, e la somma delle forze I viene elisa dalla resistenza della retta AB; e si potrà considerare come una forza che sollecita il piano aa'a''a'''a''''. Se poi tutte le forze compresavi la R si scompongano in due secondo direzione qualunque ma tra se perpendi. la forza risultante per l'equilibrio esser deve nulla. La risultante sarà $\sqrt{R^2+R'^2}$, ma R ed R' sono reali, dunque non potrà essa esser zero se non sia $R=0$, $R'=0$, e però nell'equilibrio esser deve nulla ciascuna componente.

§. 353. Se invece del piano attraversa una retta perpendicolare ad AB, per l'equilibrio, la somma delle componenti parallele ad AB dev'esser nulla, e la somma o risultante delle perpendicolari cadrà sulla retta e però verranno elise dalla resistenza della retta medesima; però in questo caso basta che si annullino le componenti parallele ad AB.

(457.)



(Fig. 84)

§. 354. (Fig. 84) Sia aB il profilo di una volta di grossezza in determinata piccola cioè rappresentata da aB.

Figuriamoci che tutte le forze che agiscono su aM siano scomposte in 2 una verticale e l'altra orizzontale.

Sia QK = Q, QH = Q' la prima la risultante delle componenti verticali, e la 2ª delle orizzontali.

Riferendo il sistema a due assi ortogonali, si avrà aP = x, PM = y; si prolunga la P'M' indeterminatamente vicina alla PM e ad essa parallela, e condotta la perpend.e Mq, sarà Mq = PP' = dx, M'q = dy.

Sia P la pressione esercitata contro il taglio che passa normalmente per M alla curva. Dunque, la pressione che passa per M sarà parallela alla tangente per esser perpend. al taglio e però parallela alla tang.e in M, onde gli angoli che fa la direzione di P cogli assi coordinati saranno quelli che fa la tangente in M cogli assi medesimi

Ma gli angoli che la tangente in M fa cogli assi delle X, Y, hanno per coseni $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, essendo ds l'elemento dell'arco, e però le componenti di F secondo questi assi saranno

$\frac{Fdx}{ds}$, $\frac{Fdy}{ds}$; per l'equilibrio adunque dovranno aver luogo le

(1) $\frac{Fdx}{ds} - Q = 0$

(2) $\frac{Fdy}{ds} - Q_1 = 0$. pel §. 352.

Dalle quali se ne deduce la

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{Q_1}{Q}$; avvegnacchè essendosi considerato il profilo della volta indeterm.^e piccola animata da quante forze si voglia poggi in M.

§. 355. All'equilibrio, oltre le due (1) e (2) è necessario che la pressione F esercitì in M la sua azione, poichè essendosi considerata indeterm.^e piccolo il profilo della volta si può supporre che poggi in M. Da questo punto si esercita la pressione nell'ipotesi

(459.)

di tagli normali alla curv
Le (1) e (2) nascono nella
supposizione che la press
ni sieno perpendi. al taglio
ossia che la risultante
M sia perpend. Sia A la
intensione della pressione
esercitata in a normalmen
te al taglio che passa p
e però sarà ~~perpend.~~ parallela alla
tangente in a, cioè sarà
nella direzione di un arch
to indeterm.e piccolo, che
nella figura è presentato
da aa', il quale è sollecita
to dalla P e dal proprio p
che si suppone sia ap
plicato nel mezzo di lui.
La risultante di qste du
forze dovrà riuscire perp
dicolare al taglio che p
sa per l'estremità del
consecutivo archetto aa'
indeterm.e piccolo, e però
nella direzione della tange
te in a', cioè della direz.
dell'arco stesso. Proseguend
della stessa guisa fino a
compiere l'arco aM si
drà che la risultante di
tutte le forze che sol
ta quest'arco passa p
M.

260.9

§. 356. Le dettate cose si adattano al profilo di grossezza finita di una volta, poichè la determinaz. delle (1) e (2) non dipendono dalla grossezza del profilo. Per quello che risguarda la seconda condizione che la direzione di P eserciti la sua azione (fig. 82) sopra li ———

Si osservi che se la pressione orizzontale contro il taglio kk eserciti la pressione in k, le successive pressioni dovendo essere perpendicolari ai tagli conseguitanti, la linea in cui si esercitano le pressioni sarà ella parallela a KM e però cadrà sempre sopra il punto M. —

Essendo k fra K e k e quando è indeterminat.e piccola la grossezza della volta, e la pressione esercitandosi in M ove la curva interiore incontra il taglio che passa per m, ne conseguita che dovunque si prenda il punto k fra K e K la pressione contro M si eserciterà fra M ed m.

Concluderemo adunque si dobbe che pei profili di grossezza finita che la pressione sia perpend.e al taglio stae non se l'altra, che la pressione si eserciti fra la

la curva esterna ed interna

§. 357. Poniamo che la forza origi-
tale Q_1 sia costante, ed egua-
alle pressione che esercita-
le, la propria azione. —

La forza Q_1 rappresen-
ta il peso del profilo Mm
$= M$, che si otterrà moltipli-
cando l'area per le gravità
che anima ciascun punto
e però sarà $Mg = Mm\kappa\kappa g$
ossia

(4) $M = Mm\kappa\kappa$. Si faccia adun-
que $Q_1 = A$ costante, e
$Q = M$, e però la (3) si mu-
terà nella

(5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{A}{M}$. —

Riprendiamo la (51) del
§. 283 che rappresenta la
Catenaria ed è

$A\theta\omega dx - A\theta\omega dy = ls\,dx$
e si è qui supposto l'asse delle
x, verticale, al contrario
dell'equazione della catena-
ria, dunque avremo

$A\omega dy - A\theta\omega dx = ls\,dy$

ossia
$(A\theta\omega - ls)\,dy = A\theta\omega dx$ e si po-
ne
$\dfrac{A\theta\omega - ls}{\theta\omega} = M$, e però la
risulterà la 6.a Quindi
questa sarà l'equaz.e della
catenaria.

(Fig. 92)

§. 354. Sia α l'angolo che il taglio verticale in M fa coll'asse delle x; ma il taglio è normale alla curva interiore AM cioè perpendicolare alla tangente di lei, però l'angolo che fa la tangente la curva in M coll'asse delle x è complemento dell'angolo α; ma l'angolo che fa la tangente in M, ha per tangente trig. $\frac{dy}{dx} = y'$; dunque sarà $\tau\alpha = \frac{dx}{dy}$, e quindi la

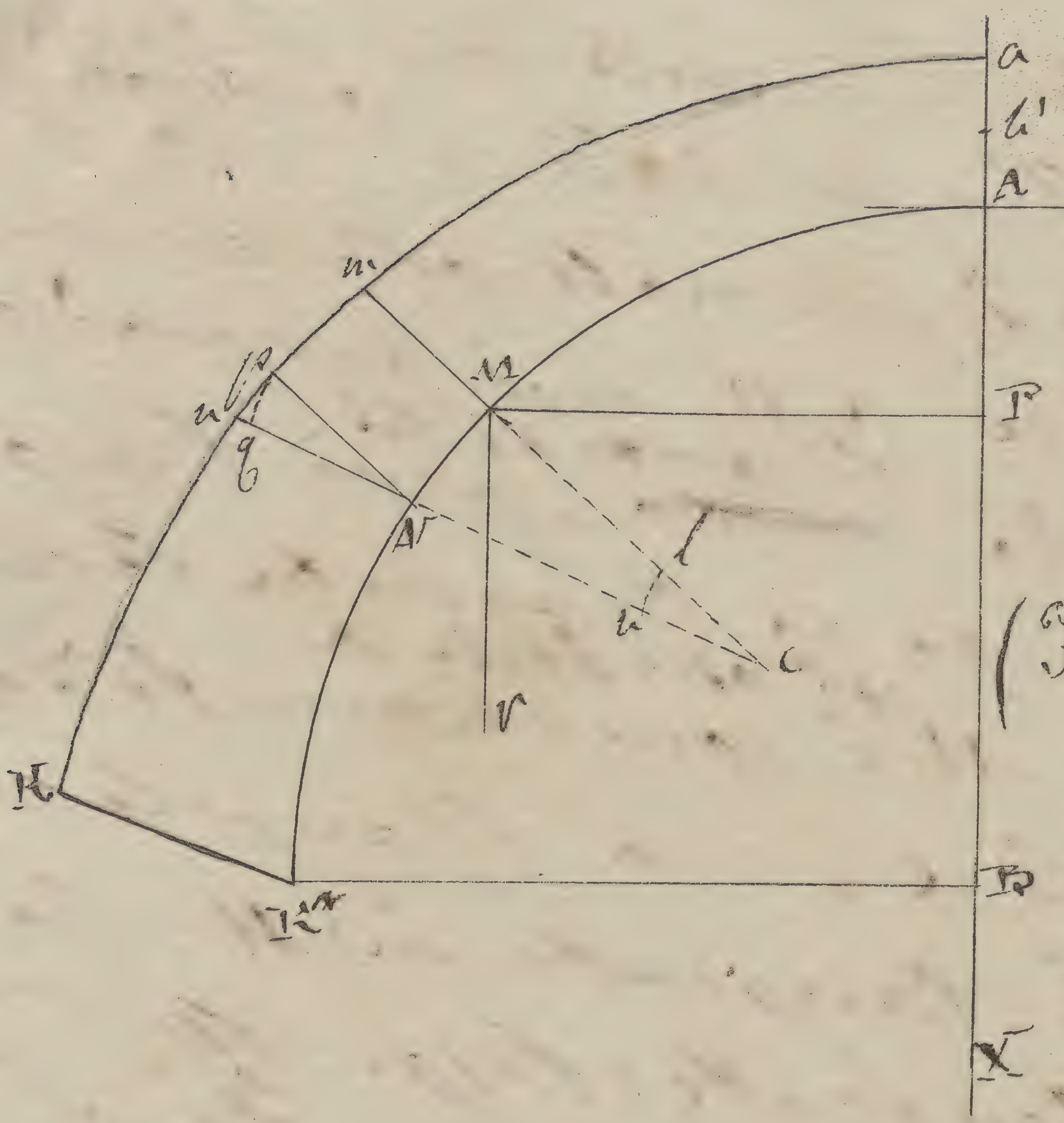
(6) $\frac{1}{\tau\alpha} = \frac{A}{M}$, ossia la

(7) $M = A\tau\alpha$. La quale ci mostra che l'area del profilo di una volta in equilibrio, è quadrabile, perchè esso è $= A\tau\alpha$.

Se il taglio delle impostature sia orizzontale, si avrà $\alpha = 90°$, e però $\tau\alpha = \infty$, e quindi $M = \infty$. Il che mostra, che il profilo della volta non può reggere da sè, se poggia su tagli orizzontali delle impostature.

Supponiamo che M', m', sia un taglio, vicino al Mm, oltre ogni limite. È evidente che il diff.le dell'area MmRR sarà lo spazietto Mmm'M', avremo dunque prendendo il diff.le della (7) osservando che $M = \frac{\alpha}{\ldots}$ si avrà la

(8) $Mm'm M' = \frac{A d\alpha}{\sigma^2\alpha}$.



(Fig. 85)

§. 359. Si osservi la (fig. 85). ——

Sia KMA la curva interiore riferita agli assi AX, AY essendo il primo verticale il 2° orizzontale essendo in A l'origine sarà $x = AP$, $y = MP$. ——

Si protragga un taglio Nn infinitamente vicino al taglio Mm, e seguitiamo a chiamare ds l'elemento della curva interna, e si avrà $MN = ds$; poniamo z la lunghezza del taglio $= Nn$; ~~[illegible]~~ l'area del taglio MmnN è il differenziale dell'area del profilo KMA [illegible] e però, posto M = taglio ?

(9) $MmnN = dM = A\frac{d\alpha}{s^2\alpha}$ dipendentemente dalle (8) ove α è l'angolo che il taglio mM fa colla verticale. Da N si conduca Np parallela a Mm, e l'angolo che farà Np colla verticale sarà α, però l'angolo $Nnp = d\alpha$. Fatto centro in N col raggio Np si descriva l'archetto pq, il quale sarà indefinitamente piccolo, e però si potrà considerare come una retta, e il triangolo pqN rett. e rettangolo in q, laonde

$pq = pN \cdot \text{sen}\, q\hat{N}p = Np \cdot d\alpha = nN \cdot d\alpha = z \cdot d\alpha$; ma l'archetto dα è piccolissimo, dunque prendere si può l'arco a vece del seno, e però si avrà

(10) $p\varrho = z\,d\alpha$. Essendo i punti M, N, tra se vicini oltre ogni limite si potrà supporre MN=mM=z. Il trapezio MmpN dei quali i lati paralleli sono Mm, Np si può considerare come un rettangolo; sarà dunque l'area del trapezio MmpN = mM.MN = $z\,ds$, e però avremo

$NnmM = dM = z\,ds + \frac{1}{2} z^2 d\alpha$,

e però la

Vacanze Pasquali

Lezione 76.

(11.) $\frac{A\,d\alpha}{\varrho^2 d} = z\,ds + \frac{1}{2} z^2 d\alpha$ per la (9)

§.360. (Fig. 86) Si prolunghino i tagli Mm, Nn finchè s'incontrino in C. Sarà CM il raggio d'osculo del punto M come al §.294. e si avrà, l'angolo nCm = nNp = $d\alpha$. Fatto centro in C col raggio Ch si descriva l'archetto hl, il quale per essere indeterm. piccolo si potrà prendere per una retta. Si può prendere per una retta MN perchè il suo raggio CN – Ch = quantità finita. Perciò questi due archi si possono prendere per due rette. Inoltre l'archetto MN si confonde con quello del circolo osculatore. Dunque i due Δ.i NCM, hCl sono simili, e però Ch : hl :: CM : ds, ovvero

$1 : d\alpha :: R : ds$, onde avremo la

(12) $ds = R\,d\alpha$; per cui la (11.) viene cambiata nella

(13) $\frac{A\,d\alpha}{\theta^2\alpha} = zR\,d\alpha + \frac{1}{2} z^2 d\alpha$, e per dividendo per $d\alpha$, la

(14) $\frac{A}{\theta^2\alpha} = zR + \frac{1}{2} z^2$, ovvero la

(15) $z^2 + 2Rz = \frac{2A}{\theta^2\alpha}$, che sciolta rispetto alla z, avremo la

(16) $z = -R \pm \sqrt{R^2 + \frac{2A}{\theta^2\alpha}}$; si prende il + perchè z deve essere positivo.

§. 361. La costante A si determina agevolmente quando si conosca la grossezza del profilo in un punto dato, per es. nel rigoglio. In tal caso $\alpha = 0$. Poniamo che RNMA sia un arco di circolo, e che abbiasi $Aa = m$, e si voglia la grossezza del profilo, z, distante 45.° dal rigoglio stesso. In tal caso R è costante; ed $\alpha = 0$, e però $\theta\alpha = 1$; la (16) adunque si muta nella

(17) $m = -R + \sqrt{R^2 + 2A}$; trasportando nel 1.° membro R ed innalzando a quadrato, si ha $m^2 + 2mR + R^2 = R^2 + 2A$, e per la

(18) $2A = m^2 + 2mR$. La (16) adunque si muta nella

(19) $z = -R + \sqrt{R^2 + \frac{m^2 + 2mR}{\theta^2\alpha}}$; quando $\alpha = 45°$ si ha $\theta\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$, e però $\theta^2\alpha = \frac{1}{2}$, e quindi la

(20) $z = -R + \sqrt{R^2 + 2m^2 + 4mR}$; dalla (16) è chiaro, che quando $\alpha = 90°$ la z riesce infinita, e però la giuntura che ha per taglio Mm non può essere orizzontale. Ciò è conforme al veduto al §. 360.

Ma $\tau\alpha = \frac{\sigma\alpha}{\theta\alpha} = \frac{\sqrt{1-\theta^2\alpha}}{\theta\alpha} = \frac{dx}{dy}$ (parag. stesso). Dunque avremo $\frac{1-\theta^2\alpha}{\theta^2\alpha} = \frac{dx^2}{dy^2}$, d'onde si ha $\theta^2\alpha = \frac{dy^2}{dx^2+dy^2} = \frac{dy^2}{ds^2}$, pel quale valore la (16) si muta nella $(C = 2A)$

(21) $z = -R + \sqrt{R^2 + C\frac{ds^2}{dy^2}}$.

§. 362. Si osservi, che se le condizioni d'equilibrio supposte pel profilo della grossezza della volta, non solo lo sarà esso in equilibrio, ma tutta la volta: imperocchè si può considerare la volta formata dal movimento del profilo parallelamente a se stesso, ossia da un s.° di profili addossati l'uno all'altro: ma in tutti si verificano le condi.ⁱ d'equilibrio, dunque si verificano per tutta la volta —

§. 363. Mediante le (16) e (21) ... data la

(22) $f(x, y) = 0$, della curva inte-
riore, allora si possono deter-
minare le lunghezze dei ta-
gli a lei perpendicolari, e
quindi descrivere graficamen-
te la linea esteriore o est-
dosso. —

Si osservi la stessa (fig. 8..
La Linea AK sia un' ellisse
presentata dalla

(23) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, ove a, e b
sono i semidiametri princi-
pali con l'origine al vertice.

Noi abbiamo trovato nel
calcolo sublime il raggio oscu-
latore dell'elisse, dato dalla

(24) $R = \frac{(a^2(2ax - x^2) + b^2(a-x)^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}$; sia
m il valore del taglio nel vert-
ice, e sia r il raggio d'oscu-
lo in tal punto. Si è veduto
che in esso $\alpha = 0$, e però sa-
quindi nella (16) posso $2A = ...$
si muta nella

(16) $z = -R + \sqrt{R^2 + \frac{2A}{\theta^2 \alpha}}$

(25.) $m = -R + \sqrt{R^2 + C}$, ovvero
$m^2 + 2mR + R^2 = R^2 + C$, e poi

(26) $C = m^2 + 2mR$; ma il valore
di r, derivasi da quello di
R, ponendo $x = 0$, dunque av-
remo la

(27) $r = \frac{b^2}{a}$, per cui la (26) vien
surrogata dalla

(28) $c = m^2 + \frac{2mb^2}{a}$; inoltre si ha

$\frac{ds'^2}{dy'^2} = \frac{s'^2}{y'^2}$ mutandosi $= \frac{1+y'^2}{y'^2}$, $(s'^2 = 1+y'^2)$, ovvero

$= \frac{1}{y'^2} + 1$,

$\frac{1}{y'^2} + 1 = \frac{a^2(2ax - x^2)}{b^2(a-x)^2} + 1 = \frac{1-a^2}{b^2} \times$

$\times \left(\frac{x^2 - 2ax}{x^2 - 2ax + a^2}\right)$; ma

$\frac{x^2 - 2ax}{x^2 - 2ax + a^2} = 1 - \frac{a^2}{(a-x)^2}$; dunque

$\frac{ds^2}{dy^2} = 1 - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^2(a-x)^2}$: che posti nella (21) si ha la

(21) $z = -R \pm \sqrt{R^2 + c\frac{ds^2}{dy^2}}$

(29) $z = -\frac{(a^2(2ax - x^2) + b^2(a-x)^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 \cdot b} \pm$

$\pm \sqrt{\frac{(a^2(2ax - x^2) + b^2(a-x)^2)^3}{a^8 b^2} + \left(m^2 + \frac{2mb^2}{a}\right) \times \left(1 - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^2(a-x)^2}\right)}$; dalla quale posto $x = 0$, si ottiene la

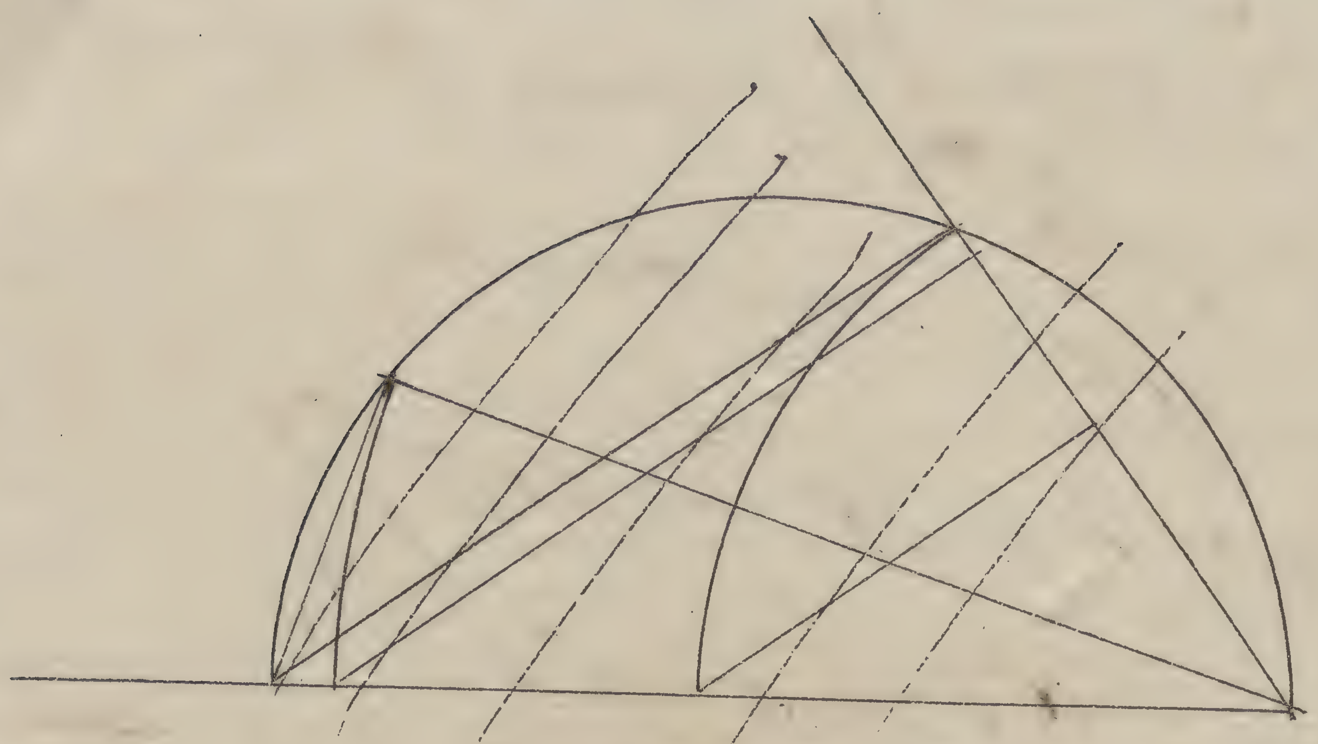
(30) $z = -\frac{b^2}{a} + \sqrt{\frac{b^4}{a^2} + \left(m^2 + \frac{2mb^2}{a}\right)} = -\frac{b^2}{a} + m + \frac{b^2}{a} = m$; come esser debbe.

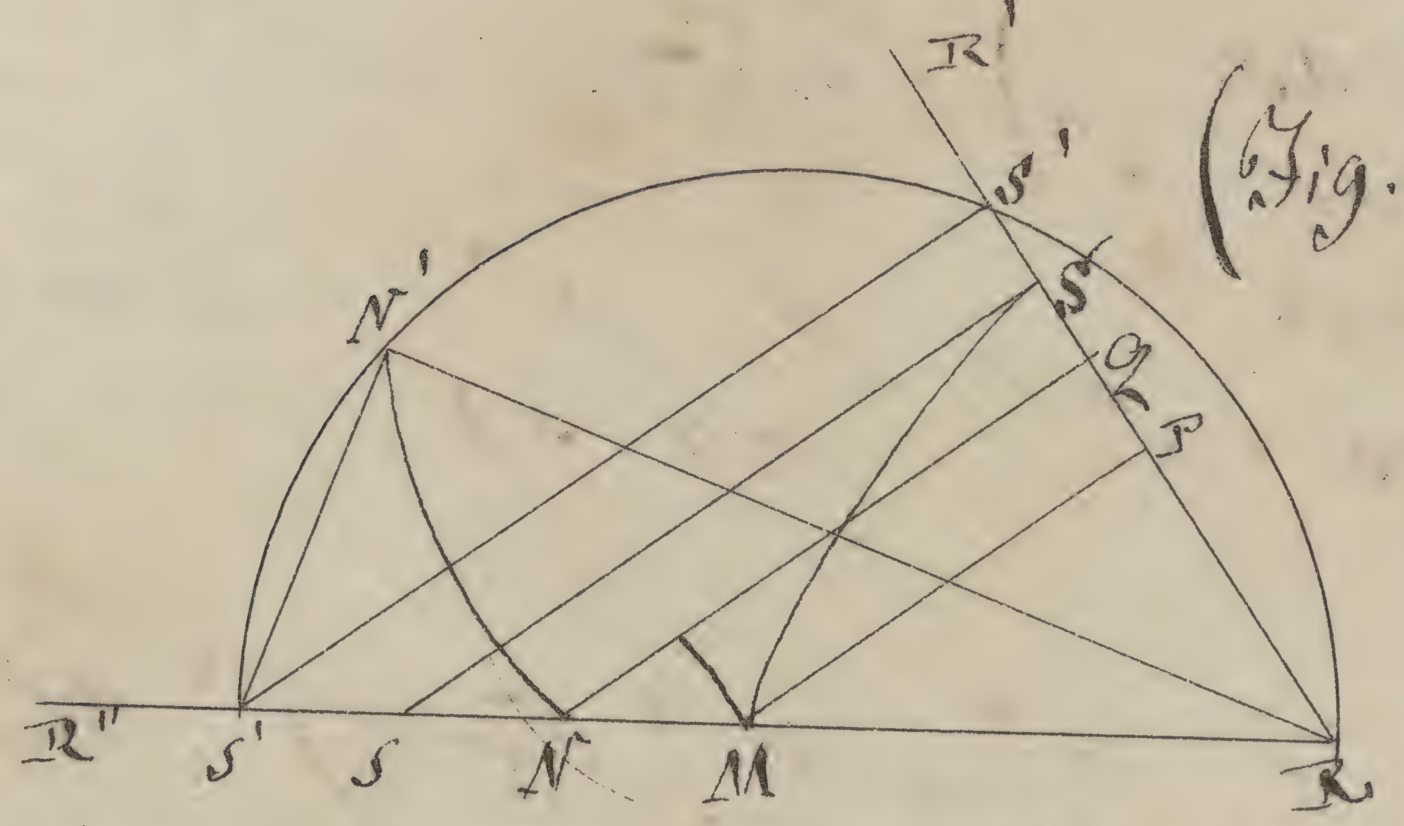
Si osservi, che il valore di z dato dalla (29) quando $x = a$ diventa infinito perchè un fattore $= 0$

§. 364. Se $a = b$, l'ellisse si muta in un circolo, e la (29) si cambia nella

(31) $z = -a + a\left(\frac{m^2 + 2ma}{(a-x)^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$, che diventa infinita quando $x = a$.

§. 365. Si osservi la (fig. 86)





(Fig. 80)

Questo valore di z è di facile costruzione. Si protragga la verticale RR', e si prenda RS = a, SS' = m, e dai punti S, S' si tirino le orizzontali Ss, S's', e da R, si tiri la RR'' che tagli in s ed s' le due prefate rette comunque condotte. Sopra Rs' si descriva il semicircolo s'N'S'R, e si prenda s'N' = sS, dipoi si conduca N'R. Fatto centro in R col raggio RN' si descriva un circolo, ed il punto N, ov'esso taglia RR'' sarà un punto della curva esteriore il quale corrisponde ad M che ha per coord. $x = PS$, $y = PM$. Si ha $\overline{RS'}^2 + \overline{S's'}^2 = \overline{s'R}^2$; inoltre $\overline{RN'}^2 + \overline{N's'}^2 = (NM + MR)^2 + \overline{sS}^2 = \overline{s'R}^2$, e però

$$\overline{RS'}^2 + \overline{S's'}^2 = (MN + MR)^2 + \overline{sS}^2$$

ovvero la

(32) $(RS + SS')^2 + \overline{S's'}^2 = (MN + MR)^2 + \overline{sS}^2$: ma $S's' : MP :: a+m : a-x$ ed $Ss : MP :: a : a-x$; dunque

$$S's' = \frac{a+m}{a-x} \cdot y,$$

$$Ss = \frac{a}{a-x} \cdot y,$$ pei quali valori la (32) diventa

$$(a+m)^2 + \frac{(a+m)^2}{(a-x)^2} \times y^2 = (z+a)^2 + \frac{a^2}{(a-x)^2} \cdot y^2,$$ fatto $MN = z$: ovvero

$2am+m^2+\frac{2am+m^2}{(a-x)^2}y^2=2az+z^2$:

ma $y^2=2ax-x^2$, dunque

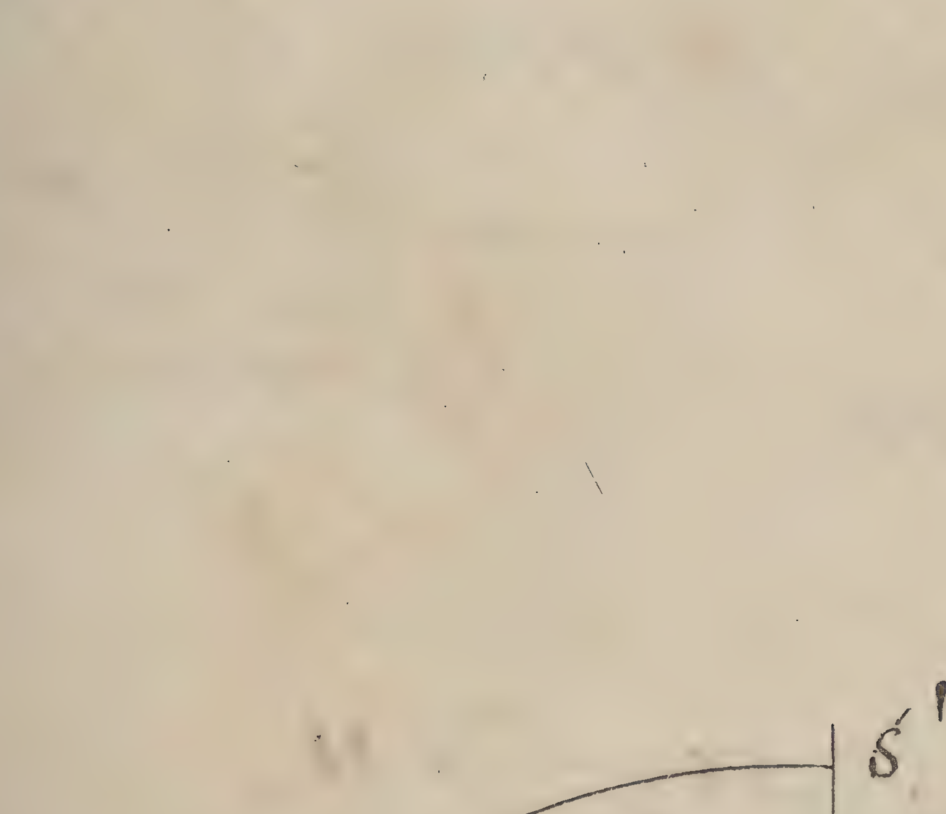
$2am+m^2+\frac{(2am+m^2)(2ax-x^2)}{(a-x)^2}=$

$2az+z^2$, che riducesi alla

$\frac{a^2(2am+m^2)}{(a-x)^2}=2az+z^2$; dalla quale traendo il valore di z, si ha la (31) come essere debbe.

Da R protraendo altre rette si troveranno altri punti come la RR'.

§. 300. (Fig. 87) Supponiamo che $MN=z$, sia un taglio qualunque, ed RS' la verticale che passa pel rigoglio S della volta della quale una porzione di profilo è presentata da MSS'N. L'origine delle coord.e sia in S, e poniamo che $SQ=x_1$, $NQ=y_1$ coord. del punto N della curva esteriore S'N, e supponiamo che $SP=x$, $PM=y$ siano le coordinate del punto interiore del taglio. Se per H si protragga Hq parallela ad RS' sarà $HM=x-x_1$, $NH=y_1-y$; Si aumenti la SP della $PP'=dx$ indefinitam.e piccola, e condotta da P' la P'p, alla curva inferiore, sopra di lei da M si conduca la perpend. Mq, e si avrà



(Fig. 87.)

$PP' = Mq = dx$,

$pq = dy$, $Mp = ds$, presentando per Mp un' arco infinitesimo

Essendo per ipotesi i tagli perpendicolari alla curva interiore, l'archetto Mp sarà perpendicolare ad MR, e si può considerare come un lato piccolo del poligono circoscritto alla curva, e quindi otterremo i due triangoli MNH, e Mpq, che sono simili perchè i lati dell'uno sono perpend. a quelli dell'altro, e perciò le proporzioni

$NH : NM :: Mq : pM$,

$MH : MN :: pq : pM$, ovvero

$y_1 - y : z :: dx : ds$,

$x - x_1 : z :: dy : ds$, e poi le equazioni

(33) $y_1 - y = \frac{z dx}{ds}$,

(34) $x - x_1 = \frac{z dy}{ds}$, ovvero

(35) $\frac{y_1 - y}{dx} = \frac{z}{ds}$,

(36) $\frac{x - x_1}{dy} = \frac{z}{ds}$, e quindi da queste avremo la

(37) $(y_1 - y) dy - (x - x_1) dx = 0$. —

Dalla (33.) si ha la

(38) $(y_1 - y) \frac{ds}{dx} = z = -R + \sqrt{R^2 + C \frac{ds}{dy}}$

per la (21). ——

Conosciuta la grossezza ... del profilo nel rigoglio, si è trovato

$c = 2A = m^2 + 2mR$. §. 361. Dunque avremo la

(39) $(y_1 - y)\frac{ds}{dx} = z = -R + \sqrt{R^2 + (m^2+2mR)\times\frac{ds^2}{dy^2}}$

Sia la

(40) $y = \varphi(x)$, l'equazione della curva interiore, e si potrà determinare $\frac{ds}{dy}$, R, e $\frac{ds}{dx}$ in funzione della sola x; e quindi facendo uso ancora della (40) si possono ridurre le (37) (38) e (39) a non contenere che x, x_1, y_1 ecc.

Per mezzo della (37) e (39) eliminata la (x) supponiamo che la risultante sia presentata dalla

(41) $\varphi_1(x_1 . y_1) = 0$, che rappresenterà la curva esteriore.

Data adunque la curva interiore data dalla (40) si può passare alla esteriore facendo uso del calcolo delle derivate, e perciò sarà sempre possibile determinare l'equazione della curva esteriore, data quella dell'interiore.

Se per converso fosse data la (41) equaz.e della curva esteriore, e si volesse passare a quella della curva interiore data dalla (40) si per mezzo delle (37) (38) e (41) eliminate x_1, y_1 si

otterrà un'equazione di 2.° ordine che converrà integrare per ottenere l'equazione della curva interiore, se ciò sia possibile ottenere. L'integrale di una così fatta equazione conterrà 2 costanti C_1, C_2, più l'altra che conteneva C, e perciò si ha tre costanti che si debbono determinare in dietro le condizioni

1.° Che sia $x=0$ quando $y=0$.

2.° Che quando $x=0$, sia la tangente perpend. all'asse delle x, cioè sia $\frac{dy}{dx}=$ ossia $\frac{dx}{dy}=0$.

3.° Che ad $x=a$ corrisponda un valore di y qualunque.

Il passare adunque dalla curva esteriore alla interiore vi ha maggiore difficoltà e dà luogo a delle condizioni che adempiere si debbono.

Lezione 77.

§. 367. Se la curva interiore esser debba parallela all'esteriore, sarà z costante, e posta $z=K$, si avrà

$K=-R+\sqrt{R^2+C\frac{ds^2}{dy^2}}$, e quindi la

(43) $K^2+2KR=C\frac{ds^2}{dy^2}$.

Si osservi che nel presente caso la curva rivolge la concavità all'asse delle ascisse, e perciò

y è positivo, y'' sarà negativo.
Se dunque vogliasi che il raggio d'osculo sia positivo converrà premettere il segno negativo davanti ad esso trovato, e però se sia l'arco costante, ds, si avrà la

(44) $r = -\frac{dx\,ds}{d^2y}$

che posto nella (43) si ha la

(45) $k^2 d^2y - 2k\,dx\,ds = c\frac{ds^2 d^2y}{dy^2}$,

di cui l'integrale è, posto sempre ds costante, la

(46) $k^2 dy - 2kx\,ds = -c\frac{ds^2}{dy} + c_1\,ds$

essendo $c_1\,ds$ la costante arbitr. ovvero avremo la

(47) $k^2 dy^2 + c\,ds^2 - (2kx + c_1)\,ds\,dy = 0$

Si osservi che $\cos\alpha = \frac{dy}{ds}$ pel N. 361. e nel rigoglio $\alpha = 0$. In esso poi è $x = 0$, dunque in esso esser deve $= 0$, $dy = ds$, per cui la (47) riducesi alla

(48) $k^2 + c - c_1 = 0$, d'onde la

(49) $c_1 = k^2 + c$: ma,

$ds^2 = dx^2 + dy^2$, dunque la (47) si muta nella

(50) $k^2 dy^2 + c\,dx^2 + c\,dy^2 - (2kx + c_1)\,dy.$

$\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0$; ovvero

$k^2 + c + c\frac{dx^2}{dy^2} + c - (2kx + c_1)\times$

$\sqrt{\frac{dx^2}{dy^2} + 1} = 0$, la quale posto

(51) $\frac{dx}{dy} = p$, diventa la

(52) $k^2 + Cp^2 + C - (2kx + C_1)\sqrt{p^2+1} = 0$: ma $k^2 + C = C_1$, dunque avremo la

(53) $C_1 + Cp^2 - (2kx + C_1)\sqrt{p^2+1} = 0$, e quindi la

(51) $\frac{dx}{dy} = p$

(54) $x = \frac{C_1 + Cp^2}{2k\sqrt{p^2+1}} - \frac{C_1}{2k}$. Dalla (51) si ottiene la

(55) $dy = \frac{dx}{p}$, ed integrando per parti considerando p costante si avrà

(56) $y = \frac{x}{p} + \int \frac{x\,dp}{p^2}$, nella quale sostituito il valore di x dato dalla (54) ne viene la

(57) $y = \frac{C_1 + Cp^2}{2kp\sqrt{p^2+1}} - \frac{C_1}{2kp} + \int \frac{C_1 + Cp^2}{2kp^2\sqrt{p^2+1}}\,dp$

$- \int \frac{C_1\,dp}{2kp^2} = \frac{C_1 + Cp^2}{2kp\sqrt{p^2+1}} - \frac{C_1}{2kp} +$

$\frac{C_1}{2k}\int \frac{dp}{p^2\sqrt{p^2+1}} + \frac{C}{2k}\int \frac{dp}{\sqrt{p^2+1}} + \frac{C_1}{2kp}$

$\int \frac{dp}{p^2} = -\frac{1}{p}$

$= \frac{C_1 + Cp^2}{2kp\sqrt{p^2+1}} + \frac{C_1}{2k}\int \frac{dp}{p^2\sqrt{p^2+1}} +$

$\frac{C}{2k}\int \frac{dp}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{k^2 + C + Cp^2}{2kp\sqrt{p^2+1}} +$

$\frac{k}{2}\int \frac{dp}{p^2\sqrt{p^2+1}} + \frac{C}{2k}\int \frac{dp}{p^2\sqrt{p^2+1}} + \frac{C}{2k}\int \frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}$; ma integrando per la (49): ma integrando per parti, si ha

$\int \frac{dp}{p^2\sqrt{p^2+1}} = -\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} - \int \frac{dp}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

dunque la

(58) $y = \frac{Cp}{2k\sqrt{p^2+1}} - \frac{k}{2}\int \frac{dp}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{C}{2k}\int \frac{dp}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}} +$

$\frac{c}{2k}\int\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}$. Ma $\int\frac{dp}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\int\left(\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}-\frac{p^2dp}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right)$
$=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$, e

$\int\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}=\int\frac{\left(dp+\frac{p\,dp}{\sqrt{p^2+1}}\right)}{p+\sqrt{p^2+1}}$: molti-
plicando numeratore e denominatore della frazione $\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}$ per
$1+\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$: dunque

$\int\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}=\log(p+\sqrt{p^2+1})$ e quindi

(59) $y=-\frac{kp}{2\sqrt{p^2+1}}+\frac{c}{2k}\log(dp+\sqrt{p^2+1})$ —

Si osservi, che si ha

(51) $p=\frac{dx}{dy}$, e però

$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{1}{p}$: ma y' esprime la tangente trigonometrica che la tangente la curva interiore nel punto (x,y) fa con l'asse delle x, dunque nel rigoglio, e per dove $p=0$, ivi essendo pure $y=0$ perchè ivi è l'origine delle coord.^e ed è per questo che alla (59) non è si aggiunta la costante arbitraria. —

§. 368. Dalla (56) si ottiene

(60) $x+\frac{c_1}{2k}=\frac{c_1+cp^2}{2k\sqrt{p^2+1}}$, onde

$x^2+\frac{c_1x}{k}+\frac{c_1^2}{4k^2}=\frac{c_1^2+2cc_1p^2+c^2p^4}{4k^2(p^2+1)}$,

ovvero

$(p^2+1)(4k^2x^2+4kc_1x+c_1^2)=c_1^2+2cc_1p^2+c^2p^4$, ossia

$$p^2 + \frac{(2CC_1 - 4k^2x^2 - 4kC_1x - C_1^2)}{C^2}p^2 = \frac{4k^2x^2 + 4kC_1x}{C^2},$$ e quindi la

(61) $$p^2 = \frac{C_1^2 - 2CC_1 + 4k^2x^2 + 4kC_1x}{2C^2} \pm \sqrt{\left(\frac{C_1^2 - 2CC_1 + 4k^2x^2 + 4kC_1x}{2C^2}\right)^2 + \frac{4k^2x^2 + 4kC_1x}{C^2}}$$

e la

(62) $$p = \left(\frac{C_1^2 - 2CC_1 + 4k^2x^2 + 4kC_1x}{2C^2} \pm \sqrt{\left(\frac{C_1^2 - 2CC_1 + 4k^2x^2 + 4kC_1x}{2C^2}\right)^2 + \frac{4k^2x^2 + 4kC_1x}{C^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se in questo valore si metta $k^2 + C$ a vece di C_1, e dipoi si faccia sostituzione nella (59), e poscia si determini C dipendentemente dalla cond.e che ad $x = a$, corrisponda $y = b$, si avrà l'equazione della curva interiore parallela alla curva interiore, e dipoi quella della esteriore, e dipoi quella della curva esteriore dipend.e dal §. — — —

§. 369 La linea dell'estradosso sia presentata dalla

(63) $my_1 = x_1 + n$, essendo l'asse delle x verticale, e quello delle y orizzontale: m sia la tangente trigonometrica; dalla (63) si ha $x_1 = my_1 - n$ che sostituito nella (37) si ha la

(37) $(y_1 - y)\,dy - (x - x_1)\,dx = 0$

(64) $(y_1 - y)\,dy - (x - my_1 + n)\,dx = 0$ da cui deducesi la

(65) $y_1 = \frac{x\,dx + n\,dx + y\,dy}{dy + m\,dx}$, che messo

(38) $(y_1 - y)\frac{ds}{dx} = -R + \sqrt{R^2 + C\frac{ds^2}{dy^2}}$

nella (38) si ha la

(66) $\left(\frac{(x+u)dx + ydy}{dy + mdx} - y\right)\frac{ds}{dx} = -R + \sqrt{R^2 + C\frac{ds^2}{dy^2}}$; ovvero la

(67) $\frac{x+u-my}{dy+mdx}ds = -R + \sqrt{R^2 + C\frac{ds^2}{dy^2}}$;

e però, la

(68) $\left(\frac{x+u-my}{dy+mdx}\right)^2 ds^2 + 2R\frac{x+u-my}{dy+mdx}ds = C\frac{ds^2}{dy^2}$; l'integrale determinato di quest'equazione rappresenta la linea dell'intradosso relativa alla retta dell'estradosso (63). —

§. 370. A maggiore facilità supponiamo che la linea dell'estradosso sia orizzontale, per cui $m=0$, e la (68) si muta nella

(69) $\frac{(x+u)^2}{dy^2}ds + 2R(x+u)dy = C\frac{ds}{dy}$

Supposto ds costante, al §. 367. si è veduto essere $R = -\frac{dsdx}{d^2y}$, d'onde la

(70) $(x+u)^2 - 2(x+u)\frac{dxdy}{d^2y} = C$, ovvero la

(71) $\frac{d^2y}{dy} - \frac{2(x+u)dx}{(x+u)^2 - C} = 0$, di cui l'integrale, è la

(72) $\log.dy = -\log((x+u)^2 - C) = \log C_1 . ds$, poichè ds costante: e passando ai numeri

(73) $dy = C_1 ds((x+u)^2 - C)$.

A determinare C_1, si pone mente che nel rigoglio $x=0$, e $ds = dy$ come al §. 367.

laonde, dalla (73) deducesi la

(74) $1 = C_1(u^2 - C)$, quindi la

(75) $C_1 = \frac{1}{u^2 - C}$, per cui la (73) mutasi nella

(76) $dy = \frac{(x+u)^2 - C}{u^2 - C} ds$, che innalzata a quadrato, da la

(77) $dy^2 = \frac{((x+u)^2 - C)^2}{(u^2 - C)^2}(dx^2 + dy^2)$, e poi

(78) $dy = \frac{(x+u)^2 - C}{\sqrt{(u^2 - C)^2 - ((x+u)^2 - C)^2}} dx$,

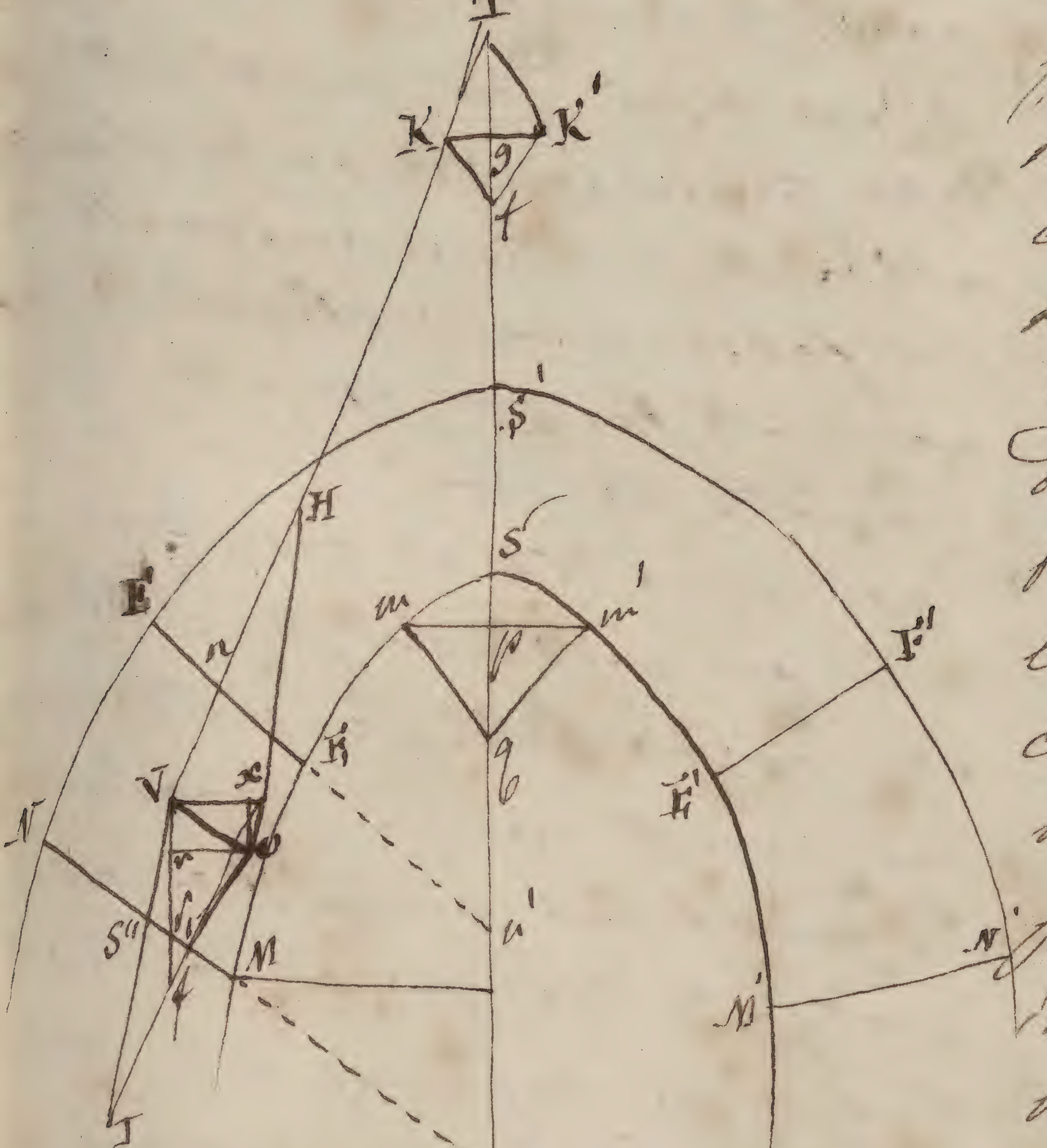
che è l'equazione del differenziale della curva elastica come si è veduto.

Per la qual cosa si vede che nella costruzione dei ponti gli Architetti dovrebbero preferire questa alle altre forme anche per l'eleganza.

E' questo il caso di una strada.

= §. 371. Finora abbiamo supposto che la forza sollecitante il profilo della grossezza della volta, sia la sole gravità.

Supponiamo ora, che diviso il profilo in due parti eguali con una verticale che passi pel rigolio, due forze una verticale, e l'altra normale alla curva dell' intradosso che sollecitano il profilo e si mantengono le stesse per ciascuna coppia di punti dell' intra-



(Fig. 88)

dopo egualmente distanti dalla montata variando però in intensione. ——

Supporremo che le prefate forze verticali e normali sieno applicate ai diversi punti del sistema di quello che si consideravano applicate ai punti dell'intradosso. ——

Ciò posto (fig. 88) supponiamo diviso il profilo della volta in tre parti EFNM, E'F'N'M', e la media EFF'E', e suppongo che le due prime parti sieno eguali ed egualmente poste riguardo alla porzione intermedia che è divisa per metà dalla verticale TR che passa pel orgoglio. ——

Perchè il profilo non concepisca movimento veruno strisciando sopra i tagli, è necessario che le tre porzioni sieno in equilibrio anche se variino ~~i tagli~~ le parti esterne EM, F'M', cioè se s'impiccoliscano o ingrandiscano restando nella stessa posizione i tagli FE, F'E'. ——

Siano α, ω, gli angoli che fanno verticale coi rispettivi tagli FE, MN. L'angolo α, è costante, ed ω è variabile. Siano P e Q le forze normali e verticali che

sollecitano l'intradosso.—
E' facile a vedersi, che nelle fatte supposizioni la risultante delle forze verticali debba cadere sulla TR che divide in parti simmetriche le due parti.
Siano m, m' due punti dell'intradosso similmente posti rispetto a TR e saranno animati da due forze una verticale e l'altra normale fra si eguali.—
Condotta la mm' sarà perpendicolare a TR e rimarrà divisa per metà in s, e di conseguenza tutte le rette che dai punti m, m' si conducono si uniranno nella TR; onde protratte da m, ed m' le rette eguali mq, m'q che rappresentano le forze eguali e normali applicate ai punti m ed m', esse rette s'incontreranno in un punto q della TR. Lo stesso avendo luogo per tutti i punti egualmente posti rispetto al rigoglio, ne conseguita che la direzione della risultante delle forze normali sarà la TR che porremo applicata in T punto della sua direzione.—
Sia 2N questa risultante: si divida T al mezzo del taglio TE disposizione costante, ed a lui perpendicolare, si conduca Tu, e si sup

Lezione 78.
La 79. Ripetiz.

presenti per T^t la risultante $2M$, che venga scomposta in due TK, TK', la 1.ª secondo Tu, e l'altra TK' andrebbe ad incontrare il taglio $F'F'$ di posizione costante. Per l'equilibrio, le due TK, e TK' è necessario che sieno distrutte dalle forze che agiscono sulle due porzioni $FEMN$, $F'E'M'N'$ sulle quali poggia la porzione media $F'E'E'F'$.

Presentiamo per VU la risultante di tutte le forze che sollecitano $E'FNM$ e V il punto ove incontra la Tu prolungata. La VU si scomponga in due VI perpend.e al taglio invariabile NM e VH nella direzione $V\!u$ cosicchè si ha il parallelogrammo HI. la VI resta distrutta dalla resistenza del taglio MN, e per l'equilibrio la VH dovrà equilibrare TK, cioè essere $VH=TK$ così si direbbe per la TK'. Questa sarà l'equazione da esprimere analiticamente. Si prolunghi il taglio $F'E$ fino che incontri in u' la verticale TK, e per il detto sarà $F'u'T=\alpha$, e quindi, l'angolo $KTs'=90°-\alpha$.

Da K si conduca su Ts' la perpend.e Kg, e siccome $KT=Kt$, sarà $tg=Tg=M$; ma nel triangolo TgK si ha

$TK : Tq :: 1 : \theta KTq$, ovvero
$TK : M :: 1 : \theta(90° - \alpha)$, oppure
$TK : M :: 1 : \theta\alpha$, e però la
(79) $TK = \frac{M}{\theta\alpha}$.

La forza normale P che agisce su ciascun punto del elemento ds dell'arco finito TM sarà Pds: questa forza Pds si scomponga in 2, l'una orizzontale e l'altra verticale.

La forza Pds è normale ed è perpend. alla tangente, e l'angolo che fa la forza Pds con l'asse verticale delle x, è complemento dell'angolo che fa la tangente coll'asse medesimo, ossia è eguale all'angolo che la tangente fa coll'asse orizzontale delle Y. Mat. al §. 356. si è veduto che $\frac{dx}{ds}$, e $\frac{dy}{ds}$, sono i coseni degli angoli che la tangente fa rispett.^o con gli assi delle x, e delle y; dunque, le componenti orizzontali e verticali della forza Pds, saranno.
$Pds.\frac{dx}{ds}$, $Pds.\frac{dy}{ds}$, che si riducono a Pdx, e Pdy.

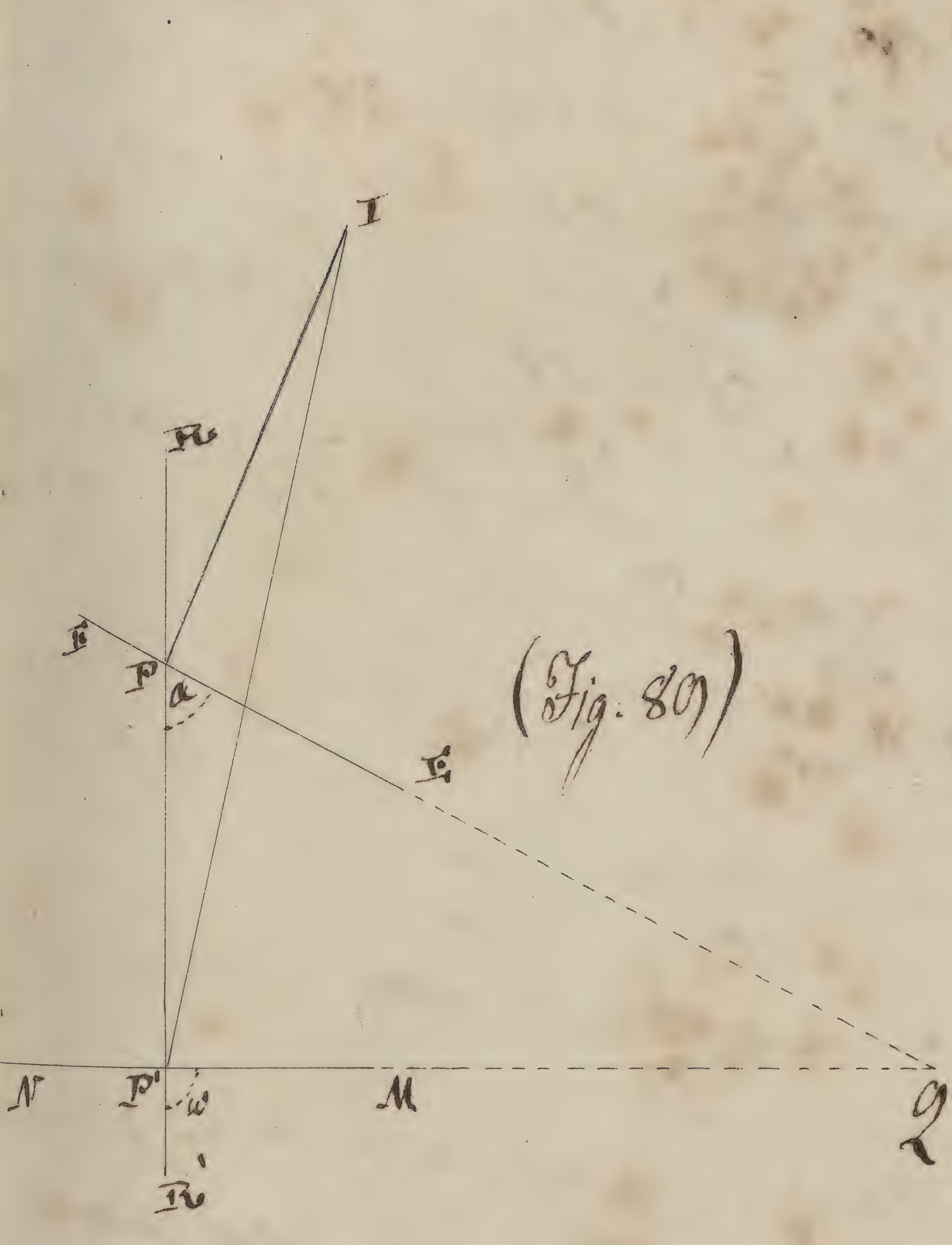
Dunque $\int Pdx$, e $\int Pdy$ sono le somme delle forze orizzontali e verticali che sollecitano l'arco MT.

estendendo gli integrali da F
fino ad M.
La risultante delle forze
verticali Q che sollecitano
l'arco finito MF è $\int Q ds$:
abbiamo presentato con
VO la risultante unica di
tutte le forze che sollecita-
no la porzione MNFF, cioè
che sollecitano l'arco MF.
Laonde, se scomporremo
la VO in 2, Vx orizzontale,
Vr verticale, dovrà essere

(80) $Vx = \int F dx$,

(81) $Vr = \int F dy + \int Q ds$

Si protragga la VO finchè incon-
tri in f la VI. Si osservi che
If è parallela ad Hu, e per l'ipo-
tesi perpendic. al taglio FF, e
VI è perpend. al taglio MN:
di conseguenza, gli angoli
che fanno tra se questi 2
tagli è l'angolo che fanno
le due rette ai tagli perpen-
dicolari. (Fig. 89) Siano
FF, MN i tagli, ed IP, IP'
i loro perpendic. rispettivi ai ta-
gli stessi; ed RR' la verticale;
avremo l'angolo $w = \alpha + Q$
$= \alpha + \widehat{PIP'}$, e però $PIP' = w - \alpha$
e però (prec. fig.) $VIf = w - \alpha$.
L'angolo VSV, è retto; l'an-
golo $S\ddot{v}_1V$ è l'angolo w che fa
il taglio MN colla verticale
poichè Vf è verticale; e però



(Fig. 89)

sarà l'angolo $IVf = 90^\circ - \omega$. — Inoltre, l'angolo vfv, è l'angolo che fa la verticale vf col VI che è perpend.° al taglio FF, onde $vfv = 90^\circ - a$. L'angolo ϕfvr, è l'angolo che fa fv con la orizzontale vv: ma fv è perpendicolare al taglio FF, e la orizzontale rv è perpend.° alla verticale; dunque $fvr = a$. Dal triangolo rettangolo fvr si ha la proporzione $fv : rv :: 1 : \theta fvr$ ossia $fv : rv :: 1 : \theta a$, e però la

(82) $fv = \frac{rv}{\theta a}$; si ha poi la

(83) $fr = \sigma a . rv$. Inoltre $If : Vf :: \sigma IVf : \sigma VIf$, ossia $If : Vf :: \sigma\omega : \sigma(\omega - a)$, onde $If = \frac{Vf.\sigma\omega}{\sigma(\omega-a)}$; ma $VH = IV =$ $If + fv = \frac{Vf.\sigma\omega}{\sigma(\omega-a)} + \frac{rv}{\theta a} = \frac{(Vr+rf)\sigma\omega}{\sigma(\omega-a)}$ $+ \frac{Vx}{\theta a}$; dunque la

(84) $VH = \frac{(\int Pdy + \int Qds + \sigma a \int Pdx)\sigma\omega}{\sigma(\omega-a)}$ $+ \frac{\int Pdx}{\theta a} = \frac{M}{\theta a}$; ma $\sigma(\omega - a) = \sigma\omega\theta a - \sigma a\theta\omega$;

Dunque
$\frac{(\int Pdy + \int Qds + \sigma a \int Pdx)\sigma\omega\theta a}{~~\sigma\omega\theta a - \sigma a\theta\omega~~}$
$(\sigma\omega\theta a - \sigma a\theta\omega)\int Pdx = \frac{M\theta a(\sigma\omega\theta a - \sigma a\theta\omega)}{\theta a}$ ossia
$\int Pdy + \int Qds + \sigma a\int Pdx +$
$(\sigma\omega - \sigma a)\int Pdx = M\left(\frac{\sigma\omega . \theta a}{\theta a}\right.$

$= \frac{M}{\theta\alpha}(\sigma\omega\theta\alpha - \theta\alpha)$: ovvero

(85) $\frac{M}{\theta\alpha}(\sigma\omega\theta\alpha - \theta\alpha) = \int P dy + \int Q ds + \sigma\omega \int P dx$

che è l'equazione dell'equilibrio. Ma $\sigma\omega = \frac{dx}{dy}$ come al §. 358: dunque, avremo

(86) $\frac{M}{\theta\alpha}\left(\frac{dx}{dy}\theta\alpha - \theta\alpha\right) = \int P dy + \int Q ds + \frac{dx}{dy}\int P dx$. alla quale si può dare la forma della

(87) $\left(\frac{M}{\theta\alpha} - \int P dx\right)\frac{dx}{dy} - M = \int P dy + \int Q ds$, la quale differenziata da, la

(88) $-P dx . \frac{dx}{dy} + \left(\frac{M}{\theta\alpha} - \int P dx\right) d . \frac{dx}{dy} = P dy + Q ds$. Dalla (88) si ha

$$-\frac{P dx . \frac{dx}{dy}}{d \frac{dx}{dy}} + \frac{M}{\theta\alpha} - \int P dx = \frac{P dy + Q ds}{d . \frac{dx}{dy}}$$; ossia

$$-\frac{P(dx^2 + dy^2)}{dy . d\frac{dx}{dy}} + \frac{M}{\theta\alpha} - \int P dx - \frac{Q ds}{d\frac{dx}{dy}} = -\frac{P ds^2}{dy . d\frac{dx}{dy}} + \frac{M}{\theta\alpha} - \int P dx - \frac{Q ds}{d\frac{dx}{dy}} = 0.$$

Se di questa prendiremo il differenziale e cambieremo i segni (M, α, costanti) e si avrà

(89) $d\left(\frac{P ds^2}{dy . d\frac{dx}{dy}}\right) + d\left(\frac{Q ds}{d\frac{dx}{dy}}\right) + P dx = 0.$

Ma allorchè nessuna

delle variabili e costanti, detto R il raggio d'osculo, si ha

$R = \frac{ds^3}{dy^2 . d\frac{dx}{dy}}$; dunque

$\frac{ds^2}{dy . d\frac{dx}{dy}} = R . \frac{dy}{ds}$, e

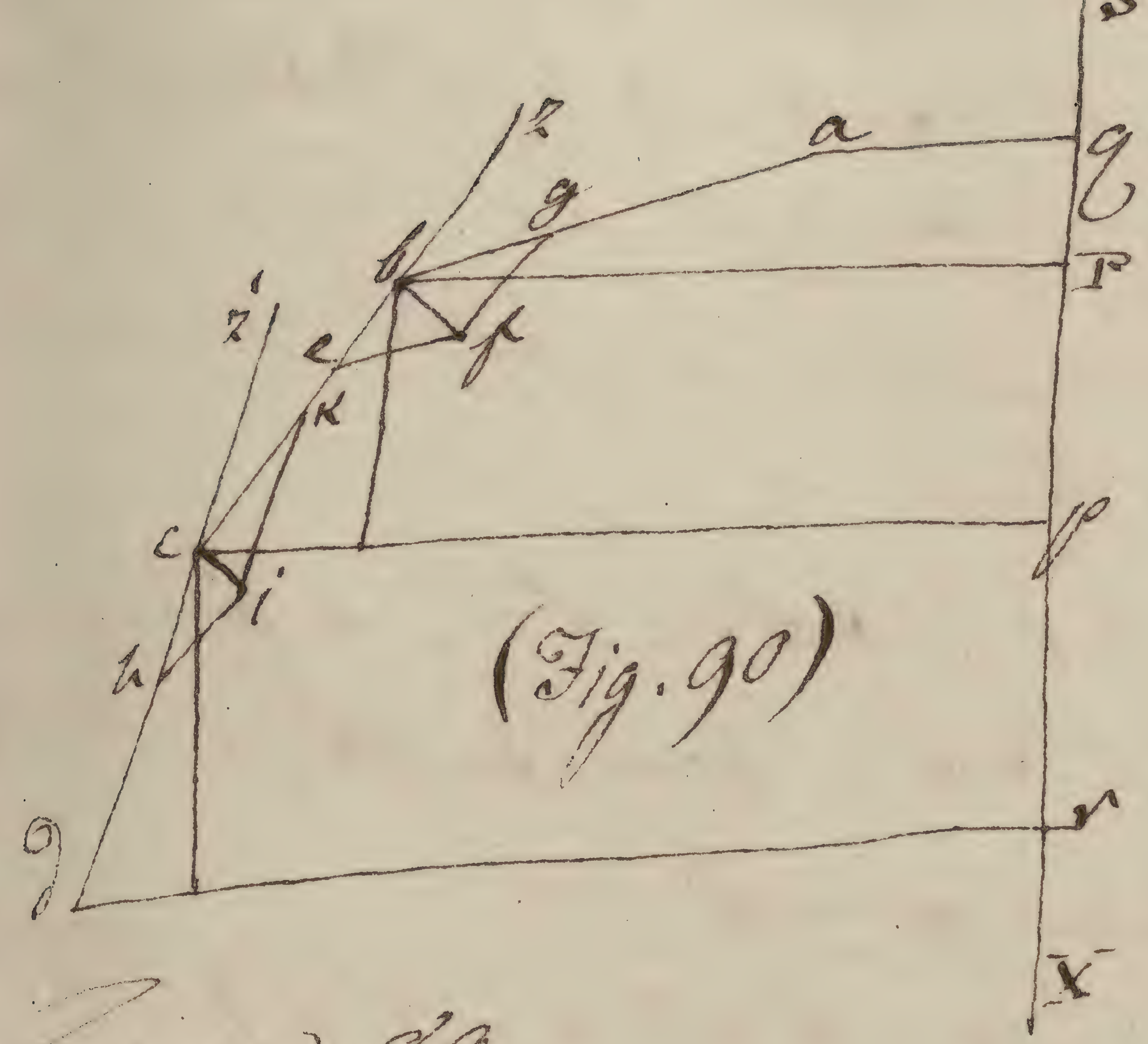
$\frac{ds}{dx \frac{dx}{dy}} = R . \frac{dy^2}{ds^2}$; fatta la sostituzione nella (89) si ha

(90) $d\left(PR\frac{dy}{ds}\right) + d\left(QR\frac{dy^2}{ds^2}\right) + Pdx = 0$. Equazione di equilibrio.

Quando si voglia far uso di quest'equazione, vi si debbono porre i valori delle forze P, Q date dalla natura della questione. Qui si può supporre qualunque variabile indipendente, e quando una se ne ponga dipendente, si deve porre dipendente quella che facilita il calcolo sostituendo a vece di R il suo valore dipend. e dalla cond. di tale variabile indipend.

§. 372. (Fig. 90). D'altra guisa si può determinare l'equazione dell'equilibrio.

Alla curva dell'intradosso surroghiamo un poligono di un numero indefinitamente grande di lati piccolissimi, e siano ab, bc, cd tre lati di esso consecutivi:



(Fig. 90)

Lezione 80.

La forza normale P e la verticale Q siano applicate agli angoli del poligono. ——

In tale supposizione le forze che agiscono in un latterzo intermedio per es. da b a c, e da c a b si ~~fanno~~ dibbono equilibrare. Sia SX verticale l'asse delle X e la Q verticale sarà parallela ad esse. ——

La forza normale che agisce in b, e che si può considerare agente sull'elemento ds, sarà presentata da Pds. La forza verticale che agisce sull' elemento stesso, sarà Qds. Nel punto c queste due forze saranno $(P+dp)ds$, e $(Q+dQ)ds$. Poniamo $sq = x$, $qa = y$. $ab = ds$, e $bf = Pds$ si scomponga la bf in due secondo i laterculi bc, ba del poligono; l'angolo $zba = \frac{ds}{R}$ essendo R = raggio d'osculo. Laonde, l'angolo di contatto $bez' = \frac{ds}{R+dR}$; ma la risultante e le due componenti di lei vengono presentate ciascuna dal seno dell'angolo che fanno le altre due, avremo dunque $s\,abe : s\,gbf :: bf : be$, ovvero $s\,zba : s\,gbf :: Pds : be$; ma la forza bf è normale alla curva e però perpend. alla tangente di lei nel punto b, vale a dire perpend. al laterculo ba che è nella direz. tangente, dunq.

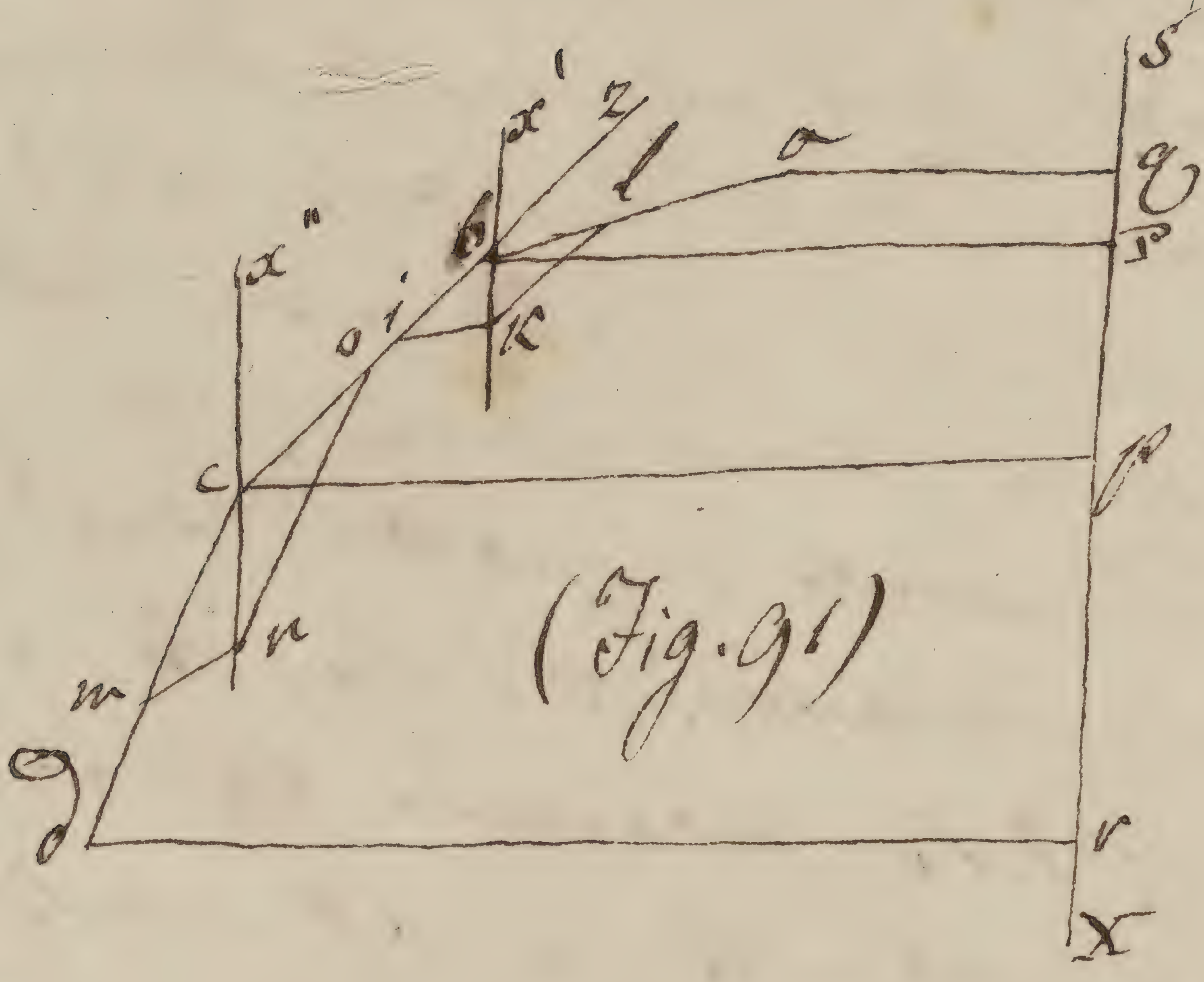
$o2ba : 1 :: Pds : be$; ma l'angolo zba di contatto è indetermi.^e piccolo e di conseg.^a al seno si può sostituire l'angolo stesso, dunque avremo

$\frac{ds}{R} : 1 :: Pds : be$, e quindi

(91) $be = P.R$; troverebbesi della stessa guisa la

(92) $ch = (P + dP)(R + dR)$.

Si osservi la (fig. 91)



(Fig. 91)

Presentiamo per bk la forza P applicata a b, e siano bl, bi le componenti nella direzione dei laterculi ba, bc, ed avremo $o\pm cbl : okbl :: bk : bi$; ma $ocbl = oabz = obik$; e $okbl = oabx'$, dunque avremo $oabz : oabx' :: gs : bi$. Osserviamo che ba è nella direzione della tangente, e però l'angolo abx' è l'angolo che fa la tangente colla verticale, cioè coll'asse delle x; ma il coseno dell'angolo che fa la tangente coll'asse delle y, viene presentato da $\frac{dy}{ds}$, §. 354, e i due angoli che fa la tangente coi due assi delle x e delle y, e ciascuno è complemento dell'altro, dunque $\frac{dy}{ds}$ rappresenta il seno dell'angolo che fa la tangente coll'asse delle x, cioè rappresenta il $oabx$; anche qui.

si può sostituire al seno l'angolo stesso, e si avrà
$\frac{ds}{R} : \frac{dy}{ds} :: Q\,ds : bi$, e però

(93) $bi = \frac{QR\,dy}{ds}$. Si ha poi

$\theta mcb : \theta mcu :: (Q + dQ)\,ds : co$;
ma $\theta mcu = \theta z'xx'' = \theta(bcx'' - bxz')$
$= \theta bcx''\,\theta bxz' - \theta bcx''\,\theta bxz'$, e
$\theta bcx''\,\theta bcz' = \theta bcx''$ per essere l'angolo indefinitamente piccolo.
Inoltre $\theta bcx'' = \frac{dy}{ds} + d\frac{dy}{ds}$;
siccome supponiamo ds costante, si avrà $\theta bcx'' = \frac{dy + d^2y}{ds}$;
si ha ancora $\theta bcx'' = \frac{dx + d^2x}{ds} \times \frac{ds}{R + dR} = \frac{dx + d^2x}{R + dR}$; poichè l'angolo dello x con la tangente ha per coseno $\frac{dx}{ds}$, e però l'angolo ...

A vece poi del seno bcz' si può prendere l'angolo stesso che è $bcz' = \frac{ds}{R + dR}$; però sarà
$\theta mcb : \frac{dy + d^2y}{ds} - \frac{dx + d^2x}{R + dR} ::$
$(Q + dQ)\,ds : co$; ma
$\theta mcb = \theta bcz'$ e in luogo di questo seno si può prendere l'arco,
dunque avremo
$\frac{ds}{R + dR} : \frac{dy + d^2y}{ds} - \frac{dx + d^2x}{R + dR} ::$
$(Q + dQ)\,ds : co$, e però la

(94) $co = \frac{(Q + dQ)(R + dR)(dy + d^2y)}{ds} -$
$(Q + dQ)(dx + d^2x)$; ma per l'equilibrio esser debbe la

(95) $be+bi=ck+co$, dunque avremo la

(96) $PR+\frac{QRdy}{ds}=(P+dP)(R+dR)+\frac{(Q+dQ)(R+dR)(dy+d^2y)}{dR}-(Q+dQ)(dx+d^2x)$, la quale sviluppata da

$PR+\frac{QRdy}{ds}=PR+RdP+PdR+dPdR+\frac{QRdy+RdQdy+QdRdy+dQdRdy+QRd^2y+RdQd^2y+QdRd^2y+dQdRd^2y}{ds}-Qdx-dQdx-Qd^2x-dQd^2x$; togliendo i termini che si elidono, e tenendo conto solo dei termini che hanno i diff.i ad una sola dimensione, osservando che d^2y e d^2x sono di due dimensioni e $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ è di una sola dimensione, avremo

$RdP+PdR+\frac{RdQdy+QdRdy}{ds}+\frac{RQd^2y}{ds}-Qdx=0.$

Osserviamo che i due primi termini di quest'equazione non sono che i diff.i di PR, e la frazione $\frac{\;}{ds}$ non è che il diff.e di $\frac{RQdy}{ds}$, supposto ds costante, dunque a quest'equazione si può dar la forma della

(97) $d(PR)+d\left(\frac{RQdy}{ds}\right)-Qdx=0$

ove ds è costante; quest'è l'altra equazione d'equilibrio che porta ai risultati della (90) benchè sia di diff.a per la maniera di scomporre le forze.

Vedesi poi che la (90) deve essere preferita, se $P=0$, e la (97) se $Q=0$.

§. 373. Si osservi la (Fig. 85)
Sia z la lunghezza del taglio mM, e si è ved. al §. 360. che il profilo $MmnN$ indeterminatamente piccolo è
$\left(2R+\frac{1}{2}z^2\right)d\alpha=\left(2R+\frac{1}{2}z^2\right)\frac{ds}{R}$
mettendo invece di α il trovato valore $=\frac{zds}{2R}(2R+z)$.
Quest'area esprimerà egualmente il peso di $mnNM$ chiamandosi ~~dx~~ l'elem. ds. Sia Q il peso che sollecita ciascun punto dell'elemento ds, e il peso di quest'area eguaglierà Qds, onde si avrà la

(98) $\frac{z}{2R}(2R+z)=Q$. Se conoscesi il raggio d'osculo di un punto qualunque dell'intradosso ed una delle z e Q, si ha d'onde determinare l'altra.

§. 374. Poniamo $P=0$, e l'equazione (90) riducesi alla

(99) $d\left(QR\frac{dy^2}{ds^2}\right)=0$, da cui derivasi la

(100) $QR.\frac{dy^2}{ds^2}=C$, integrando.–
A determinare la C, poniamo che nel rigoglio sia $z=h$, $Q=q$, ed $R=r$; si è veduto al §. 367. che al rigoglio debbe essere $dy=ds$; sostituiti i valori di z, Q, R, la (98) riducesi alla

(101.) $\frac{a}{2r}(2r+k)=q$; dalla (100) si ha
$qr=c$, e però la

(102) $c=\frac{k}{2}(2r+k)$; ma

(103) $R=\frac{ds^3}{dy^2 d\frac{dx}{dy}}$ come si è ved.º nel C.
Dunque dy dipend.º dalla (100) si ha
$\frac{Qds}{d\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2}k(2r+k)$ ovveramente
avremo la

(104) $Qds=\frac{1}{2}k(2r+k)d\frac{dx}{dy}$; integrando, ed osservando che k ed r sono quantità costanti si ha

(105) $\int Qds=\frac{1}{2}k(2r+k)\frac{dx}{dy}$; ma
$\int Qds$, è l'area mnNM del profilo della volta, dunque avremo

(106) $M=\frac{1}{2}k(2r+k)\frac{dx}{dy}$, non mettendosi costante perchè cominciano i profili dal rigonfio;
ma al §— si è trovato
$\frac{dy}{dx}=\frac{A}{M}$, onde $M=A\frac{dx}{dy}$, con

Dalla (106) rendesi aperto che il profilo di una volta equilibrata su cui agisce la gravità è quadrabile, come si è veduto al §.—

§. 375. Una delle (96) ovveram.te (97) servono a determinare la curva dell'intradosso allorchè la legge delle forze che sollecitano la volta si riceverà ——

Capitolo XXIX.

Dell' Attrito

§. 375. L'attrito è una forza passiva e resistente che tende ad impedire il moto, se mai è prodotto da fo. Allorchè un corpo è in quiete sopra un piano orizzontale mobile, la resistenza del piano distrugge l'effetto della gravità, e si dovrebbe dire che il minimo impulso fosse capace di farlo muovere. L'esperienza dimostra che quanto più il corpo è grande tanto maggior forza vi vuole per muoverlo; dunque si deve conchiudere che vi sieno delle resistenze o forze passive che si oppongono al moto. Quando un corpo poggia sopra un altro, per quanto levigate sieno le superficie, vi sono in esse delle parti prominenti che s'incastrano nelle parti vacue dell'altro, e l'arte non può togliere tutte queste ineguaglianze. Dunque, quando si tratta di muovere questo corpo, bisogna far sì che queste parti vengano fuori o si rompano. Dunque, si vede come sia necessaria una forza benchè sia esso indiff.e al moto ed alla quiete —

Inoltre, vi concorre la tempe-
ratura, l'umidità dell'atmosfera
la velocità del movimento,
e la maniera di movimento.
Trattandosi di ciò il miglior
mezzo si è quello di ricorrere
all'esperienza; esso attrito
verrà dato anche dalla forza
che ~~tendi a muovere~~ il corpo-
che fa muovere.

§.377. Rispetto alla qualità del
moto, si distinguono tre casi

1° Quando i corpi strisciano so-
pra un piano.

2° Quando i corpi ruzzolano sopra
un piano.

3° Quando una superficie con-
vessa gira entro una concava;
ed è converso. Questi tre di-
versi casi costituiscono tre
diverse specie d'attrito.—

§.378. Gli elementi che possono
far variare l'attrito sono

1° La pressione esercitata
dal corpo contro la superfi-
cie sulla quale si muove.

2° La scabrosità delle super-
ficie dipendente dalla loro
natura o preparazione.

3° La durata del loro con-
tatto

4° L'estensione delle superfi.

5° La velocità del moto.

§. 379. Fra le tre specie di attrito che abbiamo divisate, cioè quello che striscia su di un piano è molto più forte della 2.a poichè nella 1.a il corpo in moto è obbligato a rompere una parte delle incastrature, nel mentre che nel 2.o caso il corpo sprigiona in parte le sue prominenze e in parte scorre sulle altre come sopra un piano inclinato. —— . —— .

§. 380. Quantunque la determinazione dell'effetto dell'attrito sia al sommo difficile, nulla di meno ragionate ricerche ed esperienze hanno fatto conoscere i seg.ti principij.

1.° L'attrito diminuisce di molto al crescere il pulimento delle superficie; e ciò perchè il n.o delle incastrature diminuisce e diventano meno profonde. ——

2.° L'attrito cresce al crescere della pressione che uno dei corpi esercita contro l'altro. e ciò perchè le incastrature in allora si fanno più profonde e maggior forza vi vuole a disimpegnare le parti.

Questa legge è assai costante e mostrasi generalmente la proporzionalità dell' attrito alla pressione, è tal fiata alterata attribuire

si debbe ad altre cause che modificano pur mo. l'effetto che riescono talvolta a velarlo. Nelle grandi pressioni l'attrito diminuisce alcun poco, ma si può stante la sua piccola diminuzione tal diffza trascurare ——

Lezione 81.

3:° L'attrito poco o nulla dipende dall'ampiezza delle superficie. Ben è vero che quando la pressione è piccola e la superficie grande la resistenza è maggiore massime se frappongasi untume: ma questo probabilmente dipende dalla coesione. A dimostrarlo si figuri un poliedro, le faccie del quale sieno di grandezza diversa ed abbiano il medo. pulimento. ——

Facendo strisciare sopra un piano ora l'una, ora l'altra di qte faccie, i punti di contatto saranno più o meno numerosi secondo che sarà più o meno estesa la base: ma crescendo i punti di contatto la pressione diminuisce. Dunque vi sarà bensì un nro maggiore di superficie incastrate, ma le incastrature saranno meno profonde, e di conseguenza vi vorrà minor forza a levarle. Laonde apparisce che può esservi compenso fra la minor pressione ed il maggior nro. di prominenze

20 incastrate

4.° La velocità di corpi striscianti contribuisce sovente a diminuire l'attrito. Ma questa legge non è generale, e vi ha un gran n.° di casi ne' quali la velocità non v'influisce per nulla o pochissimo.

Si può render ragione della diminuzione dell'attrito allorchè aumenta la velocità, osservando che il disimpegno delle incastrature succede con prestezza e si eseguisce con facilità. Ma d'altronde si potrebbe dire che quando i corpi si muovono più presto tante maggiori incastrature vi sono nello stesso tempo. Pare che queste due circostanze si equilibrino non facendo vedere la diffe...

5.° Spalmando le superficie con materie untuose, si ottiene un vantaggio considerevole, e tanto più quanto l'unto ha maggior consistenza. Così l'unto di sego scema l'attrito di una metà: e quando ancora l'unto non si rinnovi fin che rimane nella superficie qualche untuosità dura tuttavia il vantaggio, potendo si considerare l'attrito delle superficie untuose, siccome

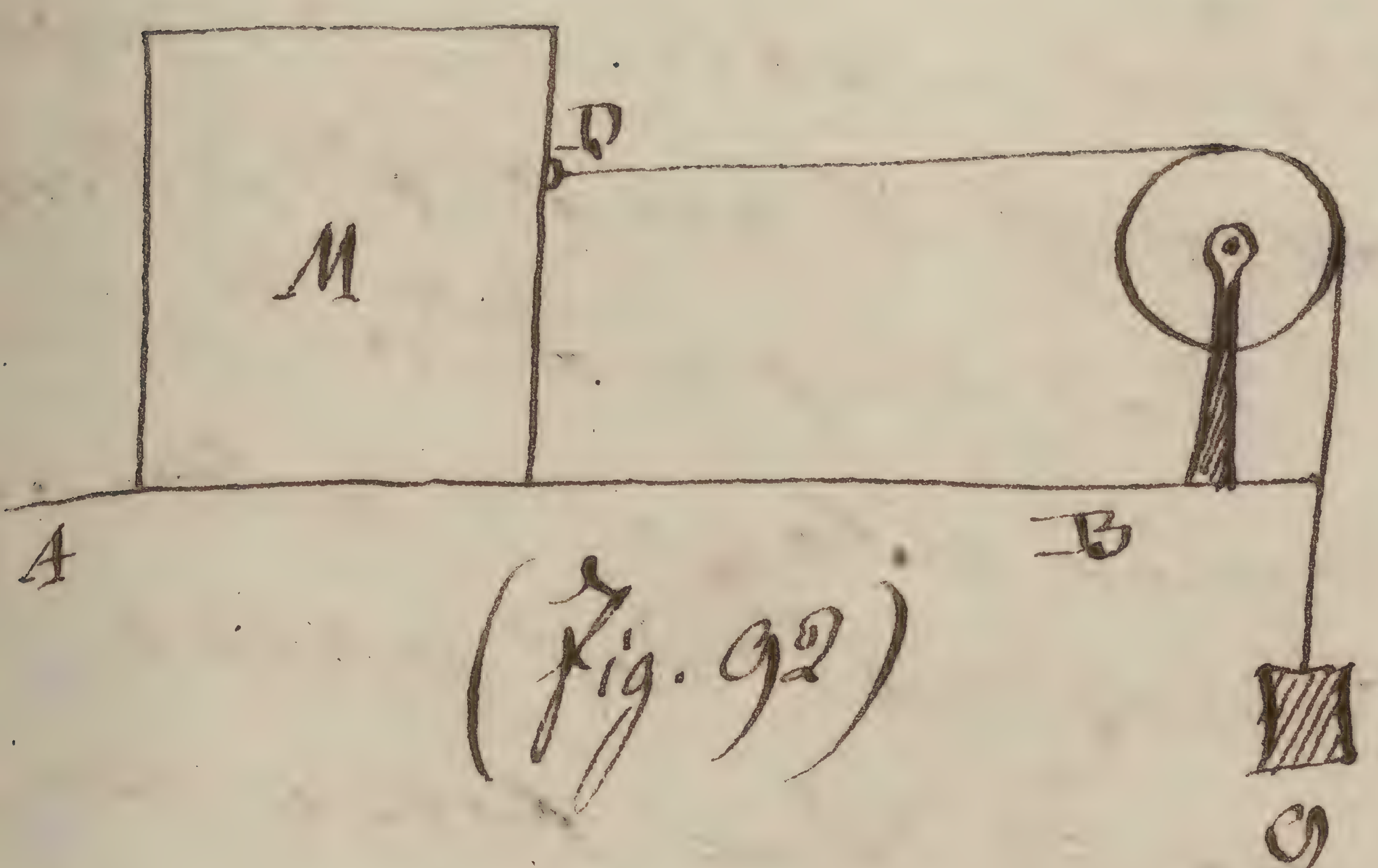
medio fra le superficie asciutte e quello fra le superficie di fresco spalmate.

6° Varia l'attrito secondo la durata del contatto, e cresce per certo tempo finchè giunge al suo valore massimo e costante. Questo tempo è di un minuto o due ne' legni; brevissimo e impercettibile nei metalli, ma ne legni soprapposti ai metalli dura parecchi giorni. Si prolunga di molto coll'ungere le superficie. Generalmente è maggiore quando le superficie sono estese ed eterogenee.

§. 381. Essendo l'attrito della 1ª specie proporzionale alla pressione come mostra la esperienza, ed essa venga rappresentata da Q, l'attrito viene rappresentato da fQ, essendo f, il coefficiente d'attrito costante per le stesse specie di materie.

§. 382. A determinare f che è la relazione fra l'attrito e la pressione, sia il corpo M (fig. 92), il cui peso sia distrutto dal piano orizzontale sottoposto, se vi si applichi una forza che tenda a muoverlo strisciando sul piano, ed egli non l'asseconda, ciò proverrà dall'attrito.

Attaccata con un estremo al corpo M in D una cordicella, la quale passando per la scanalatura di una mobilissima girella, porti attaccato all' altro estremo un peso Q che produce un movimento iniziale nel corpo, e sia tale questo peso, che diminuendolo di pochissimo il corpo non si muova, Q misurerà la resistenza d'attrito, e detto M il peso del corpo, si avrà la



(Fig. 92)

(1) $Q = fM$, e però la

(2) $f = \frac{Q}{M}$.

Quest'esperienza fatta colla maggiore esattezza ci ha resi certi, che se M diventi $2M$, $3M$ &c; Q diventa $2Q$, $3Q$ &c e però f è costante.

Se $M = 1$, si ha la

(3) $f = Q$: il che mostra, che preso il corpo M per unità di peso, il coeff.° costante f, è il peso idoneo a vincere la resistenza d'attrito, cioè a produrre nel corpo M un movimento iniziale.

§.383. D'altra guisa determinare si può il coeff.° costante f.

Figuriamo un corpo insistente sopra un piano orizzontale, sul quale rimarebbe il corpo in quiete anche senza l'attrito.

Poniamo che il piano prenda un
posizione inclinata all'orizzon
tale di un angolo α. Si potrà
scomporre il peso P del corpo
in 2, una perpend. al piano
reso inclinato, e l'altra secon
do la direzione del piano, si
avranno le due forze compo
nenti $M\theta\alpha$, $M\sigma\alpha$; per quan
to piccolo fosse α, anche picc
lo oltre ogni limite, se non vi
fosse l'attrito, la forza $M\sigma\alpha$
romperebbe la quiete, e la
componente $M\theta\alpha$ mette da
vanti la pressione contro
il piano inclinato. Se dopo
quest'inclinazione il corpo ri
manga tuttavia fermo, si au
menti successivamente di
pochissimo l'angolo α, al
crescere degl'angoli i co
seni calano, e però diminui
rà la $M\theta\alpha$, e però diminuirà
l'attrito che è proporzionale
alla pressione; la $M\sigma\alpha$, au
menta, e finirà col mettere
in moto il corpo. Sia $\alpha=\omega$
l'angolo in cui cominciasse il mo
to iniziale del corpo, e la mi
sura dell'attrito sarà $M\theta\omega$,
avremo dunque la

(4) $fM\theta\omega = M\sigma\omega$, e però la

(5) $f = \sigma\omega = \frac{A}{B}$, essendo A l'altezza
e B la base del piano inclinato

Concluderemo adunque che il coeff.e f eguaglia la tangente dell'angolo α.

N. 384. L'esperienza ha pure dimostrato, che l'attrito della 2.a specie riesce proporzionale alla pressione, salvo alcune poche anomalie. Laonde eziandio per questa specie d'attrito ha luogo la

(1) $Q = fN$. A determinare in questo caso il coeff. f, serve il seg.e apparato.

Supponiamo due tavolette parallele ad un piano ed egualmente distanti da lui, collocate di guisa che fra loro esiste un vano parallelo sopra cui si poggia un cilindro coll'asse perpend.e ai due lati; di poi si accavalli un cedevole spago al cilindro passante per il vano alle cui estremità vi sono due pesi eguali. Aumentando ora da una parte il peso, il cilindro tenderà a prendere un moto rotatorio, e se non lo prende, causa ne sarà l'attrito. Aumentato il peso finchè si produca un moto lento e continuo, l'aumento di peso per cui ciò si ottenne è la misura dell'att. che il cilindro deve vincere nel ruzzolare sul piano.

Da questo esperimento

si può variare la materia ed il diametro del cilindro, e si può aumentare la pressione merce di varie cordicelle con pesi. Per essere sicuri dell'operazione si prova tanto da una parte che dall'altra, e quando la diff.e è piccolissima si prende il valor medio.

S. 385. L'esperienza ha mostrato che in pari circostanza l'attrito della 2.a specie è propor.e in ragion inversa del diametro del circolo base del cilindro:
2.° Che l'attrito varia secondo le diverse materie che formano il cilindro ed il piano.
3.° Che esso è molto ~~assai~~ minore di quello della 1.a specie.

S. 386. Per l'attrito della 3.a specie l'esperienza da gl'infrascritti risultamenti:
1.° In pari circostanze trovasi l'attrito proporzionale alla pressione: prossimamente, perchè qui pure come davanti S. 380. si è veduto per l'attrito della 1.a specie, l'attrito della 3.a specie s'impiccolisce alcun poco sotto le grandi pressioni;
2.° Varia l'attrito, al variare della .. due superficie. —

3.° Nell'att. della 3.a specie si ottiene grande vantaggio nello spalmare le superficie. L'unto di sego fresco diminuisce l'attrito della metà. Aumenta l'attrito consumandosi l'unto, ma ciò si fa più lentamente di quello che nella 1.a specie. —

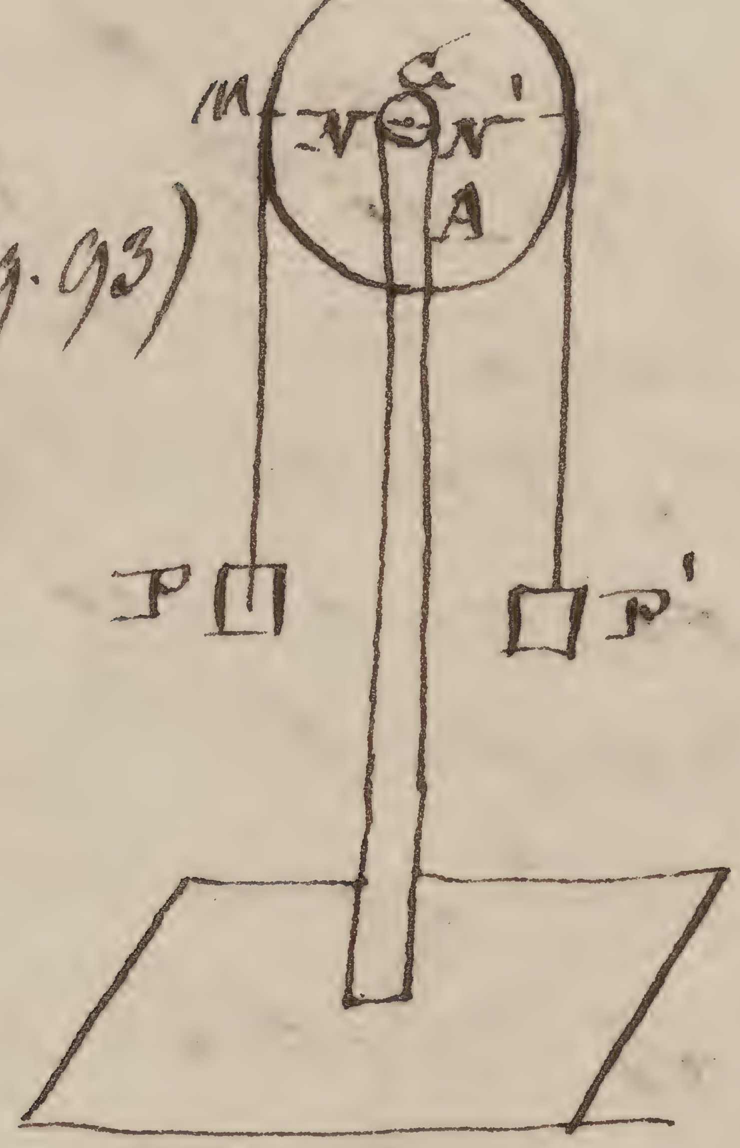
4.° L'attrito della 3.a specie non dipende dalla velocità o vi influisce sì poco che nella pratica può aversi per nulla.

5.° L'att. della 3.a specie è minore della 1.a —

A rendere di ciò ragione, si osservi che in quello della 3.a specie, le due superficie che si soffregano sono sempre le medesime, e quindi le prominenze una volta piegate, non devono fare più quella resistenza come se si dovessero di nuovo piegare o rompere come nella 1.a Da già considerazione si mostra che l'attrito della 3.a specie è minore di quello della 1.a come da l'esperienza. —

§. 387. A misurare l'att. della 3.a specie si osservi la fig. 9 3/ e sia la girella A che abbia nel suo centro un foro circolare del diametro NN' nel quale passi un altro cilindro che è asse della girella intorno a cui ruota.

(Fig. 93)



All'estremità di uno spago adattato alla scanalatura della girella siano due pesi eguali P, P'. Si aumenti uno dei due pesi P ad es. quanto basta ad imprimere nella girella una rotazione lenta e continua. L'aumento del peso non è la misura dell'attrito, ma da esso si potrà aver questo. All'uopo si osservi che il peso agisce all'estremità M. del diametro della girella, laddove l'attrito si fa all'estremità N dell'asse della girella; il peso adunque si deve ridurre ad una forza equivalente ed opposta alla resist. Sia il peso aggiunto a P, e il suo momento rispetto a C, sarà P.MC, e si otterrà un momento eguale a questo se si applichi un peso P' in N dedotto dalla proporzione

$P' : P :: MC : NC$, da cui

$$P' = \frac{P.MC}{NC}.$$

Per ottenere una maggior pressione si dovrà aumentare egualmente i pesi P, P', oppure mettere robusta di più la corda

Capitolo XXX.

Dell'equilibrio in alcune Macchine semplici avendo rispetto all'attrito

§. 388. Ritenute le denominazioni stabilite al §. 313, l'equazione d'equilibrio nel piano inclinato non avendo riguardo all'attrito, è

(1.) $P\theta w' - Q\theta w'' = 0$, e si vide che la pressione esercitata contro il piano viene data dalla

(2.) $N = P\theta w' + Q\theta w''$, dunque molt.e per f, la 2.a si avrà

$fN = f(P\theta w' + Q\theta w'')$ che mette davanti una forza nella direzione del piano inclinato che impedisce il moto del punto materiale sul piano stesso.

Alla forza dunque $P\theta w'$ che tende a spingere il corpo lungo il piano inclinato si oppongono le due forze $Q\theta w''$, e $f(P\theta w' + Q\theta w'')$ che gli sono in direzione opposta, e per l'equilibrio si avrà la

(4.) $P\theta w' = Q\theta w'' + f(P\theta w' + Q\theta w'')$ da cui la

(5.) $P = \frac{Q(\theta w'' + f\theta w'')}{\theta w' - f\theta w'}$: se Q abbia una direzion verticale, cioè sia un peso si avrà

$\omega'' = 90° - \omega$, e però la

(6) $P = \dfrac{Q(\sigma\omega + f\theta\omega)}{\theta\omega' - f\sigma\omega'}$. Allorchè la direzione di P è orizzontale $\omega' = \omega$, avremo

(7) $P = \dfrac{Q(\theta\omega + f\theta\omega)}{\theta\omega - f\sigma\omega} = \dfrac{Q(\sigma\omega + f)}{1 - f\sigma\omega}$.

Si osservi, che se il punto non faccia che poggiare sul piano inclinato, una componente deve premere contro il piano il punto. Se ciò succede per una $P\sigma\omega'$, $Q\sigma\omega''$ si devono prendere con segno contrario o lo stesso segno.

§. 389. Poniamo che nella (6.) Q, ed ω sieno dati e costanti, e cerchiamo quale esser debba l'angolo ω', affinchè la forza P sia un minimo.

Converrà primamente che la resistenza prodotta dall'attrito sia minima, e quindi in generale $P\sigma\omega'$ e $Q\sigma\omega''$ aver debbono segni contrarj, per cui la 5.ª ricordando che $\omega'' = 90° - \omega$ perchè Q si suppone essere un peso, diventa

(8.) $P\theta\omega' = Q\sigma\omega + f(Q\theta\omega - P\sigma\omega')$,

d'onde

(9) $P = \dfrac{Q(\sigma\omega + f\theta\omega)}{\theta\omega' + f\sigma\omega'}$; si dovrà dunque determinare il minimo valore di P considerato come funzione di ω'.

se pongasi $\sigma\omega' + f\sigma\omega' = 0$, viene P infinita; non vi ha dunque luogo alla ricerca del mass. poichè può crescere senza limiti. Alla ricerca del minimo si prenderà la derivata del 2.º membro della (9) rispetto ad ω', ed avremo la

(10) $\sigma\omega' - f\sigma\omega' = 0$, d'onde

$f = \frac{\sigma\omega'}{\sigma\omega'}$, ovvero

(11) $f = \sigma\omega'$. Determinato per mezzo dell'esperienza le f, quest'equazione da ω' che al minimo valore di P corrisponde.

Lezione 82.

§. 390. Per ~~l'altezza~~ vite si è trovato al §. 322. la

(12) $P = \frac{hR}{2\pi L}$; la forza P essendo perpend.e alla manovella e nel piano perpend. all'asse, se figurosi il peso Q concentrato in un punto sulla vite facendo che il maschio o la madrevite è immobile nell'equilibrio sarà trattenuto su di un piano inclinato di cui h è l'altezza e $2\pi L$ la base ~~[illegible]~~, e da una forza p orizzontale applicata al peso abbiasi l'equazione

(13) $p = \frac{Q(\sigma\omega + f)}{1 - f\sigma\omega}$ come si è vid. al §. 388; del piano inclinato, essendo ω l'angolo del piano inclinato. Supposto verticale l'asse della vite la direzione della forza P riuscirà orizzon. tale come quella della p. I momenti di tali forze di-

spetto all' asse sarauno eguali; e però avremo la

(14) $v\rho = \text{I}.\text{F}$, d'onde la

(15) $\rho = \frac{\text{I}}{v}\text{F}$; ma $\sigma\omega = \frac{h}{2\pi v}$; dunque la (13) si muta nella

$$\frac{\text{I}}{v}\text{F} = \text{Q}\,\frac{\frac{h}{2\pi v}+f}{1-f\frac{h}{2\pi v}}\;;\text{ ovvero}$$

(16) $\text{F} = \frac{v}{\text{I}}\,\text{Q}\,\frac{h+2\pi v f}{2\pi v - fh}$. ——

Fatto $f=0$, si ha appunto la (12) come esser debbe. ——

§. 391. Figuriamo una leva mobile intorno ad un' asse di cui r sia il raggio. Le due forze F, Q sieno applicate ai bracci della leva essendo ρ, ε le distanze rispettive delle direzioni delle forze F, Q dall' asse medio, e nell' equilibrio fatta astrazione dall' attrito dee esser la

(17) $\rho\text{F} = \varepsilon\text{Q}$: la risultante R delle F e Q è data dalla

(18) $\text{R} = \sqrt{\text{F}^2 + 2\text{Q}\text{F}\cos\widehat{\text{F}\text{Q}} + \text{Q}^2}$; la quale premendo contro l' asse colà ivi rimane distrutta.

La forza R si scompongà in 2, l' una tangenziale e l'altra normale all' asse e detto ω l' angolo che la tangenziale fa colla R, le due componenti saranno

$$\cos\omega\sqrt{\text{F}^2 + 2\text{F}\text{Q}\cos\widehat{\text{F}\text{Q}} + \text{Q}^2}$$

$$\sin\omega\sqrt{\text{F}^2 + 2\text{F}\text{Q}\cos\widehat{\text{F}\text{Q}} + \text{Q}^2}\;;$$

a vece delle forze P, Q, verificata la (17) si hanno queste due forze, e di conseguenza l'attrito che è presentato da $f\theta w\sqrt{P^2+2PQ\cos P\hat{}Q+Q^2}$, dovrà essere equilibrato dalla forza tangenziale $\theta w\sqrt{P^2+2PQ\cos P\hat{}Q+Q^2}$; dunque esser debbe

$$\theta w\sqrt{P^2+2PQ\cos P\hat{}Q+Q^2} = f\theta w\sqrt{P^2+2PQ\cos P\hat{}Q+Q^2},$$

ossia la

(19) $f\theta w = \theta' w = \sqrt{1-\theta^2 w}$, e però $f^2\theta^2 w = 1-\theta^2 w$, da cui si deduce la

(20) $\theta w = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}$; mettendo dunque nell'espressione dell'attrito a vece di θw il suo valore si avrà che verrà presentato da

$$\frac{f\sqrt{P^2+2PQ\cos P\hat{}Q+Q^2}}{\sqrt{1+f^2}},$$

che agisce col braccio di leva r; avendo dunque rispetto all'attrito a vece della (17) per l'equilibrio porre debbesi la

(21) $pP = qQ + \frac{rf\sqrt{P^2+2PQ\cos P\hat{}Q+Q^2}}{\sqrt{1+f^2}}$;

Se le due forze P e Q sieno parallele, si ha l'angolo $P\hat{}Q = 0$, e quindi la (21) si muta nella

(22) $pP = qQ + \frac{rf(P+Q)}{\sqrt{1+f^2}}$; ordinariamente il coeff.te f è così piccolo che si può trascurare f^2,

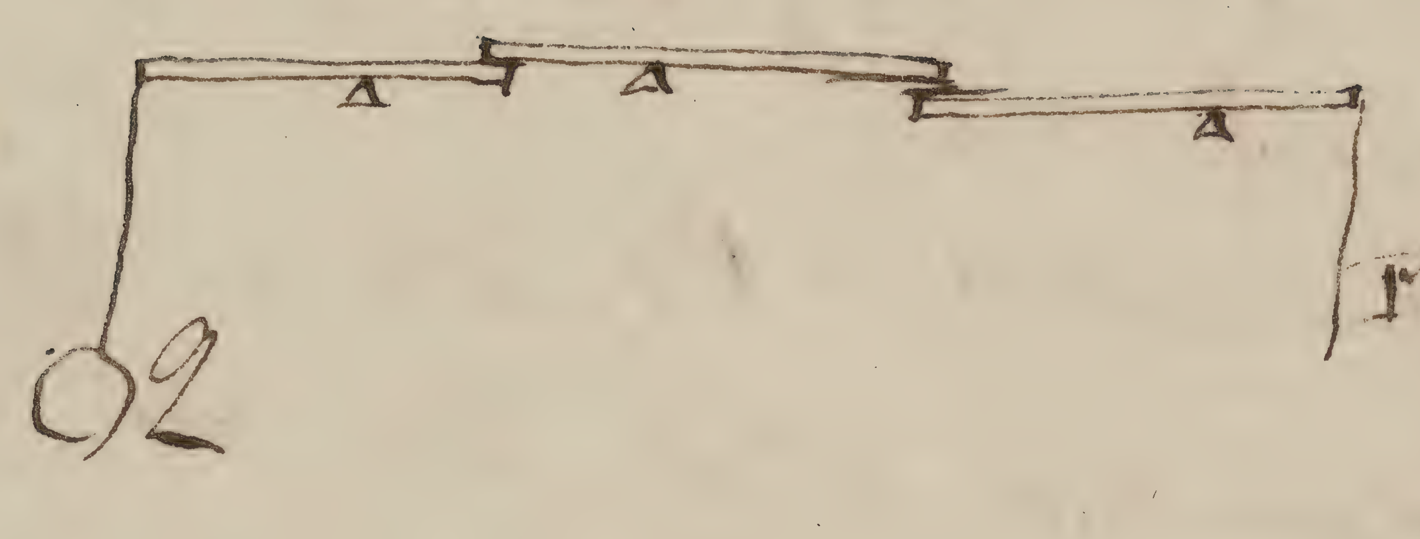
per la qual cosa alla (22) si sostit.

(23.) $pP = qQ + rf(P+Q)$; dalla quale

la

(24) $P = \frac{Q(q+rf)}{p-rf}$

§. 392. Siano tre ovvero; all'estremo di un braccio di una prima leva sia applicata una forza P, l'altro estremo agisce contro il principio di un'altra leva, o l'altro estremo di questa agisce su di un'altra, al cui altro estremo è un peso. —



Siano X, Y le forze che agiscono sui bracci di leva intermedia, e siano p', q' le distanze dall'ipomoclio di queste forze, e siano p'', q'' le distanze delle forze Y, Q dall'ipomoclio della 3a leva, e si possa trascurare f'; per queste tre leve si avranno le infrascritte equazioni simili alla (23)

(25) $Pp = qX + rf(P+X)$; per la 1a leva

(26) $Xp' = q'Y + r'f(X+Y)$,

(27) $Yp'' = q''Q + r''f(Y+Q)$, essendo r, r', r'' i raggi degli assi della 2a e 3a leva.

Dalle (26) e (27) si deducono

le

(28.) $X = \frac{P(p-rf)}{q+fr}$,

(29.) $Y = \frac{Q(q''+r''f)}{p''-r''f}$ che sostituiti nella (26) avremo

$$\frac{p'P(p-vf)}{q+fv} = \frac{v'Q(q''+v''f)}{p''-v''f} + v'f \times$$

$$\left(\frac{P(p-vf)}{q+vf} \mp \frac{Q(q''+v''f)}{p''+v''f}\right)$$ ovvero

$$P(p'-v'f)\cdot(p-vf)(p''-v''f) = Q(q'+v'f)(q+vf)(q''+v''f),$$ d'onde si ha la

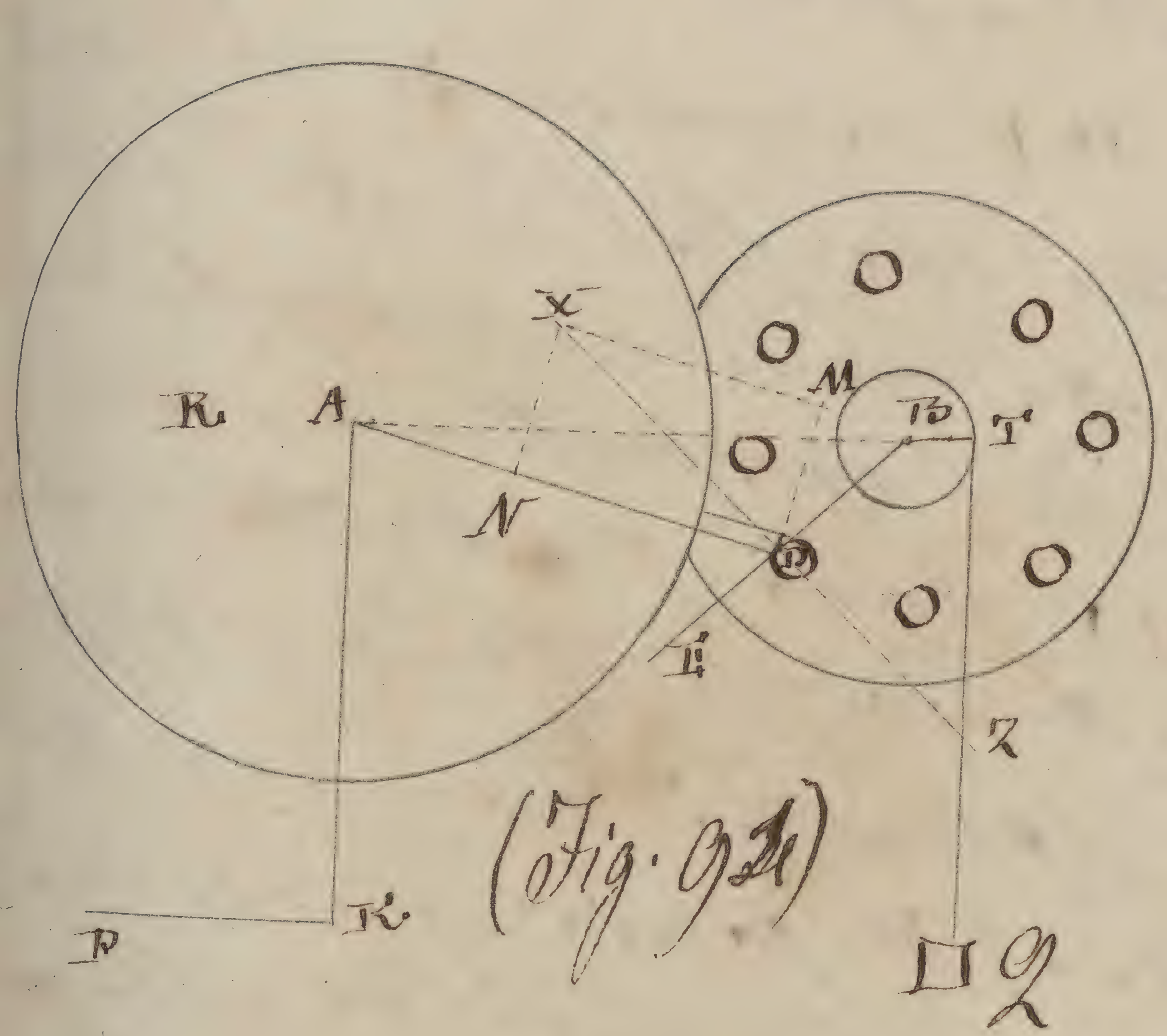
(30). $$P = Q\frac{(q'+v'f)(q+vf)(q''+v''f)}{(p'-v'f)(p-vf)(p''-v''f)};$$ se $p=p'=p''$, $q=q'=q''$, $v=v'=v''$, la (30) si muta nella

(31) $$P = Q\left(\frac{q+vf}{p-vf}\right)^3.$$

In generale, se n sia il n° delle leve nella stessa supposizioni si otterrebbe la

(32) $$P = Q\left(\frac{q+vf}{p-vf}\right)^n.$$

§.393. Si osservi la (fig. 92) Per determinare l'equaz. di equilibrio, avendo rispetto all'attrito che i denti della ruota sopportano dall'ale di rocchetti, provenendo d'altro degli assi, e dalla rigidezza delle corde, sia la potenza P, che in direzione perpendicolare ad AK col braccio KA muova la ruota R di cui un dente urti il dente D del rocchetto che lo faccia ruotare intorno al cilindro B sul quale una corda avvolta sostiene il peso Q. Dai centri A e B della ruota e del rocchetto si protraggano al punto D di contatto le rette AD e BD, e prolungato BD sia l'ango-



(Fig. 92)

lo ADZ = g. Supposto che DZ=X presenti quella forza che appli-care dovrebbesi al punto D per-pendicolarmente a BD affin-chè tenesse in equilibrio il pe-so Q, si avrebbe la

(33) $X . BD = Q . BI$. Se prendasi DX = ed opposta a DZ, DX espri-merà la resistenza che oppone l'ala del rocchetto al movi-mento della ruota. Si scom-ponga la DX nella DM perpen-dicolare ad AD, e nella DN nella sua direzione. Egli è evidente che nell'atto che il dente della ruota muove un poco l'ala del rocchetto, il pun-to di contatto D descrive un archetto di circolo di cui AD è il raggio, e però AD farà per-pend. a quest'archetto, dunque la DN rappresenta la pres-sione che sul dente della ruota viene esercitata dall'ala del rocchetto, e quindi f. DN sarà l'attrito prove-niente da cosiffatta pressione. Affinchè adunque la forza P faccia girare la ruota, le sarà necessario vincere, non solo la forza DM tendente a produr ro-tazione in senso contrario ma dovrà vincere eziandio l'attrito f. DN. Per la qual cosa, nell'equilibrio sussisterà

dette l'equazione

(34) $P.AK = (DM + f.DN)\,AD$; ma si ha $MDX + XDN = XDN + NDE$, dunque $MDX = NDE = y$; il triangolo rett. DMX ci da la proporzione

$DM : DX :: \theta DXM : 1 :: \theta MDX : 1$: ma MD è perpendicolare ad AD, ed XD è perpendicolare a BE, dunque l'angolo $MDX = ABE = y$, e però

$DM : \sout{ABE}\ DX :: \theta y : 1$; e però

$DM = DX\,\theta y = X\,\theta y$; troverebbesi similmente

$DN = DX\,\theta MDX = X\,\theta y$. —

Per questi valori l'equazione (34) si muta nella

(35) $P.AK = AD.X(\theta y + f\theta y)$. —

Dalla (33) avendosi

$X = Q.\frac{BT}{BD}$, la (35) diventa

(36) $P = \frac{Q.AD.BT}{AK.BD}(\theta y + f\theta y)$. —

§. 37. Dal punto nel quale il dente della ruota comincia ad appoggiarsi all'ala del rocchetto fino all'istante in cui il dente abbandona l'ala il punto di contatto va variando e vanno crescendo le distanze AD e BD, e con loro y; laonde P riesce ~~[illegible]~~ variabile. Cerchiamo il massimo valore di P, ossia il suo valore nella posizione più vantaggiosa. Si osservi all'uopo che l'accrescimento di BD è piccolissimo stante la piccolezza dell'ala del rocchetto e la sua distanza

rispetto ad AD prenderemo il va-
lor massimo, cioè il raggio che
va dal punto A al punto ove
il dente della ruota scappa
dall'ala del rocchetto. —
Appresso questa sostitu-
zione, non rimane variabile
che la y. Dunque il valore
di P sarà massimo, se mas-
simo sia $\theta y + f\theta y$; e perciò
dovrà dunque essere
$-\theta' y + f\theta' y = 0$; ossia
$\theta y = f(1-\theta^2 y)^{\frac{1}{2}}$; per cui si ha

(37) $\theta y = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$,

(38) $\theta y = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}$, e quindi avremo

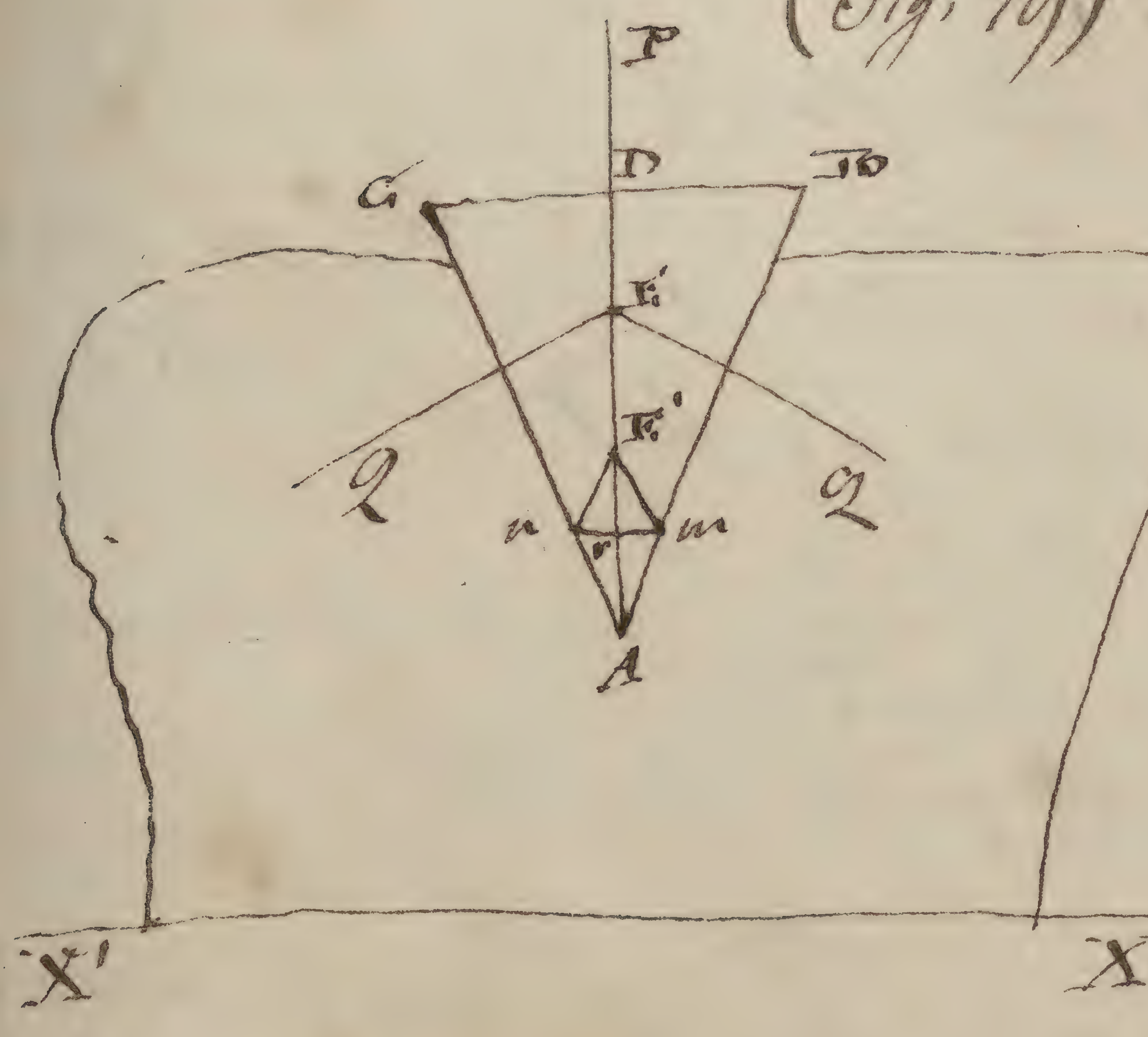
(39) $\theta y + f\theta y = \frac{1+f^2}{\sqrt{1+f^2}} = \sqrt{1+f^2}$;
questo valore sostituito alla
(36) ci da la

(40) $P = \frac{2 . AD . BT}{AK . BD}\sqrt{1+f^2}$, prenden-
do i raggi BD, AD come si è
testè detto.

§. 395. Veniamo per ultimo all'
equazione d'equilibrio del
cuneo avendo riguardo all'
attrito. Sia il suo profilo
un triangolo isoscele, la
sua testa orizzontale, e
P, un peso e si avrà $Q = Q'$
come si è ved. al §. 325 e
però la

(41) $Q = P\frac{BA}{BG}$ (79.ª fig.)
Ogni piccolo aumento del pe-

(Fig. 79)



P romperebbe l'equilibrio se non vi fosse l'attrito; considerato questo supponiamo che aggiunto un peso P', sia prossimo a rompersi l'equilibrio. Essendo le due resistenze perpendi: ai lati del cuneo ciascun attrito verrà rapp.^{to} da AN, Am, si avrà ciascun att.^{to} $f(P+P')\frac{BA}{BC}$, figuriamo che nella figura siano present.^{ti} gli attriti da An, Am, e compiuto il rombo sarà E'A divisa per metà in r da mn, cioè $Ar = rE'$; ma i due △^{i} rettangoli Amr, ADB simili

$$Ar : Am :: AD : AB$$

$$\tfrac{1}{2} AE' : f(P+P')\frac{BA}{CB} :: AD : AB,$$

d'onde la

(62) $AE' = 2f(P+P')\frac{AD}{CB}$ che eguagliar deve il peso P', dunque avremo

(63) $P' = 2f(P+P')\frac{AD}{CB}$; e quindi la

(64) $P' = \frac{2fP.AD}{CB-2f.AD}$.

Dell'asse nella ruota tratteremo avanti dopo di aver tenuto discorso della rigidità delle funi.

Lezione 83.

la 84. Ripetiz.^e

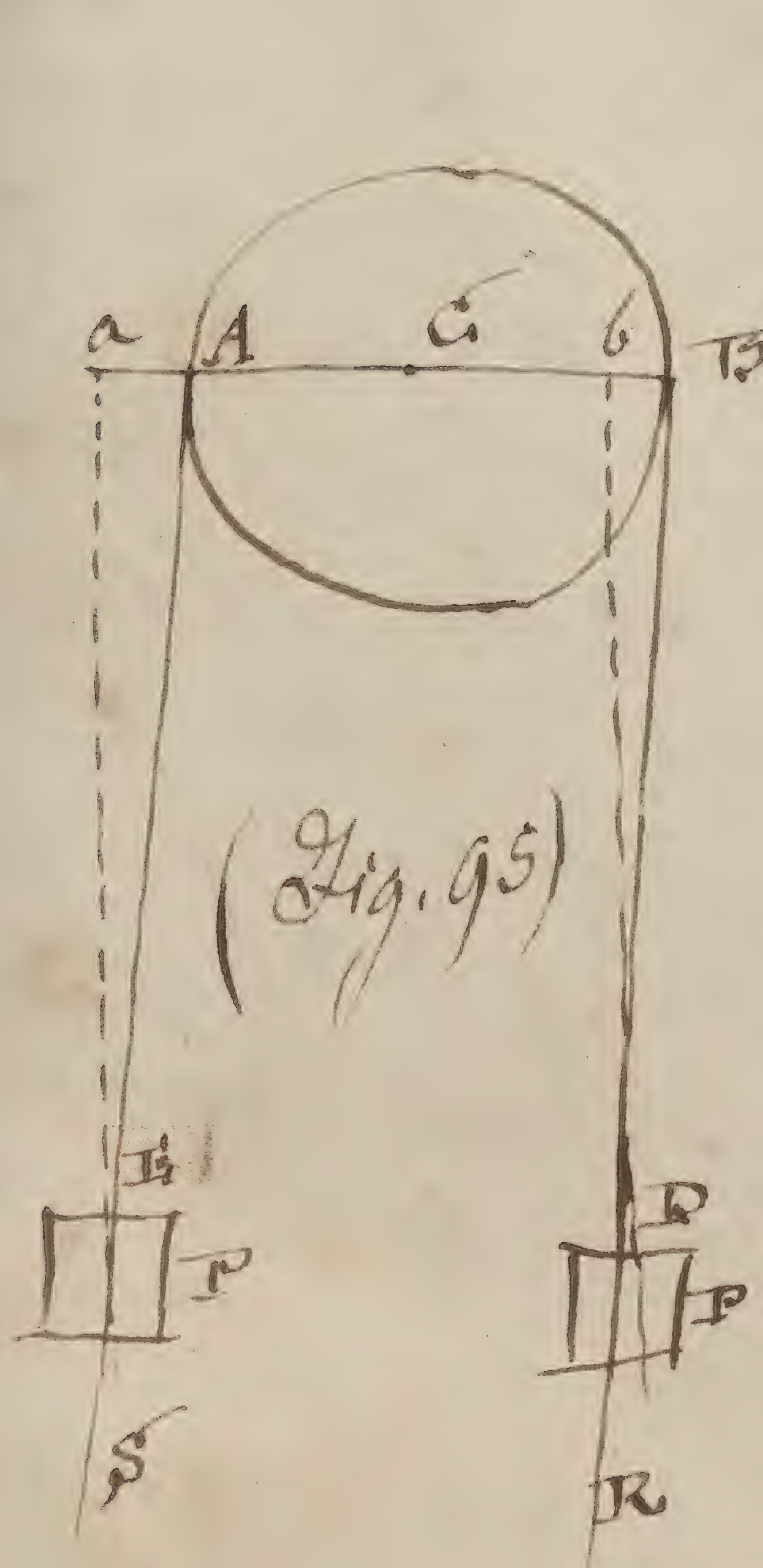
Capitolo XXXI

Della rigidità delle funi

N.396. Finora abbiamo supposto delle funi sieno perfettamente flessibili, la qual cosa non è massime quando si è obbligati a servirsi di funi di qualche grossezza. La rigidità delle funi disturba adunque l'effetto delle macchine. Si è provato dall'esperienza che le rigidità delle funi è proporzionale al loro diametro, alla loro tensione, cioè al peso di cui sono gravate, e quanto è più piccolo il raggio del cilindro o girella su cui si ravvolgono. —

Dipende inoltre la rigidità delle funi dalla loro qualità, fabbrica, e preparazione. Per farsi un'idea della resistenza delle funi, figuriamo una forza che attragga un peso mediante una fune che attraversi una girella. Se la fune non è perfettam.^e pieghevole, essa rimane alquanto discosta dalla scanalatura della girella o dalla superficie del cilindro, e però aumenta il momento del peso. —

Sia (fig. 95) AB il diametro



(Fig. 95)

della girella avente il suo asse in G, e sieno P, P' due pesi attaccati alle estremità della corda E A B D. Fatta astrazione dalla rigidità delle corde dev'essere $P = P'$, dunque, se v'ha equilibrio senza una così fatta eguaglianza ciò devesi alla rigidità delle corde. —

Ecco come ciò si produce. Sia P' il peso che discendendo fa alzare il peso P. Ciò posto la porzione di corda AE dovrà piegando addossarsi alla scanalatura della girella: ma la rigidità della corda si oppone a sì fatto piegamento, e produce un allontanamento del peso P dalla verticale condotta da A, trasportando il centro di gravità di P sopra una verticale che passa per a, essendo caGa.

Al contrario ha luogo dalla parte di B ove il centro di gravità del corpo si mette sopra una verticale bR che porta il peso più in dentro essendo b più indentro di B. A maggior esattezza supporremo poi che i punti A, B sieno i due punti ove il diametro della girella incontra l'asse delle corde. In tal caso il momento di P' rispetto a G sarà $P' . Gb = P . aG$. — Il momento di P relativo a G sarà $P(GA + Aa) = P'(GB - bB)$ dunque per l'equilibrio si avrà

$$(1) \quad P'(GB - bB) = P(GB + Aa)$$

Poniamo $bB = a$, $Aa = a'$, e $GB = v$, e la (1.a) diventerà

(2.) $P'(v-a) = P(v+a')$; si aggiunga $-P(v-a)$ e si avrà
$(P'-P)(v-a) = P(v+a'-v+a) = P(a+a')$ e quindi

(3) $P'-P = P\left(\frac{a+a'}{v-a}\right)$; il peso P' deve dunque superare P della quantità $P\left(\frac{a+a'}{v-a}\right)$.

§. 397. Le a ed a' si debbono determinare per mezzo dell'esperienza, la quale mette davanti, che la resistenza che oppone la rigidità della corda dallo svolgersi dalla girella in B, è sifattamente piccola che senza errore sensibile si può trascurare cioè porre $a = 0$, e però la (3) si riduce alla

(4) $P'-P = \frac{a'}{v}P$, espressione della resistenza dovuta alla rigidità della corda e che è di sufficiente esattezza nella pratica.

---

§. 398. Le corde oppongono eziandio una resistenza mediante l'attrito prodotta dal loro scorrimento sulla scanalatura di una girella o su di un cilindro.

Per aver riguardo a sifatta resistenza sia un cilindro immobile orizzontale, al quale con varj giri si ravvolga una fune alla estremi-

tà della quale vi sia una potenza P che sostiene un peso. Lo sforzo della potenza ora sarà diminuito dall'attrito eccitato dal cilindro sulla corda. Il peso P per discendere dovrà vincere oltre la forza P quest'attrito. —

Sia S la lunghezza della fune ravvolta al cilindro contata dal primo punto ove la fune tocca il cilindro dalla parte P fino al punto ove la fune è ravvolta, sia t la tensione della corda in quest'ultimo punto, e sia p la somma delle pressioni elementari che si esercitano sugli archi ds. e sia r il raggio del cilindro.

Il peso P dovendo vincere la forza P e l'attrito è chiaro che la tensione t all'estremo di S far deve equilibrio all'attrito prodotto sulla lunghezza dell'arco S, e alla potenza P. Detto f il coeff.º d'att. per l'equilibrio si avrà la

(6.) $t = fp + P$

La forza t che agisce nella direzione dell'elemento ds che si confonde colla tangente, produce su quest'archetto una pressione secondo una retta a lui normale e che viene rappresentata dal seno dell'angolo di contatto nel suo valore di t, al qual seno si può sostituire

l'angolo e si può porsenti. o per $\frac{ds}{r}$. La pressione sull'elemento ds, sarà dunque $\frac{t\,ds}{r}$ che è il differenziale dell'intera pressione esercitata sopra la ... e s finito, e però avremo la

(6) $dp = \frac{t\,ds}{r}$; prendendo il differenziale della (5) rispetto a t e p, avremo

$dt = f\,dp$, e così

$dt = f\frac{t\,ds}{r}$, e quindi la

(7) $\frac{dt}{t} = \frac{f}{r}\,ds$ ed integrando

(8) $\log t = \frac{f}{r}s + C$; a determinare la C si ha la condizione che l'arco $s=0$ quando $t=P$, quindi dalla (8) si avrà

$\log P = C$, e però l'integrale determinato sarà

(9) $\log t - \log P = \frac{f}{r}s$, ovvero

(10) $\log\frac{t}{P} = \frac{f}{r}s$. Passando ai numeri si avrà

(11) $\frac{t}{P} = e^{\frac{f}{r}s}$; d'onde la

(12) $t = Pe^{\frac{f}{r}s}$.

Sia λ la lunghezza della corda avvolta, ed osservando che all'estremo di λ si ha $t=P'$, dalla (12) si deriva $P' = Pe^{\frac{f}{r}\lambda}$, e quindi si ha la

(13) $P = \frac{P'}{e^{\frac{f\lambda}{r}}}$.

La (12) ci mette davanti

che crescendo s in proporzione aritmetica cresce T in progress. geometrica. —

Dalla (13) si trae

$T' : T :: e^{\frac{f\lambda}{r}} : 1$; dal che apparisce che la ragione di $T' : T$ va crescendo al crescere di λ e al diminuire di r; dimodocchè aumentando i ravvolgimenti della corda sul cilindro si può avere T' piccolissima rispetto a T. —

§. 399. Dietro le esperienze su la rigidità delle corde eseguite da Amontons, Desaguliers e Coulomb, una corda tesa oppone al suo piegamento una resistenza costante proveniente dalla sua orditura, al tutto indipendente dalla tensione, e non può attribuirsi che ai differenti gradi di tensione e di torsione che le corde sopportano nella loro fabbricazione.

Avvegnacchè ogni filo di cordone componente la corda, è teso da una certa forza e conserva la sua tensione anche quando la corda è formata, per essere così fatti fili obbligati coll' attrito. Così in una corda che sostiene un peso non solo ciascun filo di lei è teso dalla pressione che sostiene,

(a) una corda sono proporzionali alle tensioni;

ma ancora dalla tensione che conserva dalla sua formazione. Laonde le forze che servono a piegare(a) una conseguita, che saranno proporzionali ad una quantità costante, ed al peso da cui è attualmente caricata la corda. La prefata quantità costante variar deesi secondo il diverso grado di tensione e di torsione a cui è andata soggetta la corda nella sua fabbricazione.

Esatte esperienze hanno dimostrato che nelle corde nuove che si compongono di tre cordoni cotesta quantità costante è essai esattamente proporzionale al quadrato dei raggi delle corde.

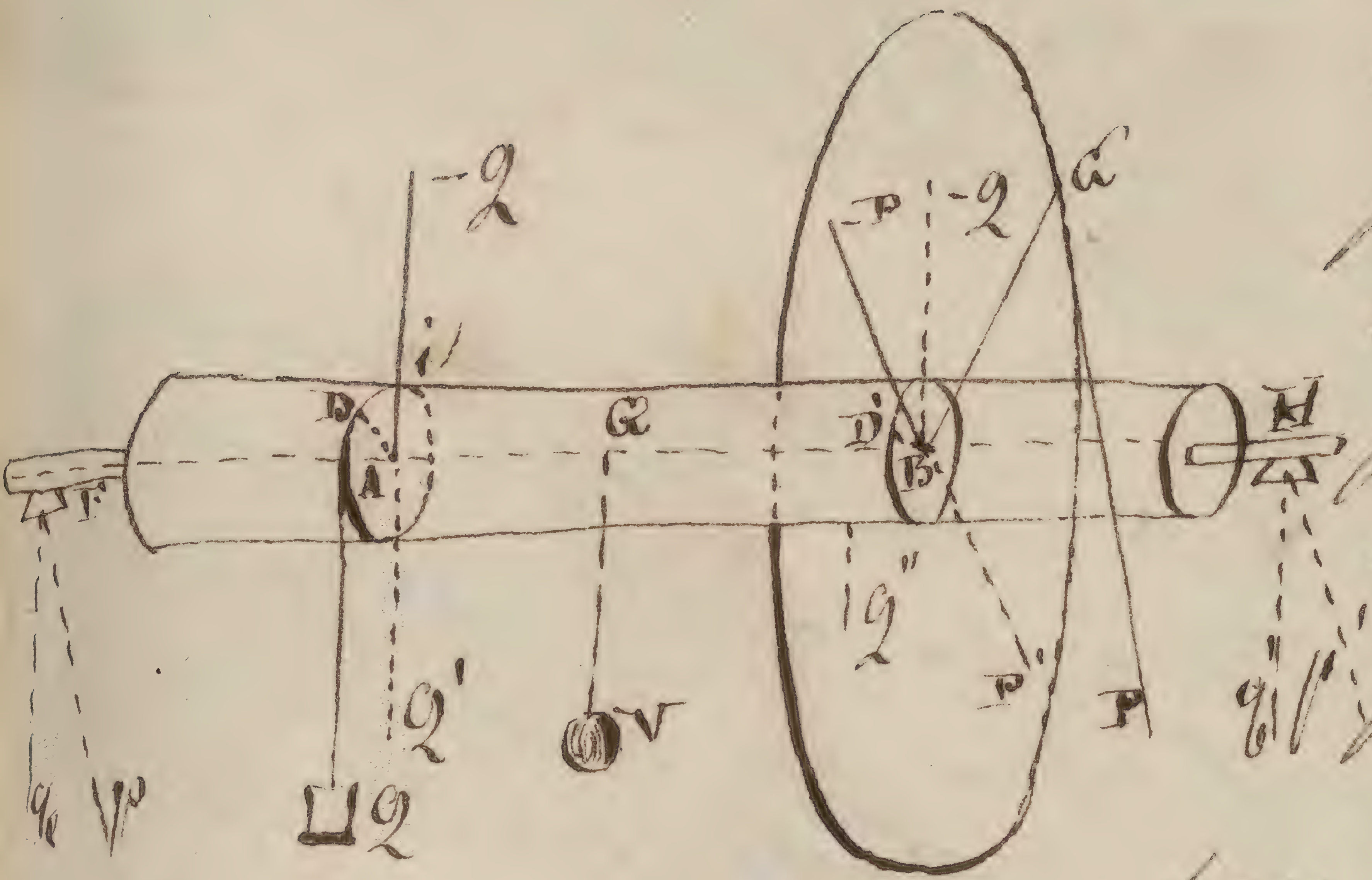
Nelle corde molto usate i fili si distendono, e la tensione costante diminuisce in ragion reciproca del diametro del cilindro a cui è ravvolta la corda. Secondo Coulomb, la funzione la quale con sufficiente esattezza rappresenta la forza necessaria a piegare le corde è

$\frac{d_1^m}{r}(a+bP)$ ove d_1 è il

diametro della corda, r il diametro del cilindro; P il peso sostenuto dalla corda m^{ma} a, b due costanti che l'esperienza determina, la quale stabilisce $m = 1,7$ per le corde nuove; $m = 1,4$ per le corde usate. —

§. 400. Come si è detto davanti veniamo a considerare l'equilibrio dell'asse nella ruota avendo riguardo all'attrito e rigidità delle funi.

(Fig. 73)



Al maggiore semplicità supporremo che la potenza e resistenza abbiano direzioni parallelle. Sia $DA = r$, $CB = R$, e al §. 326, si è veduto che per l'equilibrio debbe aver luogo la

(h) $P.R = Q r$.

L'attrito che si esercita sui perni come si è ved. al §. 327 viene rapp. da $f(P+Q)$ perchè le forze sono parallelle. Sia r_1 il raggio comune dei due perni, e il momento della pressione rispetto all'asse del cilindro sarà $r_1 f(P+Q)$ che si oppone alla forza P. La resistenza che presenta la rigidità della corda ad essere piegata viene presentata al §. 399 da $\frac{r^m}{r}(a+bQ)$ il cui momento relativo all'asse suddetto sarà

$\frac{r.r^m}{r}(a+bQ) = r^m(a+bQ)$ che si oppone alla P.

Laonde avendo riguardo all' attrito, e rigidità delle corde l'equazione d'equilibrio dell'asse nella ruota sarà

(15.) $P.R = Q r + O_n f(P+Q) + V_i^m (a+bQ)$

§. 201. Se si combinino più assi nella ruota, chiamando X la forza che fa il 1.° contro il 2.°, Y la forza che fa il 2.° contro il 3.° e così via via, si formeranno delle equazioni simili alla (15), mediante le quali eliminando X, Y, ec. la risultante conterrà la potenza applicata al 1.° asse nella ruota e la resistenza applicata al cilindro dell'ultimo asse nella ruota.

§. 202. Si è supposto che il cilindro dell'asse nella ruota sia mosso da una ruota, e che la potenza sia applicata ad un punto solo della ruota stessa. Se poi alla ruota si sostituisca una manovella che traversi il cilindro, ed alle estremità di lei, ad eguale distanza R dall'asse del cilindro siano applicate due potenze eguali, l'azione loro non produrrà pressione sui perni, e di conseg.ª non produrran-

no attrito di forza e non si terrà conto che dell'attrito dovuto al peso Q, e la (15) si muterà nella

(16) $P.R = Q(r + r_1 f) + r_1^m(a + bQ)$

§. 403. L'equazione (15) trovata per l'asse nelle ruote si traspor-ta alla girelle ponendo $R = r$.

Venendo alle taglie sup-porremo: che le porzioni di corda fra una girella e l'altra siano parallele.

2°. Che i raggi delle girelle siano eguali come quelli dei due assi.

3°. Che il coeff.e d'attrito sia talmente piccolo che si possa porre $f^2 = 0$.

4°. Che la rigidità della corda sia presso a poco proporzionale alla tensione.

Sia un estremo della corda attaccato all'armatura fissa e sia t la tensione del tratto di fune fra l'appicagnolo e la 1.a girella: t' la tensione della porzione di corda che dalla 1.a va alla 2.a girella. t'' la porzione di corda che dalla 2.a va alla terza, e $t^{(k)}$ la tensione del tratto di fune al quale è applicato la potenza.

Sia R il raggio comune delle girelle, ed r_1 degli assi ed avendo riguardo all'attrito e rigidità delle corde, si avrà le

(17) $t'\delta = t\delta + (t'+t)\, f v_1 + v_1''' \delta t$

d'onde la

(18) $$t' = \frac{(\delta + f v_1 + v_1''' \delta)\, t}{\delta - f v_1} = A t$$

Della stessa guisa si troverebbe la

(19) $$t'' = \frac{(\delta + f v_1 + v_1''' \delta)\, t'}{\delta - f v_1} = A t' = A^2 t$$

(20) $t''' = A^3 t$

(21) $t^{iv} = A^4 t$

---

(22) $t^{(k-1)} = A^{(k-1)} t$.

Il peso Q eguaglia la somma di queste tensioni, e però si ha la

(23) $$t(1+A+A^2+A^3+ \dots + A^{k-1}) = t\,\frac{A^k-1}{A-1}.$$

~~[struck out]~~. L'ultima tensione eguaglia il peso, dunque avremo la

(24) $Q = t\left(\frac{A^k-1}{A-1}\right)$.

(25) $P = A^k t$

D'onde $P : Q :: A^k : \frac{A^k-1}{A-1}$, e quindi

(26) $$P = \frac{A^k(A-1)}{(A^k-1)}\,Q.$$

Se l'attrito e la rigidità delle corde si annullasse, dalla (18) si avrà $A = 1$, e dalla (26) per questo valore $P = \frac{0}{0}$. Per determinare il valore di questa frazione si prenda la derivata del numeratore e denominatore della frazione $\frac{A^k(A-1)}{A^k-1}$ rispetto ad A, e si avrà

$\frac{K \cdot A^{K-1}(A-1)+A^K}{K A^{K-1}}$, facendo $A=1$, il 1° fattore è zero, e si ha $\frac{1}{K}$; per cui la (26) riducesi alla

(27) $P = \frac{1}{K} Q$; e poi avremo la

(28) $Q = PK$ come esser detto pel veduto al §. 346. Si osservi che non essendovi attrito ed rigidità delle corde, le funi debbono essere egualmente tese, ma ciò non può essere introducendo le resistenze d'attrito e la rigidità

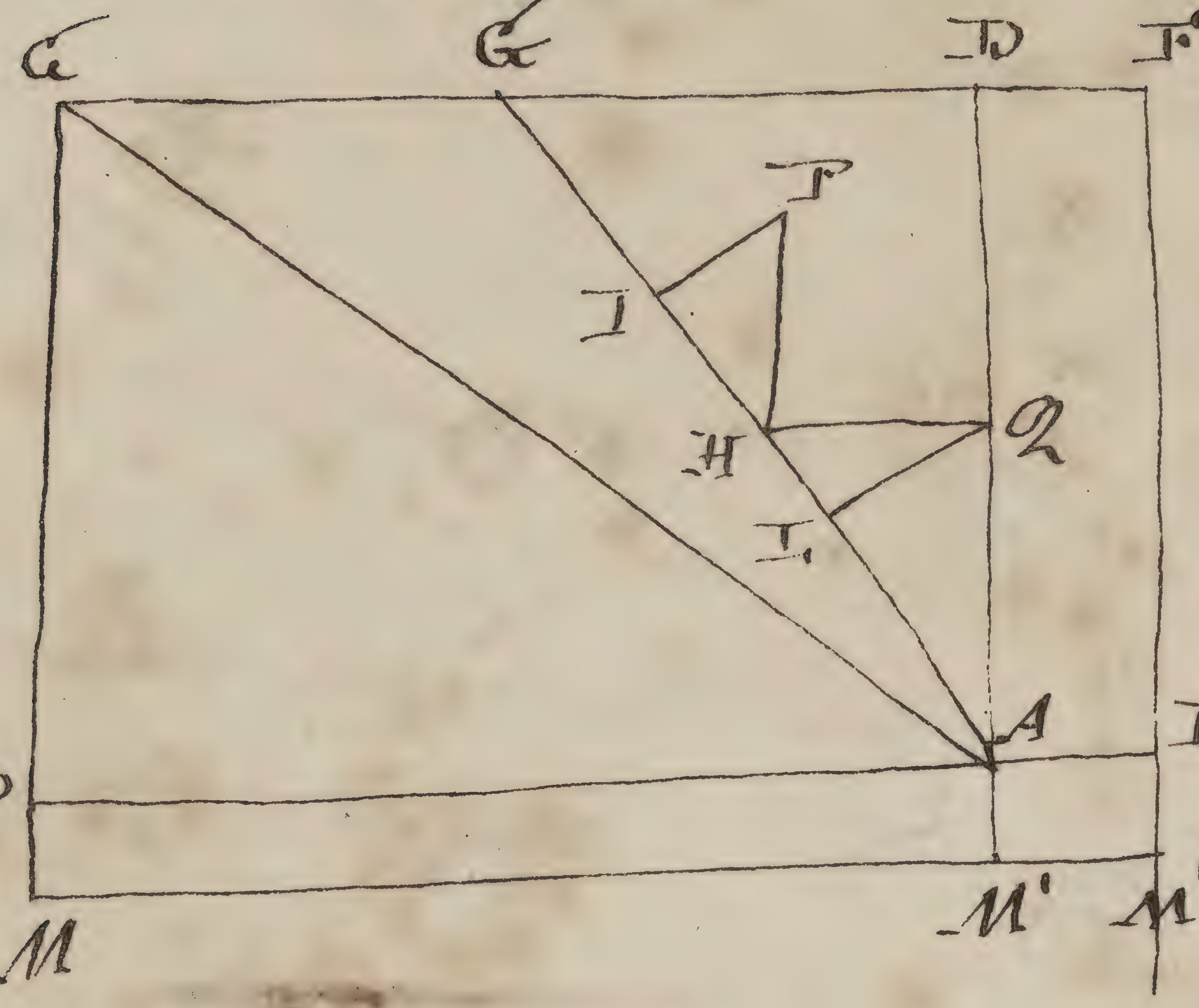
Lezione 85.

Capitolo XXXII°.

Della Spinta dei Terrapieni

§. 404. Si osservi la (Fig. 96)

(Fig. 96.)



Sia ADFE, un muro di rivestimento dietro il quale sta un terrapieno BGDA; e poniamo che tolto via il muro si distaccasse un prisma triangolare di terra di cui il profilo fosse il triangolo rettangolo ADG, di cui l'ipotenusa AG sia su di un piano inclinato sul quale il triangolo tende a scorrere pel proprio peso. Le forze che ne impediscono il movimento sono, l'attrito, la coesione e la resistenza del muro; la quale si può considerare come una forza Q applicata al muro stesso e di cui la direzione sia perpend.e ad AD. Sia P il peso del triangolo che sarà verticale applicata al centro di gravità del triangolo, che presenteremo per PH che incontra in H l'ipotenusa del triangolo. Da H si conduca la HQ perpend.e a DA, e poniamo che PH ed HQ rappresentino rispett.vo le forze P e Q.

La forza P si scomponga in due, l'una PI perpend.e a GA, ed IH nella direzione di GA. Lo stesso si faccia della forza Q, e ne siano QL ed HL le componenti. La HL è diretta da A verso G; la forza presentata da HI è diretta da G verso A. La forza dunque HL unitamente alla coesione ed all'attrito oppongono una resistenza alla discesa del Δ.o ADG lungo la GA e la HI spinge il triangolo a discendere. Le due forze PI, QL restano elise dalla resistenza del piano AG. L'equazione d'equilibrio sarà

(1) $HI = HL + \text{Coes.} + \text{Att.}$

Sia $DG = x$, $AD = b$, e si avrà $GA = \sqrt{b^2+x^2}$; i triangoli ADG, PHI sono simili, dunq.

$AG : DG :: PH : HI$ ~~HI~~
$AG : AD :: PH : HI$, ossia
$\sqrt{b^2+x^2} : x :: P : PI$
$\sqrt{b^2+x^2} : b :: P : HI$ onde la

(2) $PI = \dfrac{P.x}{\sqrt{b^2+x^2}}$

(3) $HI = \dfrac{P.b}{\sqrt{b^2+x^2}}$. Sono pure simili i due Δ.i AGD, QLH, e però

$AG : AD :: HQ : QL$
$AG : GD :: HQ : HL$ ovvero
$\sqrt{b^2+x^2} : b :: Q : QL$.
$\sqrt{b^2+x^2} : x :: Q : HL$, e però

(4.) $QI = \frac{Q \cdot b}{\sqrt{b^2+x^2}}$,

(5.) $HI = \frac{Q \cdot x}{\sqrt{b^2+x^2}}$.

Sia δ la densità della terra e supposto omogeneo il triangolo ADG si avrà

(6.) $P = \frac{\delta b x}{2}$. Sia γ ~~[illegible]~~ la coesione per un'unità di superficie: la coesione sopra AG sarà $\gamma\sqrt{b^2+x^2}$; la somma delle pressioni contro GA è presentata da

(7.) $PI + QI = \frac{Px + Qb}{\sqrt{b^2+x^2}}$.

Sia f il coeff.e d'attrito; sarà l'attrito lungo GA $f\left(\frac{Px+Qb}{\sqrt{b^2+x^2}}\right)$; pei trovati valori adunque la (1) si muta nella

(8.) $\frac{Pb}{\sqrt{b^2+x^2}} = \frac{Q \cdot x}{\sqrt{b^2+x^2}} + \gamma\sqrt{b^2+x^2} + f\left(\frac{Px+Qb}{\sqrt{b^2+x^2}}\right)$; onde avremo la

(9.) $Pb = Qx + \gamma(b^2+x^2) + f(Px+Qb)$

ma $P = \frac{\delta b x}{2}$, per la (6.) e però $Pb = \frac{\delta b^2 x}{2}$, dunque

(10) $\frac{\delta b^2 x}{2} = Qx + \gamma(b^2+x^2) + f\left(\frac{\delta b x^2}{2} + Qb\right)$,

ovvero

(11) $\delta b^2 x = 2Qx + 2\gamma(b^2+x^2) + f(\delta b x^2 + 2Qb)$,

e quindi

(12) $Q = \frac{\delta b^2 x - f\delta b x^2 - 2\gamma(b^2+x^2)}{2(x+fb)} = \frac{\frac{\delta b x}{2}(b-fx) - \gamma(b^2+x^2)}{x+fb}$.

§. 105. Nel determinare la retta come GA della più probabile rottura è chiaro che converrà determinare GD = x dipendentemente dal valor massimo di Q considerato come funzione di x, laonde per la teorica de' massimi e de' minimi converrà porre la

(13) $Q' = \delta h^2(x+fh) - 2f\delta hx(x+hf) - 4yx(x+fh) - \delta h^2 x + f\delta hx^2 + 2y(h^2+x^2) = 0$, ossia

$\delta h^2 x + \delta f h^3 - 2f\delta hx^2 - 2f^2\delta h^2 x - \delta h^2 x + f\delta hx^2$ $4yx^2 - 4yfhx - \delta h^2 x + f\delta hx^2 + 2yh^2 + 2yx^2 = 0$, ovvero

$(f\delta h + 2y)(x^2 + 2fhx - h^2) = 0$,

onde

(14) $x^2 + 2fhx - h^2 = 0$, che sciolta rispetto alla x, dà

(15) $x = -hf \pm h\sqrt{f^2+1}$; per aver x positivo, si deve prendere il segno superiore, e di conseguenza

(16) $x = -hf + h\sqrt{f^2+1}$ e però

(17) $x^2 = h^2f^2 - 2h^2f\sqrt{f^2+1} + h^2(f^2+1)$, che sostituiti questi valori di x e di x^2 nella (12) si ottiene

(18) $$Q = \frac{-\delta h^2(f-\sqrt{f^2+1})(1+f-f\sqrt{f^2+1})}{2\sqrt{f^2+1}} - \frac{y(h^2+h^2f^2-2h^2f\sqrt{f^2+1}+h^2(f^2+1))}{2\sqrt{f^2+1}}$$

$$= \frac{-\delta h^2(f-\sqrt{f^2+1})(1+f-f\sqrt{f^2+1})}{2\sqrt{f^2+1}} -$$

$-2\gamma b^2(f-\sqrt{f^2+1})$; poniamo

(19) $\dfrac{-\delta b^2(f-\sqrt{f^2+1})(1+f-f\sqrt{f^2+1})}{2\sqrt{f^2+1}} = a$;

(20) $2\gamma(f-\sqrt{f^2+1}) = b$, e si avrà

(21) $Q = ab^2 - byh$. (a) Si osservi che

= §. 206 (a) pel valore di x dato dalla (16) non entra per nulla il coefficiente di γ che è la coesione, e di conseguenza le dimensioni del triangolo che produce la pressione non dipendono dalla coesione ma solo dall'attrito. Se l'attrito fosse nullo si avrebbe $f=0$, e la (16) si cambierebbe nella

(22) $x = h$, il che mostra che quando non vi è attrito il triangolo che esercita la maggior pressione è isoscele e di conseguenza l'angolo $DGA = DAG = 45°$.

§. 207. Posto $DAG = \omega$, si ha

(23) $\tan\omega = \dfrac{DG}{DA} = \dfrac{-hf + h\sqrt{f^2+1}}{h} = -f + \sqrt{f^2+1}$.

§. 208. L'espressione della forza $Q = ab^2 - byh$ è quella forza orizzontale idonea a resistere al t.° che esercita sull'altezza h la massima pressione. Cerchiamo ora la forza orizzontale capace di resistere ad un'altezza qualunque. —

Poniamo DA = h variabile; AM' = dh = DM' − DA = $h_1 - h$ posto DM' = h_1. Prendendo il differenziale della (21) considerata Q come funzione di h, si avrà la

(24) $dQ = 2ah\,dh - by\,dh$, che sarà una pressione elementare che potrà supporsi esercitata in A, e di conseguenza il suo momento rispetto ad M' sarà $(h_1 - h)(2ah\,dh - by\,dh) = 2ah_1h\,dh - byh_1\,dh - 2ah^2dh + byh\,dh$; essendo DM' l'altezza totale che si suppone data si dovrà integrare la (24) considerando h_1 costante, e si avrà

$a\left(h_1h^2 - \frac{2}{3}h^3\right) + b\left(\frac{yh^2}{2} - yh_1h\right)$ che è il momento totale su tutta l'altezza h, relativa ad M'. Fatto $h = h_1$ si ha la somma dei momenti sopra h_1 che è

$a\left(h_1^3 - \frac{2}{3}h_1^3\right) + b\left(\frac{yh_1^2}{2} - yh_1^2\right)$ alla quale dovrà resistere il muro. Dovendo l'integrale cominciare da $h = 0$, fino ad $h = h_1$, ne conseguita che la costante sarà zero.

§. 109. Accade spesso che i muri di rincalzamento oltre i terrapieni resistere debbano alla pressione di materie che pogino ad essi sovrapposte.

Le formole si dedurranno dalle trovate ponendo F+Q a vece di F e essendo Q il sopraccarico.

§. 616. Si è supposto che il muro di rincalzamento presenti al terreno una faccia verticale. Facilmente si vedrà però come si farebbe se tale non fosse.

Sezione Seconda

Della Dinamica

Capitolo XXXIII

De' preliminari della Dinamica

§. 411. La Dinamica è la parte della Meccanica che insegna a risolvere le questioni relative ai movimenti dei sistemi di corpi considerando i movimenti particolari come prodotti sì dalle azioni movim. di d'altri corpi sopra di lui, che dalle azioni di potenze di altri corpi da cui è sollecitato.

Due questioni una reciproca dell'altra possono venire proposte:

1° Data la forma di un sistema di corpi, determinare quali forze applicare vi si debbono ad ottenere un dato effetto.

2° Date le forze da applicarsi ai corpi, determinare la forma del sistema e la durata dell'azione delle forze affinchè ne derivi un dato effetto.

La teorica delle Macchine in moto è un corollario di queste due questioni.

Ciò è analogo al detto al §. 225. rispetto alle macchine in equilibrio.

Ci sono di casi in cui i sistemi di corpi vanno soggetti a cambiamenti di forma dipendenti dalle forze che li sollecitano, le quali forze dipendono dalla posizione dei corpi. Se le leggi alle quali vanno sogette le forze sono conosciute, la Dinamica fornisce i mezzi di determinare lo stato del sist. anteriore o poster. ad uno stato di questo. La teorica dell'Astronomia fisica deriva dai principj sui quali si appoggia una siffatta determinazione.

§. 212. La Dinamica è una scienza nuova. Sono circa 2 secoli che Galileo ne ha scoperte le prime verità che a lui servono di fondamento. Si è vedo al §. 8. che la Statica procede alle sue ricerche con tutto il rigor geometrico: ma non è così nella Dinamica nella quale è necessario non solo computare l'intensione delle forze come nella Statica, ma eziandio della velocità da loro prodotte. Quindi conviene tener conto della durata della azione e di altre cause fisiche

che dipendono dalla costruzione de' corpi. Quindi la Dinamica oppone difficoltà maggiori che non è la Statica.

§. 413. Nella Statica non è necessario conoscere la velocità che le forze tentano di imprimere ai corpi ma basta conoscere la relazione della —

Egli è poi evidente, che la velocità impressa ad un mobile da una forza, è funzione della forza. Si è supposto e l'esperienza lo ha confermato che le forze sieno proporzionali alle velocità che producono in un istante e che si dimostrerà.

L'unità di forza è quella che produce nella unità di tempo una velocità misurata dall'unità di lunghezza. Sull'ipotesi che la velocità sia proporzionale alla forza che la produce e sull'inerzia della materia è fondata la Dinamica.

Lezione 86.

§. 414. La velocità che si considera è la velocità prodotta dalla forza in un istante di sua applicazione. Se la forza sia istantanea, la velocità sarà sempre la stessa; per conseguenza la velocità prodotta dalla forza sarà

quella del mobile in qualunque istante. Se la forza sia continua, ma però costante, essa in ciascun istante produrrà la stessa velocità, e la velocità del mobile in un tempo qualunque sarà la somma delle velocità accumulate in un tempo t.
Sia Q una forza continua costante e sia v la velocità che comunica in un'istante; sarà vt la velocità comunicata al mobile in tempo t; sia un'altra forza espressa da mQ, la velocità dopo il tempo t, sarà mvt, ma le forze sono come le velocità come si dimostrerà dunque sarà

$Q : mQ :: v : mv$, e però

$Q : mQ :: vt : mvt$.

Cioè quando le forze continue sono costanti esse sono come le velocità accumulate in un tempo t, vale a dire come le velocità dopo questo tempo. Se le forze sieno incommensurabili, supponiamo che la 2.a forza sia mQ+d; dalla proporz.e sopra comp.

si ha

$Q+mQ : Q :: v+mv : v$, e però

$\frac{Q}{v} = \frac{Q+mQ}{v+mv}$; ma detta v'

la velocità prodotta dalla forza δ e stando le velocità come le forze si avrà

$\frac{Q}{v} = \frac{\delta}{v'}$, onde

$\delta : Q+mQ :: v' : v+mv$, ossia componendo

$Q+mQ+\delta : \delta :: v'+v+mv : v'$, ossia

$Q+mQ+\delta : Q :: v+mv+v' : v$. e

$Q : v :: Q+mQ+\delta : v+mv+v'$: moltiplicando i termini di quest' ultima ragione per t ed alternando si avrà

$Q : (Q+mQ+\delta)t :: v : (v+mv+v')t$

Il che mostra che anche nel caso che le forze siano incommensurabili le forze stanno fra di loro come le velocità. Se le forze continue siano variabili, allora si verifica bensì che le velocità comunicate al mobile in un istante stanno come le forze, ma allora non stanno come le velocità accumulate in un tempo t.

Andiamo ora a dimostrare che le velocità stanno come le forze.

Una osservazione continua ci persuade che i fenomeni

del moto si conservano li stessi sì a bordo di una nave che su la superf.a della terra; di guisa che si può mettere come principio provato dalla esperienza, che il moto relativo dei corpi non è disturbato dal moto comune dei corpi. ——

Ciò ammesso sia V la velocità che il moto della terra comunica ad un mobile, e sia F la forza da cui è animato in virtù di questa velocità; egli è chiaro che questa cambierà al cambiar della velocità e però porre potremo

(1) $F = \varphi(V)$, ed ancora

(2) $V = \varphi_1(F)$; ma quando $V=0$ necessariamente $F=0$, e però dovendosi annullare nello stesso tempo possiamo porre la

(3) $V = \varphi_2(F)F$; supponiamo che la F si scomponga in tre a, b, c paralelle a tre assi coordinati, e sieno x, y, z le velocità rispettive del mobile nella direzione dei tre assi. La (3) dovrà sussistere che a vece di V si ponga x, e a vece di F, a, così ponendo le y, b, e le z ed c, dunque si avranno le

(4) $x = \varphi_2(a)a$,

(5) $y = \varphi_2(b)b$,

(6) $z = \varphi_2(c)c$. Supponiamo che il mobile sia inoltre sollecitato da una forza F_1 che sia indipendente dal moto della terra; le componenti di questa secondo i prefati assi sieno a_1, b_1, c_1, e supponiamo che abbiano le direzioni med.e di a, b, c; in q.ta ipotesi il mobile sarà sollecitato lungo gli assi dalle forze

$a + a_1$, $b + b_1$, $c + c_1$.

Supponiamo che x_1 sia l'aumento della velocità x proveniente dalla forza F_1 che è indipend.e dal moto della terra, e la (4) dovrà sussistere per $x + x_1$ a vece di x, ed $a + a_1$ a vece di a, e però avremo la

(7) $x + x_1 = (a + a_1)\varphi_2(a + a_1)$: ma pel teorema del Taylor si ha

(8) $\varphi_2(a + a_1) = \varphi_2(a) + \varphi_2'(a)a_1 + \frac{1}{2}\varphi_2''(a)a_1^2 + \text{ec.}$; dunque di q.to 2.o membro si compone di termini che sono indipend.i da a_1, e di altri moltiplicati p coeff.i che sono funzione intera di a_1; dunque, sost.e nella (7) a vece di $\varphi_2(a + a_1)$ se ne avrà un'equazione della forma

(9) $x + x_1 = a\varphi_2(a) + Aa_1 + Ba_1^2 + Ca_1^3 + \text{ec.}$

ove A, B, C ec sono funzioni senza a_1. Sottraendo la (a) dalla (9) si ha la

(10) $x_1 = Aa_1 + Ba_1^2 + Ca_1^3 + \text{ecc.}$

Dovremo ora determinare i coefficienti A, B, C ec. Si osservi, che il 1.º membro della (10) rappresenta la velocità relativa del mobile nella direzione dell'asse delle x, la quale è al tutto indipend.e dalla velocità della terra; dunque il 2.º membro della (10) dev'essere indipend.e dalla stessa velocità della terra, vale a dire da questa velocità essere debbono indipend.i i coeff.i A, B, C ec cioè non debbono contenere la $\underline{a}$. Inoltre, a vece di sostituire nella funzione $a\varphi_n(a)$ $a+a_1$, dalla quale si è avuto la serie

$a\varphi_n(a) + Aa_1 + Ba_1^2 + Ca_1^3$ ec

sostituire si può $a+\frac{1}{n}a_1$, e poscia alternativamente cambiare fa[...] la stessa sost.e a vece di [...]. Fatta la sost.e 1.a si ha

$a\varphi_n(a) + A\frac{1}{n}a_1 + B(\frac{1}{n}a_1)^2 + \text{ec}$

sost.e ora $a+\frac{1}{n}a_1$, si osservi che basterà sost.e in $a\varphi_n$, perchè i coeff.i A, B, C ec non contengono la a.

dunque basterà scrivere

$a \cdot \varphi_n(a) + A\frac{1}{n}a_1 + B\left(\frac{1}{n}a_1\right)^n + \&$

$a\varphi_n(a) + A\frac{1}{n}a_1 + B\left(\frac{1}{n}\right)(a_1)^n + \& =$

$a \cdot \varphi_n(a) + Aa_1 + 2B\left(\frac{1}{n}a_1\right)^n + \&$ che debb'essere il 2.° membro della (9.) dunque avremo la

(11) $x + x_1 = a\varphi_n(a) + Aa_1 + Ba_1^n + \&$

$= a \cdot \varphi_n(a) + Aa_1 + 2B\left(\frac{1}{n}a_1\right)^n + \&$

I due polinomj esser debbono ora per identità di termini, dunque dovrà aver luogo la

(12) $Ba_1^n = 2B\left(\frac{1}{n}a_1\right)^n$, ossia

$a_1^n = \frac{1}{n}a_1^n$ che è impossibile; ma l'equazione si deve verificare, dunque debb' essere $B = 0$.

Confrontando gli altri termini che vengono di poi si proverebbe essere $C = 0$ & per cui la (10) diventa

(13.) $x_1 = Aa_1$ ove A è una quantità costante.

Noi abbiamo adoperata la (4); ma gli stessi raziocinj si adattano alle (5) e (6.) dunque si avrebbe similmente

(14) $y_1 = Ab_1$

(15) $z_1 = Ac_1$. Dal che conchiudere si debbe, che se un corpo sia sollecitato da una forza qualunque f, che a lui comunichi la velocità v, sarà in generale la

(16) $o = kt$, essendo k costante. Ecco dunque dimostrata che come si era proposto. §

§. 415. Poichè le forze sono proporzionali alle velocità da loro prodotte ne viene di conseguenza che il parallelogrammo delle forze si adatta alle velocità, cioè data la velocità che una forza k produce ad essi in un minimo di tempo in una data direzione, si possono determinare le velocità componenti, e per conseguenza —

§. 416. Ogni moto si eseguisce con una certa velocità; e questa manifesta un'azione di una forza proporzionale alla velocità della forza. Dunque dovremo concludere, che ogni moto è causato da una forza. La forza è istantanea o continua. La forza istantanea abbandona il corpo nell'istante che agisce su di lui. La forza continua agisce continuamente su di lui. —

La forza continua si divide poi in costante, e variabile; la costante si mantiene la stessa in tutti

gl' istanti della sua durata, la variabile varia in ogni istante, come la gravità tenendo conto della dist.

Se la forza continua diminuisca la velocità, dicesi ritardatrice, e se la aumenti accelleratrice. — Una stessa forza diversamente esercitata può essere accelleratrice o ritardatrice come la gravità. In un corpo la forza continua agisce sopra ciascuna sua molecola, e però ad avere l'effetto di essa converrà moltiplicarla per la massa, e questo prodotto dicesi forza motrice; laonde la forza motrice divisa per la massa da la forza continua, che può essere accel. o ritard. La forza che esercita un' azione senza produr alcun moto dicesi pressione.

Nella dinamica si ha spesso il quadrato della massa nella velocità che dicesi forza viva.

Le forze del medesimo genere diconsi simili ovvero omogenee, e dissimili od eterogenee quelle di genere diverso; ad es. una forza istant. ed una continua

sono simili od omogenea ri-
una ist. ed una cont. estra-
genee. ——— . ——— . ———

§. 417. Immaginato il tempo pel
quale una forza esercita
la sua azione su di un ca-
po diviso in tempuscoli in-
determ.e piccoli, sarà pur
indeterm.e piccola l'azione
che produce in uno di siffatti tempu-
scoli e quindi siccome
le velocità sono proporzi-
gionali alle forze, in de-
term.e piccola sarà la
velocità.

Una forza istantanea
in un tempo indeterminatamente
piccolo esercita un'azione
finita quindi una velocità fi-
nita, e però la forza istan-
tanea è infinitamente
grande rispetto alla forza
continua. ———

Noi abbiamo sempre
sotto gli occhi la diff.za fra
la forza istantanea e la
continua, così si vede che
un colpo di percossa ottiene
un grande effetto, che la
pressione non otterrebbe
che con un gran peso. Ne ca-
giono d'es. di un colpo di
martello per conficcare
un chiodo. Ad ogni istante

che il martello discende si au-
menta la sua velocità e però
si ha un gran effetto. Si os-
servi però che non essendo
il chiodo durissimo, l'applicaz.
della potenza alla cedente testa del
chiodo si fa successivamente, e quindi in
ogni istante si fa elisione di forza.
A misura che i corpi si
scostano dall'essere perfet-
tamente duri, la forza
di percossa diminuisce; la
percossa produrrebbe tutto il
suo effetto se nessuno de'
corpi concorrenti cedesse, di
guisa che il colpo fosse i-
stantaneo, e le forze tutte
si eseguissero in un solo
istante di tempo. Un mar-
tello d'acciajo di tutta tem-
pra sarebbe capace di rom-
pere un diamante posto su
di un'incudine egualmente
temperata, e forse non sa-
rebbe capace di rompere una no-
ce posta sopra un incudine di
rame.

§. 118. Il moto uniforme è pro-
dotto da una forza istan-
tanea, e il vario da una
forza continua che agisca
successivamente. La for-
za continua equivale ad una
forza istantanea che comu-
nicando in tutti gli istanti
la velocità indeterminatamen-
te piccola

I corpi sono essenzialmen-
te inerti, cioè hanno la
proprietà di conservare la
velocità che loro viene im-
pressa; se dunque il tem-
po in cui si fa il moto va-
rio, cioè durante il quale
agisce la forza continua
cioè s'intende diviso in
un n.° d'istanti inde-
term.e piccoli si può sup-
porre che la forza dia
al corpo un nuovo impul-
so al principio di ogni i-
stante e che tutte queste
velocità si vadino accumu-
lando. Così per ogni tempu-
scolo indeterm.e piccolo il
moto sarà uniforme, ma
la velocità sarà diversa.
Laonde il moto prodot-
to da una forza continua
per quanto sia vario ri-
sulterà da una serie di
moti uniformi di durata
indeterm.e piccola e di ve-
locità differenti —

(16)

Capitolo XXXIV.
Del moto rettilineo

Lezione 87.

§. 419. Il moto più semplice che possa concepire un punto materiale è quello che si fa in linea retta e quello nel quale il punto passa spazj eguali in tempi eguali; è questo il moto uniforme prodotto da una forza istantanea. E' chiaro che in tutti i tempi la velocità conservare si deve la stessa altrimenti in tempi eguali non si passerebbero spazj eguali; e che la velocità è la ragione costante degli spazj passati ai tempi trascorsi dal principio del moto, ovvero lo spazio passato nell'unità di tempo. Il moto uniforme differisce da un altro moto uniforme e per la direzione e per velocità. Prendiamo per v la velocità costante, per t il tempo trascorso in un dato istante, e per s lo spazio passato; perciò si avrà

(1) $v = \frac{s}{t}$, e però

(2) $s = vt$.

§. 420. Sia un punto fisso A, dal quale si comincia a contare lo spazio corrispondente al

punto t. Supponiamo che al principio del moto il punto materiale sia distante dal punto A dello spazio S, e supponiamo che il punto si vada allontanando da A percorrendo lo spazio s' nel tempo t. colla velocità v, e si avrà

(3) $s' = tv$. La distanza del punto da A, che è s, sarà $s = S + s' = S + tv$, onde la

(4) $s = S + tv$. Questa è l'equazione generale dei moti uniformi.

Se invece di allontanarsi da A il punto materiale, vi si avvicinasse prenderebbe si dovrebbe prendere v negativa. Se il punto d'onde si comincia il moto fosse dalla parte opposta di A, si dovrà prendere S negativa. Per un altro punto materiale il cui moto uniforme sia riferito ad A, si avrà la

(5) $s_1 = S_1 + v_1 t$. La velocità v_1 sarà positiva o negativa secondo che il punto va la stessa o direzione opposta al primo punto.

§. 121. Dalle (4) e (5) opportunamente combinate si deriva tutta la teorica del moto uniforme.

se ad s_1 si domandi il punto d'incontro dei due punti materiali nel loro moto, nel qual punto esser deve $s=s_1$ si avrà

(6) $s+tv=s_1+tv_1$,

(7) $t=\frac{s_1-s}{v-v_1}$. Se questo valore di t riesca negativo si debbe concludere che l'incontro succede prima dell'istante dal quale si conta il tempo t. Dopo se t positivo. —

Se v e v_1 abbiano lo stesso segno e $v=v_1$ risulta t infinito. Il che mostra che i due punti non possono incontrarsi. La qual cosa è patente poichè con eguali velocità vanno per lo stesso verso. Se inoltre $s=s_1$ si avrebbe $t=\frac{0}{0}$, la qual cosa ci dice che i due punti camminerebbero sempre uniti, come esser debbe. —

N. 422. Sia v, e v_1 le velocità dei due mobili la distanza de' quali al principio del moto, cioè quando $t=0$, è K, e cerchiamo a capo di qual tempo la distanza fra i due mobili sia k.

Siano i due mobili m, ed n, e sia m vicino di più ad A che n; e supponiamo che siano diretti dalla medesima parte scostandosi da A. —

Egli è palese che il problema può avere due soluzioni, poichè la distanza k si può avere prima dell'incontro dei due mobili o dopo. Contata da m andando ad n positiva nel 1.º caso, sarà negativa nel 2.º onde avremo la

(8.) $s - s_1 = \pm k$, sia inoltre

(9.) $S_1 - S = K$, e però la

(10.) $S_1 = K + S$; ma per le (4.) e (5) si ha

$s - s_1 = S + tv - S_1 - tv_1 = \pm k$,

dunque per la (10) sarà $\pm k = S - tv - K - S + tv_1$; ossia avremo la

(11.) $\pm k = -K + (v - v_1)t$, da cui la

(12) $t = \frac{K \pm k}{v - v_1} = \frac{S_1 - S \pm k}{v - v_1}$; per questo valore la (4) diventa

$s = S + v \frac{S_1 - S \pm k}{v - v_1} = \ldots$

$\frac{vS - v_1 S + vS_1 - vS \pm kv}{v - v_1}$, ossia

(13) $s = v \frac{K \pm k}{v - v_1} + S$. Sostituendo il valore di t dato dalle (12.) nella (5) ottiensi

$s_1 = S_1 + v_1 \frac{K \pm k}{v - v_1}$, e riducendo allo stesso denominatore, la

(14) $s_1 = v_1 \frac{K \pm k}{v - v_1} + S_1$.

Se $K = S_1$, dovrà essere $S = 0$, e però avremo le equazioni

(15.) $s = v \frac{S_1 \pm k}{v - v_1}$, e la

(16) $s_1 = \frac{v S_1 \pm v_1 K}{v - v_1}$.

§. 423. Il moto di un mobile è al tutto determinato allorchè si conosce il valore delle due costanti s e v che entrano nella sua equazione, vale a dire allorchè sono date delle condizioni alle quali le due costanti soddisfar debbono ecc.

§. 424. Se i due mobili sono obbligati a descrivere con moto uniforme la medesima curva si potrà concepire la curva rettificata e far uso delle (4) e (5) per confrontare i moti dei due mobili. —

Si osservi, che se la curva sia chiusa non vi sarà un solo punto d'incontro, ma un indeterminato No. di punti d'incontro. Nell'ipotesi di $k = s_1$, la quale supposizione trae con se che esser debba $s = 0$, dalla (12) si ha la

(17) $t = \frac{s_1}{v - v_1}$, tempo in cui succede il primo incontro, poichè ivi esser deve $k = 0$. Considerato il punto di primo incontro come un punto di nuova partenza, la distanza dei due corpi verrà presentata dal perimetro della curva; se questo sarà questa tale distanza, se sia t' il tempo dall'1.° incontro si avrà

(18) $t' = \frac{p}{v-v_1}$; e quindi il tempo calcolato dal principio del moto fino al 2.° incontro sarà

(19) $t + t' = \frac{s_1 + p}{v - v_1}$. Nello stesso modo, considerato il 2.° punto d'incontro come novello punto di partenza, e detto t'' il tempo passato dal 2.° fino al 3.° incontro si avrebbe

(20) $t + t' + t'' = \frac{s_1 + 2p}{v - v_1}$. —

Seguitando della stessa guisa e detto T il tempo passato dal principio del moto fino al ~~[illegible]~~ incontro m^{mo} si avrà

(21) $T = \frac{s_1 + (m-1)p}{v - v_1}$; essendo $s_1 = 0$, la (2) riducesi alla

(2') $s = vt$.

Messo il valore di T nelle (2) e (5) si ha la

(22) $s = v\,\frac{s_1 + (m-1)p}{v - v_1}$, e

(23) $s_1 = \frac{s_1 v + (m-1)p v_1}{v - v_1}$. Per mezzo delle trovate equazioni si determina l'istante in cui gl'indici di un orologio segnano la stessa ora, poichè si possono considerare come mobili che girano in un circolo —

§. 125. Allorchè una forza continua, come la gravità, l'attrazione, agisce su di un corpo, il moto che da lei

viene generato non è più uni-
forme, ma varia. Precisamen-
te, la forza acceleratrice gene-
ra il moto accellerato, e la
ritardatrice il ritardato. –
Una forza accelleratrice co-
stante produce il moto uni-
formemente vario, cioè agi-
sce egualmente sul mobile,
vale a dire aumenta o scema
la velocità egualmente e gli
spazj passati aumentano
o diminuiscono come le velo-
cità. Cessa l'uniformità
del moto vario se la forza
che il produce non sia costan-
te, ma bensì variabile. –
Ritorniamo a mente che la
velocità acquistata da un
mobile, o la velocità del
mobile è la velocità con-
cepita dal mobile per la
continuazione della forza
dal principio del tempo
cioè quando $t=0$, fino ad
un dato tempo ~~=~~ t. —
Questa velocità si manterreb-
be costante se allo spirare
il tempo t cessasse la for-
za accelleratrice, allorquando
continuerebbe il mobile a
muoversi con moto unifor-
me per l'inerzia ———
= §. 126. Sia s lo spazio passato nel

tempo t: o la velocità acquistata a capo di questo tempo, e C la forza continua che sollecita il punto materiale. Sia m un numero indetermin.te grande cioè che vada crescendo senza limiti, e si ponga la

(24) $\frac{t}{m} = \omega$, ed ω rappresenterà un tempuscolo indetermin.te piccolo. Figuriamo che una forza istantanea agisca sul punto materiale al principio di ciascun tempuscolo ω indetermin.te piccolo; la somma di tali tempuscoli è t, e questa forza istantanea gli accresca una velocità finita che aumenti quella da cui il mobile è animato. Siano $a, a', a'', \ldots a^{(m-1)}$, le velocità comunicate al principio di ciascun tempuscolo fino al m.^{mo} inclusiv. Nella durata di ciascun tempuscolo il moto si può considerare uniforme, e le velocità successive del mobile sono,

$a, \; a+a', \; a+a'+a'', \ldots a+a'+\&c.^a$

ma si è ved. che nei moti uniformi gli spazi sono come le velocità moltiplicate coi tempi, dunque gli spazi saranno

aw, $(a+a')w$, $(a+a'+a'')w$ - - - -
$(a+a'+a''+ - - - + a^{(n-1)})w$. Osserviamo che in queste espressioni la a è replicata n volte; la a', $n-1$ volta; la a'' $n-2$ volte e la $a^{(n-1)}$ ~~[illegible]~~ 1 volta, e però potremo sostituire

$anw + a'(n-1)w + a''(n-2)w + —$

$+ a^{(n-1)}w$, che rappresenta lo ~~[illegible]~~ spazio passato nel tempo t. Di conseguenza, lo spazio che passerebbe il punto animato da questa velocità con moto uniforme durante il tempo $t = nw$, sarà

$(a+a'+a''+a''' - - - a^{(n-1)})nw =$
$anw + a'nw + - - - + a^{(n-1)}nw$. ~~[illegible]~~
~~$anw + a'(n-1)w + a''(n-2)w$ - - - $+ a$ ...~~

Noi abbiamo supposto a, a'', a''' positivi che siano aggiunte ad a positivo, ossia abbiamo supposto il moto accellerato; in tal caso si ha

$anw + a'nw + a''nw + - - - a^{(n-1)}nw >$

$anw + a'(n-1)w + a''(n-2)w + —$
$+ a^{(n-1)}w$. Se il moto sia ritardato cioè le velocità negative si avrà

$anw - a'nw - a''nw - - a^{(n-1)}nw$ ~~[illegible]~~

$anw - a'(n-1)w - a''(n-2)w -$
$- - - a^{(n-1)}w$.

Dunque, se il moto sia accellerato lo spazio passato nella durata di un tempo qua-

lunque è più piccolo di quello che sarebbe passato di moto uniforme in virtù della velocità acquistata alla fine di questo tempo ———

Il contrario si dette concludere pel moto ritardato.

Essendo poi le cose dette indipendenti dalla grandezza di ω, e dagl' intervalli di tempo che separano l'azione della forza, ne conseguitano che hanno luogo anche per la continuità, dove la velocità varia per gradi indeterm.e piccoli —

§. 127. Nel moto vario in un modo qualunque è palese essere lo spazio s passato nel tempo t funzione di questo tempo, e quindi potremo porre la

(25) $s = F(t)$ nella quale poniamo $t+t_1$ a vece di t, e per questa sostituzione s diventi S, e si avrà

(26) $S = F(t) + F'(t)t_1 + \frac{1}{2} F''(t)t_1^2 + \frac{1}{2.3} F'''(t)t_1^3 + \text{———} \&c$

d'onde deducesi la

(27) $S - F(t) = S - s = F'(t)t_1 + \frac{1}{2} F''(t)t_1^2 + \frac{1}{2.3} F'''(t)t_1^3 + \&c$

che rappresenta lo spazio passato nel tempo t_1 ———

Si osservi, che supporre si può t_1 piccolo di guisa, che

il moto durante questo tempuscolo sia sempre accellerato o ritardato.

Poniamo che il moto sia sempre accellerato e che v_1 sia la velocità acquistata nel lasso t_1 di tempo. Poichè v è la velocità di già acquistata dal mobile nel lasso di tempo t, sarà $v+v_1$ la velocità acquistata nel lasso di tempo $t+t_1$, e dietro il dimostrato al D. 126 avremo la

(28) $(v+v_1)t_1 > F'(t)t_1 + \frac{1}{2}F''(t)t_1^2 + \&c.$

Nella fatta supposizione del moto accellerato, lo spazio $F'(t)t_1 + \frac{1}{2}F''(t)t_1^2 + \&c.$ passato nel tempo t_1 con moto accellerato, è evidentemente maggiore ~~[illegible]~~ dello spazio vt_1 passato con moto uniforme nello stesso tempo e però sarà la

(29) $vt_1 < F'(t)t_1 + \frac{1}{2}F''(t)t_1^2 + \&c.$

Per quantunque piccola sia la t_1, le ineguaglianze (28) (29) sussistono, e quindi il valore $F'(t)t_1 + \frac{1}{2}F''(t)t_1^2 + \&c.$ è compreso fra v e $v+v_1$. Dunque pel dimostrato al C. I. si avrà la

(30) $v = F'(t)$: ossia avremo la

(31) $v = \frac{ds}{dt}$; pel moto ritardato si arriverebbe alla med.a conseguenza.

Dovremo dunque concludere che qualunque sia la forza continua che sollecita un punto materiale, la velocità v acquistata nel lasso di un tempo $t = \frac{ds}{dt}$.

§.428. Alla (31) si attinge immediatamente considerando il moto vario come una serie la quale si compone di un N.° indeterm.e grande di moti uniformi di velocità diverse e che hanno luogo in tempuscoli indeterm.e piccoli; supposto che dt rappresenti uno di siffatti tempuscoli e ds lo spazio corrispondente, si ha la

(31) $v = \frac{ds}{dt}$.

Lezione 88.
la 89. Ripet.e

§.429. Determiniamo ora l'espressione della forza continua Q; all'uopo poniamo

(24) $\frac{t}{m} = w$, essendo m indeterm.e grande nel tempuscolo w, indeterminatamente piccolo si può considerare Q costante, e quindi uniforme il moto durante così fatto tempuscolo. Potendosi considerare la Q costante per siffatto tempuscolo la forza Q equivale ad wQ in un' unità di tempo. Ma l'effetto della Q durante il tempuscolo w è dv, dunque

do misura l'intensione della forza wq. Avremo dunque la

(32) $dv = wq$: ma w è il diff.° del tempo, dunque avremo

(33) $dv = \varphi dt$, e però la

(34) $\varphi = \frac{dv}{dt}$ espressione della forza continua.

Ma prendendo il diff.° della (31) supposto dt costantissimo

(35) $dv = \frac{d^2s}{dt^2} dt$, e quindi

$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$, onde sostit.° nella (34) si avrà

(35) $\varphi = \frac{d^2s}{dt^2}$ espressione della forza continua.

Si può anche d'altra guisa attingere alla (34) dipendentemente dall'essere le velocità proporzionali alle forze. Per misurare la φ è d'uopo confrontarla con una forza continua conosciuta. Sia g la forza continua costante che comunica la velocità g al mobile nell'unità di tempo, e sarà gdt la velocità comunicatale nel lasso di tempo dt essendo dt piccolissimo. La forza φ in tal lasso di tempo si può considerare costante, onde sarà φdt sarà il suo differenziale. Ma v è la velocità a capo del tempo t, dunque $v + dv$

sarà la velocità a capo del tempo $t + dt$
Per conseguenza dv sarà la velocità prodotta nel tempuscolo dt, e però avremo $g\,dt = \frac{}{}dv$, ma le forze stanno come le velocità prodotte nello stesso tempo dunque si avrà la proporzione
$\varphi : p :: dv : g\,dt$, da cui
$\varphi = \frac{p}{g}\frac{dv}{dt}$
Prendendo per unità di forza la p. tale che produca nell'unità di tempo una velocità g eguale all'unità di lunghezza, si avrà $p = 1$, $g = 1$, e però la precedente equazione si riduce alla
(31) $\varphi = \frac{dv}{dt}$.
La φ adunque è riferita ad una unità di forza che nell'unità di tempo produce una velocità eguale all'unità di lunghezza.
§.130. Si è trovato v, e φ in derivate, $v = \frac{ds}{dt}$, e $\varphi = \frac{dv}{dt}$
A generalizzare questa ultima espressione, cioè a rendendola atta ad essere riferita a qualunque variabile indipendente si è veduto nel calcolo sublime che si deve

porrò a vece di $\frac{d^2s}{dt^2}$; la $\frac{d^2s\,dt - ds\,dt^2}{dt^3}$;

ciò fatto si ha

(37) $dv = \frac{d^2s\,dt - ds\,d^2t}{dt^2}$, e la

(38) $\varphi = \frac{d^2s\,dt - ds\,d^2t}{dt^3}$, che potrà riferirsi a qualunque variabile indipendente. —

§. 131. ~~Sulle~~ (31) $v = \frac{ds}{dt}$, e (36) $\varphi = \frac{d^2s}{dt^2}$ sono di un'essenzialissimo nella dinamica. Allorchè vien data la φ in funzione del tempo, le equazioni (34) e (36) integrate ci fanno conoscere la velocità acquistata, e lo spazio passato in ciascun istante del moto. D'ordinario però la φ è data in funzione di s e della velocità acquistata o in funzione di ambedue. Quando φ è dato in funzione di t le (34) e (36) sono separate, e la loro integrazione dipende dalla integrazione di funzioni. Negl'altri casi conviene integrare equazioni che non sono separate di 1.° e di 2.° ordine e che oppongono grandissime difficoltà molte volte.

§. 132. Quantunque le trovate equazioni non si adattano

che a punti materiali isolati; nulladimeno le conseguenze che da essi diduconsi, potranno applicarsi a dei corpi di una dimensione qualunque supponendo che tutti i loro punti nel loro moto passano delle linee parallele, e che ciascun punto si muova nello stesso modo che se fosse isolato. In tali supposizioni le trovate equazioni valgono.

§. 133. Se Q sia costante il moto sarà uniformemente vario; la caduta de' gravi nel vuoto, dove i corpi cadono da non grande altezze, mette davanti un cotifatto moto.

L'esperienza ha provato che gli spazj da essi passati sono proporzionali ai quadrati dei tempi e le velocità acquistate come i tempi, e poi avremo la

(39) $v = gt$, prendendo il differenziale si avrà

$dv = gdt$, e quindi, la

(40) $\frac{dv}{dt} = g = Q$ perola (36.)—

Dunque poste le velocità proporzionali ai tempi si deduce

a essere la gravità costante a non grandi altezza. La sperienza così si ha dall'esperienza gli spazj proporzionali ai quadrati dei tempi, e si ha

(41) $s = g_1 t^2$;

prendendo la 2ª derivata, si ha

(42) $\frac{d^2 s}{dt^2} = 2g_1 = Q$.

$(31)\ v = \frac{ds}{dt}$

§. 234. Se nella (31.) si mette il valore di v dato dalla (39) ne viene la

(43) $gt = \frac{ds}{dt}$, e però

$gt\,dt = ds$; equazione separata, ed integrando la

(44) $s = \frac{g}{2} t^2 + C$. A determinare C si osservi che sarà nella C si osservi che corrisponda $t = 0$, se $s = 0$, nella quale ipotesi la (44) si riduce alla

(45) $s = \frac{g}{2} t^2$, integrale determinato della (43.)

Dalla (45.) deducesi

(46) $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$, valore che sostituito nella (39) produce la

(47) $v = \sqrt{2gs}$, e però

(48) $v^2 = 2gs$. Confrontando la (40.) colla (42) si vede che esser deve $g_1 = \frac{g}{2}$, per cui la (41.) riducesi alla

(45) $s = \frac{g}{2} t^2$.

§. 235. Un punto materiale animato

dalla forza continua φ passi uno spazio x nel tempo t, alla fine del qual tempo sia v la velocità acquistata, e si avrà

(49) $v = \frac{dx}{dt}$.

Supponiamo che lo stesso punto sia animato dalla gravità g, e dopo il tempo t abbia passato lo spazio s ed acquistata la velocità v, e si avrà

(48) $v^2 = 2sg$, e però diff.

(50) $vdv = gds$, ma $dv = \varphi dt$ per la (34) dunque avremo

(51) $\varphi dx = gds$.

§. 436. L'esperienza ha mostrato che alla Latitudine di Parigi un grave nel 1° secondo di sua discesa partendo dalla quiete passa metri 4,9044; dunque quando $t = 1''$, si ha $s = 4,9044$: prendendo dunque per unità di tempo $1''$ dalla (45) si ha

(52) $4,9044 = \frac{g}{2}$, e però

(53) $g = 9,8088$ che rappresenta l'intensione della gravità[(a)], vale a dire il suo effetto.

§. 437. Se nella equazione (39) e (45) si ponga $t=1$, ne nascono equazioni

(a) la quale produce una velocità tale che il mobile percorrerà lo spazio 9,8088. con moto uni-

(39) $v = gt$

(45) $s = \frac{gt^2}{2}$

(54) $v = g t$,

(55) $g = 2 t$, e però

(56) $v = 2 s$. Dal che si deduce che la forza continua costante produca in un punto materiale in un tempo qualunque una velocità doppia dello spazio che gli fa passare in questo tempo.

(31) $v = \frac{ds}{dt}$

(34) $\varphi = \frac{dv}{dt}$

§. 438. Dalle (31.) e (34) deducesi

(57) $dt = \frac{ds}{v}$,

(58) $dt = \frac{dv}{\varphi}$. onde

$\frac{ds}{v} = \frac{dv}{\varphi}$, ovvero

(59) $\varphi ds = v dv$. Se φ è costante la (59) è separata ed il suo integrale è

(60) $\varphi s = \frac{v^2}{2} + C$.

Per maggiore generalità supporremo che il mobile sia animato da una velocità f quando comincia la sua caduta; e sia f di essa velocità iniziale del mobile e lo spinga dall'alto al basso. In tale ipotesi la C si dovrà determinare dietro le condizioni che sia $v = f$, quando $s = 0$. Dalla (60) adunque per determinare C, si ha

(61) $0 = \frac{f^2}{2} + C$; d'onde la

(62) $C = -\frac{f^2}{2}$, e però l'integ. determinato sarà

(63) $\varphi s = \frac{v^2}{2} - \frac{f^2}{2}$, da cui la

(64) $v=\sqrt{2Qs+\beta^2}$, e però la

(65) $\sqrt{2Qs+\beta^2}=\frac{ds}{dt}$, per la (31), ossia

(66) $dt=\frac{ds}{\sqrt{2Qs+\beta^2}}$, equazione separata. Poniamo $\sqrt{2Qs+\beta^2}=u$, e si avrà

$2Qs+\beta^2=u^2$, e però

$ds=\frac{udu}{Q}$; poichè Q e β si suppongono costanti. Per questi valori la (66) si muta nella

(67) $dt=\frac{udu}{Qu}=\frac{du}{Q}$, di cui l'integrale è

(68) $t=\frac{u}{Q}+C_1=\frac{\sqrt{2Qs+\beta^2}}{Q}+C_1$

Ma quando $t=0$, esser deve $s=0$, dunque a determinare la C_1, si ha l'equazione

$0=\frac{\beta}{Q}+C_1$, e però

(69) $C_1=-\frac{\beta}{Q}$, e quindi l'integrale determinato verrà presentato dalla

(70) $t=\frac{\sqrt{2Qs+\beta^2}-\beta}{Q}$, nella quale sostituito il valore di Q dato dalla (63) ne viene la

(71) $t=\frac{v-\beta}{Q}$; ma dalla (63) si ha

$Q=\frac{v^2-\beta^2}{2s}=\frac{(v+\beta)(v-\beta)}{2s}$, dunque la

(72) $t=\frac{2s}{v+\beta}$

(63) $\varphi s = \frac{v^2}{2} - \frac{p^2}{2}$

Dalla (63) si ha la

(73) $p = \sqrt{v^2 - 2\varphi s}$; onde per tal valore e per la (64) la (70) si muta nella

(74) $t = \frac{v - \sqrt{v^2 - 2\varphi s}}{\varphi}$; dalla (72) derivasi la

(75) $p = \frac{2s}{t} - v$, dalla (70) si ha $\varphi t + p = \sqrt{2\varphi s + p^2}$, e poi $\varphi^2 t^2 + 2p\varphi t + p^2 = 2\varphi s + p^2$, ossia $\varphi t^2 + 2pt = 2s$, e quindi

(76) $p = \frac{s}{t} - \frac{\varphi t}{2}$; dalla (71) si ha

(77) $v = \varphi t + p$, e dalla (72) la

(78) $v = \frac{2s}{t} - p$; posto in questa il valore di p dato dalla (76) ne viene la

(79) $v = \frac{s}{t} + \frac{\varphi t}{2}$. Dalla (63) ottiensi la

(80) $\varphi = \frac{v^2 - p^2}{2s}$, e dalla (71) nasce

(81) $\varphi = \frac{v - p}{t}$. Dalla (76) si ha la

(82) $\varphi = \frac{2}{t}\left(\frac{s}{t} - p\right)$, e la (79) origina la

(83) $\varphi = \frac{2}{t}\left(v - \frac{s}{t}\right)$. Dalla (63) derivasi la

(84) $s = \frac{v^2 - p^2}{2\varphi}$; dalla (76) la

(85) $s = \frac{1}{2}\varphi t^2 + pt$, dalla (78) la

(86) $s = \frac{1}{2}t(v + p)$ e la (83) produce la

(87) $s = vt - \frac{\varphi t^2}{2}$. Con queste formule si hanno le v, s, t, φ in diverse espressioni de

§. 239. Se $p=0$, dalla (85) si ha
(88) $s=\frac{1}{2}Qt^2$, e ciò per uno spazio s corrispondente al tempo t; per un'altro spazio s_1 per un tempo t_1 si ha
(89) $s_1=\frac{1}{2}Qt_1^2$, e però la proporzione
(a) $s:s_1::t^2:t_1^2$; come si è osservato essere al §. 233. essere confermato dall'esperienza. Ma quando $p=0$, la (71) riducesi alla
(90) $t=\frac{v}{Q}$ e ciò pel tempo t corrispondente alla velocità, v, così pure si avrà
(91) $t_1=\frac{v_1}{Q}$, e però la
(b) $t:t_1::v:v_1$ d'onde
(c) $t^2:t_1^2::v^2:v_1^2$, e quindi dalla (a) ottiensi la
(d) $s:s_1::v^2:v_1^2$.

Lezione 90.

Dalla (86) fatto $p=0$, si ha
(92) $s=\frac{vt}{2}$, e però per un'altro spazio velocità e tempo la
(93) $s_1=\frac{v_1t_1}{2}$, e però la proporzione
(e) $vt:v_1t_1::s:s_1::v^2:v_1^2::t^2:t_1^2$, e la
(f) $v:v_1::t:t_1::\sqrt{s}:\sqrt{s_1}$; dunque nel moto uniformemente accelerato gli spazj passati dal principio del moto fino a

capo di un tempo sono come i quadrati dei tempi; i tempi poi sono come le velocità o come le radici degli spazj. Laonde se i tempi sieno come i numeri 1, 2, 3, 4, &c. gli spazi passati nei loro lassi saranno come 1 : 4 : 9 : 16 &c. di modo che la serie degli spazj passati dal principio sono come i numeri dispari 1, 3, 5 &c. Difatti posto $a+1$ uno di questi tempi il quadrato sarà

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a+1$$

che è il termine generale della serie dei numeri dispari.

§. 44. Un corpo sollecitato da una forza accelleratrice costante Q, passi con moto uniformemente accelerato lo spazio s nel tempo t, a capo del qual tempo abbia acquistato la velocità v; a capo del tempo t cessi d'agire la forza Q, allora la velocità v rimarrà costante, e il mobile si moverà con moto uniforme la cui durata sia t. Sia S lo spazio passato con moto uniforme nel tempo t, e si avrà

(94) $v = \frac{S}{t}$; ma v, è la velocità

acquistata dal corpo nel temp. t movendosi con moto accelerato. Dunque si ha ancora

(95) $v = \frac{2s}{t}$; per la (78) posto $p=0$. Onde avremo la

(96) $s = 2s$; il che mette davanti che di due spazj passati in egual tempo, l'uno con moto accellerato e l'altro con moto uniforme colla velocità acquistata pel moto uniformemente accellerato il 2.° spazio è doppio del 1.° Dal che concludere si debbe che la forza costante Q, agendo sul corpo per un tempo t e facendogli passare con moto accelerato lo spazio, poi cessata essa, trascorrerà con moto uniforme nello stesso tempo lo spazio $2s$.

(82) $Q = \frac{2}{t}\left(\frac{s}{t} - p\right)$

§. 441. Posto $p=0$, la (82) riducesi nella

(97) $Q = \frac{2s}{t^2}$, se $t=1$, si ha la

(98) $Q = 2s$; il che mette davanti essere la forza accelleratrice costante proporzionale al doppio spazio che fa passare al mobile nell'unità di tempo. Per un'altra forza Q_1 si avrà

(99) $Q_1 = 2s_1$ e però la

(9) $Q : Q_1 :: s : s_1$, cioè le forze continue costanti sono fra loro come gli spazj che fanno percorrere ad un corpo nell'unità di tempo.

§. 662. Una forza acceleratrice continua si può riguardare come una forza istantanea che allo spirare del tempo t imprima al corpo una tale velocità che gli faccia passare nel tempo t con moto uniforme uno spazio doppio di quello che ha descritto con moto uniformemente accelerato nel tempo t.

§. 663. Poniamo che il mobile per impulso di una forza istantanea si muova uniformemente colla velocità $v_1 = \frac{S}{T}$; se nella (84)

(84) $s = \frac{v^2 - p^2}{2Q}$

fatto $p = 0$, si ponga il valore di v_1 si avrà

(100) $s = \frac{S^2}{2T^2 Q}$; ma $\frac{S^2}{T^2} = v_1^2$, dunque $s = \frac{v_1^2}{2Q}$; questo spazio s, che deve passare con un corpo con moto uniformemente accelerato per acquistare la velocità $v_1 = \frac{S}{T}$, dicesi altezza dovuta alla velocità v_1; e perconverso v_1 dicesi velocità dovuta all'altezza s. In generale dicesi velocità

dovuta ad un'altezza la velocità dovuta alla caduta da tale altezza, la quale dicesi altezza dovuta a quella velocità; si avrà similmente

(101) $s_2 = \frac{v_2^2}{2g}$ essendo g costante,

e si avrà la

(4) $v_1 : v_2 :: \sqrt{s_1} : \sqrt{s_2}$, come esser debbe perchè g è costante.

§ 444. Se il moto sia uniformemente ritardato la velocità va continuamente diminuendo e però si dovrà prendere negativo il differenziale di lei. Sieno g_1, v_1, s_1, t_1 le velocità spazii e tempo di un moto uniformemente ritardato, e dalle (34) e (59) si ha

(102) $g = -\frac{dv_1}{dt_1}$,

(103) $g\,ds_1 = -v_1\,dv_1$; poichè g è costante l'integrale di quest'equazione verrà rappresentato dalla

(104) $g s_1 = -\frac{1}{2} v_1^2 + C$; ma esser deve $s_1 = 0$ quando $v_1 = \beta$, e però ne verrà $C = \frac{1}{2}\beta^2$; e però l'integrale determinato sarà

(105) $g s_1 = \frac{1}{2}(\beta^2 - v_1^2)$ donde la

(106) $v_1 = \sqrt{\beta^2 - 2 g s_1}$, e però sarà la velocità, se la

(107) $v_1 = \frac{ds_1}{dt_1}$, e però

$\frac{ds_1}{dt_1} = v_1 = \sqrt{p^2 - 2qs_1}$, onde la

(108) $dt_1 = \frac{ds_1}{\sqrt{p^2 - 2qs_1}}$; l'integrale determinato di quest'equazione è presentato dalla

(109) $t_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 2qs_1}}{q}$; l'integrale della (102) e (103) all'ipotesi che $v = p$, $s_1 = 0$ sono

(102) $q = -\frac{dv_1}{dt_1}$

(103) $q\,ds_1 = -v_1\,dv_1$

(110) $qt_1 = -v_1 + p$

(111) $qs_1 = -\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{1}{2} p^2$; ma dalla (110) si ha

$v_1 = p - qt_1$ e però

$v_1^2 = p^2 - 2qpt_1 + q^2 t_1^2$, dunque la (111) diventa

$qs_1 = pt_1 - \frac{1}{2} q t_1^2$, d'onde

$t_1^2 - \frac{2p}{q} t_1 = -\frac{2s_1}{q}$, e però risolvendola rispetto alla t_1 la (109). — Dalla (105) si ha la

(112) $2qs = p^2 - v_1^2$ che sostit. nella (109) produce la

(113) $t_1 = \frac{p - v_1}{q}$; ma dalla (105) si ha la

(114) $q = \frac{p^2 - v_1^2}{2s_1} = \frac{(p + v_1)(p - v_1)}{2s_1}$, dunq.

(115) $t_1 = \frac{2s_1}{v_1 + p}$; dalla (105) si ha pure

(116) $p = \sqrt{v_1^2 + 2qs_1}$, pel qual valore e per la (106) la (109) riducesi alla

(117) $t_1 = \frac{\sqrt{v_1^2 + 2qs_1} - v_1}{q}$; dalla (115)

derivasi la

(118) $p = \frac{2s_1}{t_1} - v_1$: dalla (109) si ha $\sqrt{p^2 - 2qs_1} = p - qt_1$, e però immediatamente la $2s_1 = 2pt_1 - qt_1^2$, e quindi la

(119) $p = \frac{s_1}{t_1} + \frac{qt_1}{2}$; dalla (113) si ha

(120) $v_1 = p - qt_1$; dalla (115) si ha

(121) $v_1 = \frac{2s_1}{t_1} - p$. Posto in questa il valore di p dato dalla (119) si ha la

(122) $v_1 = \frac{s_1}{t_1} - \frac{qt_1}{2}$; dalla (111) la

(123) $q = \frac{p^2 - v_1^2}{2s_1}$, e dalla (113) la

(124) $q = \frac{p - v_1}{t_1}$: dalla (119) nasce la

(125) $q = \frac{2}{t_1}\left(p - \frac{s_1}{t_1}\right)$: dalla (122) origina la

(126) $q = \frac{2}{t_1}\left(\frac{s_1}{t_1} - v_1\right)$: dalla (105) ne viene la

(127) $s_1 = \frac{p^2 - v_1^2}{2q}$: dalla (119) si ha

(128) $s_1 = pt_1 - \frac{1}{2}qt_1^2 = \frac{t_1}{2}(2p - qt_1)$: dalla (121) deducesi la

(129) $s_1 = \frac{t_1}{2}(v_1 + p)$: dalla (106) ottiensi la

(130) $s_1 = v_1t_1 + \frac{1}{2}qt_1^2$ formole rispetto al moto uniformemente ritardato, analoghe a quello del moto accelerato.

§. 445. Un grave cada senza velocità iniziale, sollecitato dalla forza di gravità q costante. Se nella (86) si ponga $p=0$,

(84) $s = \frac{v^2 - p^2}{2g}$

avremo la

(131) $s = \frac{v^2}{2g}$, essendo v la velocità acquistata a capo dello spazio s. Supponiamo che una forza istantanea spinga il corpo che ha già acquistato la velocità v dal basso all'alto con la velocità v_1, e posto $p = v_1$ la (127) si muta nella

(132) $s_1 = \frac{v^2 - v_1^2}{2g}$; quando il grave abbia attinta una certa altezza esso non ascenderà più e di conseguenza sarà $v_1 = 0$, e però la (132) riducesi alla

(133) $s_1 = \frac{v^2}{2g}$; dunque avremo la

(134) $s_1 = s$. Dunque la velocità che un grave cadendo con moto uniformemente accelerato acquista può farlo risalire all'altezza d'ond'è caduto; laonde conchiudere si può che le proprietà del moto ritardato sono le stesse ma in senso opposto a quelle del moto accelerato.

§. 445. Prendiamo ora in considerazione il moto sopra un piano inclinato di un punto materiale pesante animato dalla sola gravità.

Scomposta la gravità in due una perpendicolare alla lunghezza del piano, e l'altra secondo la lunghezza medesima, la 1.a resterà elisa dalla resistenze del piano, e la seconda originerà il moto. Si è dimostrato al §. ... che le forze sono proporzionali alle velocità, e di conseguenza, qualunque porzione della forza di gravità sia la componente nella direzione del piano, la velocità da lei prodotta sarà proveniente dalla gravità. Sono de concludere si dee, che il moto sopra di un piano inclinato di un punto pesante è uniformemente accelerato.

Sia h l'altezza, ed l la lunghezza del piano inclinato, e pel ved. al §. 313, la componente secondo la lunghezza del piano sarà $\frac{gh}{l}$; se nelle due equazioni (10) $v=gt$, e (16) $s=\frac{g}{2}t^2$, si ponga $\frac{gh}{l}$, a vece di g, si avranno le equazioni

(135) $v=\frac{gh}{l}t$,

(136) $s=\frac{gh}{2l}t^2$, che sono l'equazioni del moto sopra di un piano inclinato.

Dalla (135) si ha
$t = \frac{lv}{gh}$, per cui la (136) si muta nella

(137) $s = \frac{lv^2}{2gh}$, e però avremo la

(138) $v^2 = \frac{2ghs}{l}$, e quindi la

(139) $v = \sqrt{\frac{2ghs}{l}}$.

Se vogliasi conoscere il tempo impiegato per arrivare al punto più basso del piano inclinato e la velocità acquistata in questo punto, è d'uopo porre $s = l$, il che dà

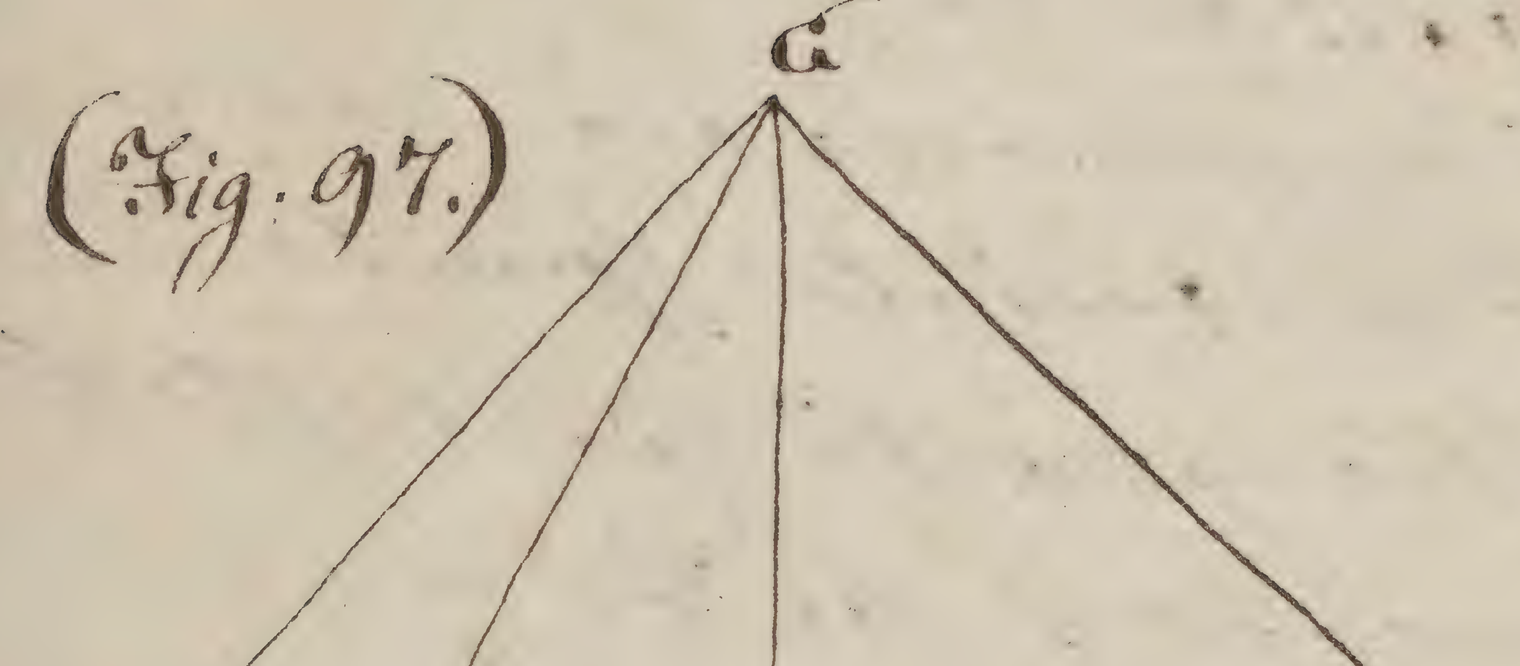
(140) $v = \sqrt{2gh}$, che sostit.^a nella (135) si ha

$\sqrt{2gh} = g\frac{h}{l}\, t$, e però la

(141) $t = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}}$; Se nella (94) che è $v = \sqrt{2\varphi s + p^2}$, si ponga $\varphi = g$; $s = h$, e $p = 0$, si avrà

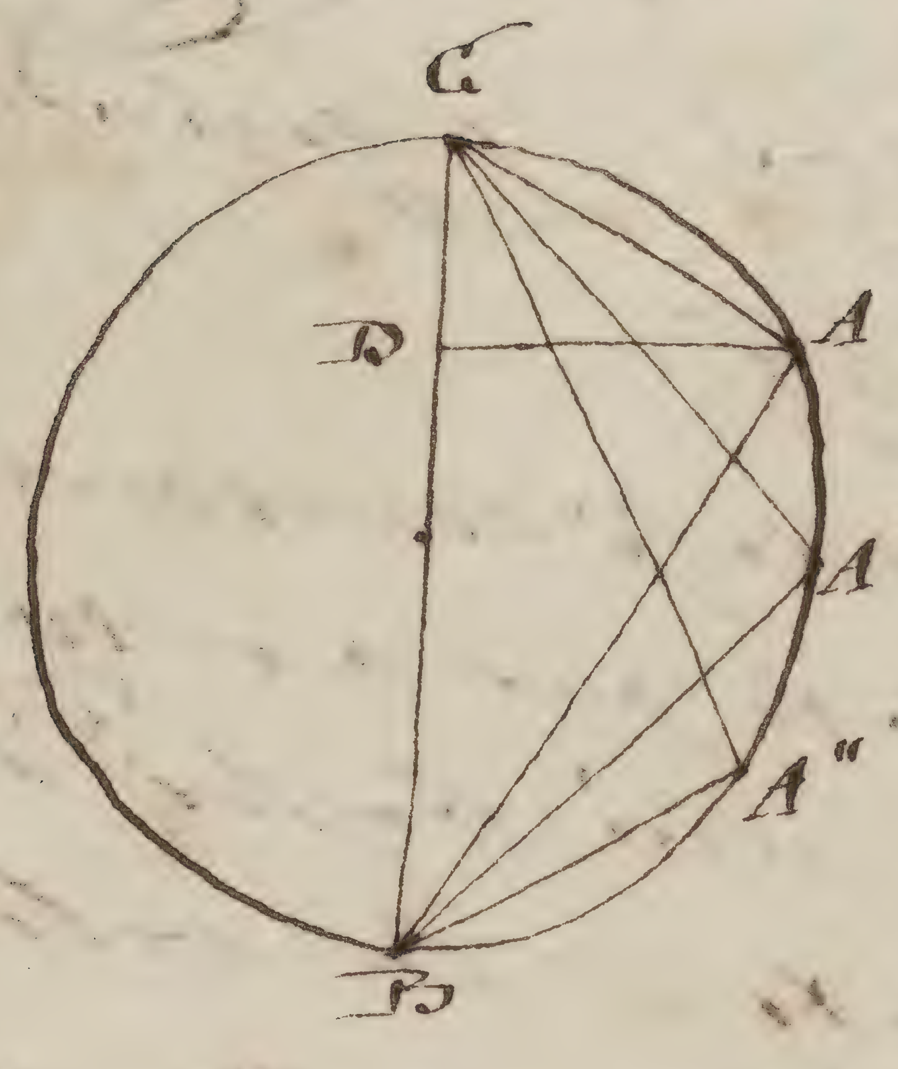
(140) $v = \sqrt{2gh}$; il che rende aperto che la velocità v, acquistata scorrendo la lunghezza del piano inclinato è la stessa di quella che avrebbe acquistato cadendo dall'altezza del piano inclinato. Di guisa che (Fig. 97.) se si abbia un seguito di linee GB, GA, GE che terminano ad un piano orizzontale i punti materiali che partono da G colla stessa velocità iniziale, avranno=

(Fig. 97.)



acquistata la stessa velo-
cità allorchè paragonia-
ti al piano orizzontale.

(Fig. 98.)



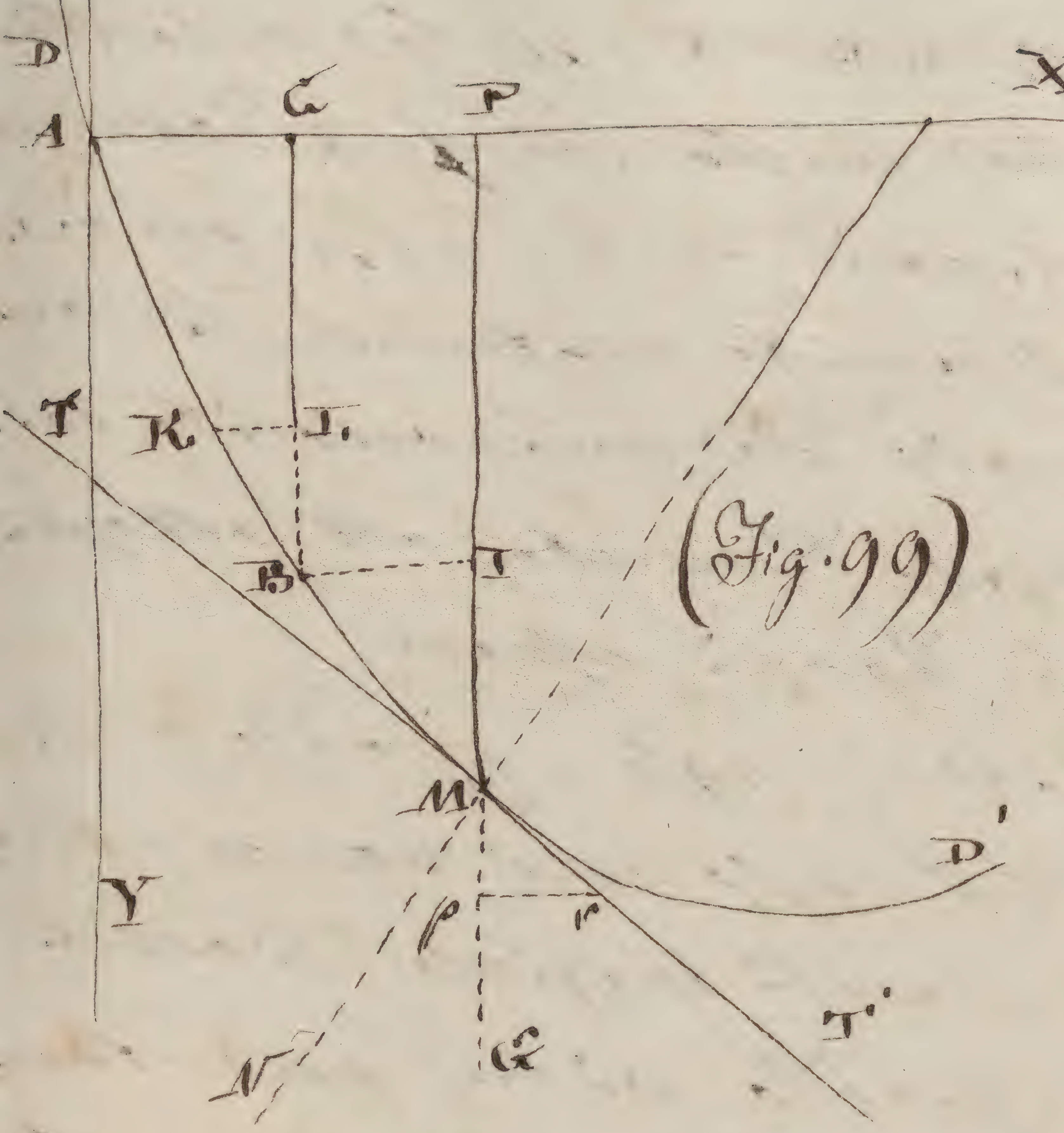
§. 247. (Fig. 98). Dal valore di t.
concludere si può che tutte
le corde GA, GA', GA'' che par-
tono da G e vanno ai pun-
ti, A, A', A'' della circonferen-
za sono descritte nello stes-
so tempo da un punto ma-
teriale. Difatti sia l
la lunghezza di GA, BG = p
e condotta l'orizzontale AD,
si ha h = GD, l = GA, e per
la proprietà del circolo
$l^2 = ph$, che sost.º nella
(141) si ha

(141) $t = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}}$

(142) $t = \sqrt{\frac{2p}{g}}$, la quale è indi-
pendente da GA, lunghezza corda.
Vedesi di leggieri che per la
medesima ragione, le cor-
de AB, A'B, A''B ecc. che
vanno in B sono percorse
nello stesso tempo del diame-
tro GB da punti materiali.

Lezione 91.

§. 248. Supponiamo ora che un pun-
to materiale spinto dalla
sola gravità sia costretto a
muoversi su di una curva,
come se fosse in un cana-
letto. (Fig. 99) Quindi
dalla sola gravità scorra un
punto materiale su di una
curva passando l'arco BM
nel tempo t. Sia l'orizzon-



(Fig. 99)

tale AX l'asse delle X, e la verticale AY l'asse delle Y, di guisa che condotta la MP normale ad AX, si avrà $AP = x$, $MP = y$, e sia $BM = s$, e si conduca l'ordinata $BG = h$. — La velocità v nel senso della tangente TT' è data dalla

(32) $v = \frac{ds}{dt}$, la quale viene dalla gravità aumentata di dv, nell'istante dt. La gravità tende a comunicare al punto materiale la velocità gdt nel senso della verticale MG e nell'istante dt, come risulta dalla

(35) $\varphi = \frac{dv}{dt}$, cambiato φ in g. Scomposta la gdt in due, l'una normale alla curva e l'altra nella direzione della tangente, quest'ultima sarà espressa da $gdt\frac{dy}{ds}$, onde l'aumento di velocità prodotto dalla gravità sarà rappresentato dalla

(143) $dv = gdt\frac{dy}{ds}$; ma dalla (32) si ha

$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}$, dunque avremo

$dv = \frac{1}{v}gdy$, e quindi la

(144) $vdv = gdy$, ed integrando

$\frac{v^2}{2} = gy + gC$, onde la

(145) $v^2 = 2g(y + C)$. Poniamo

$y = GB = k$; se la velocità sia nulla, ad $y = k$ dovrà corrispondere $v = 0$; se poi in B il punto materiale sia animato da una velocità iniziale dovuta all'altezza h, dovrà essere

(148) $v^2 = 2gh$, quando $y = k$.

Nel caso che non vi abbia velocità iniziale, si avrà $C = -k$ e quando vi ha velocità iniziale si avrà $C = h - k$; laonde si avranno i due integrali determinati

(146) $v^2 = 2g(y - k)$

(147) $v^2 = 2g(y + h - k)$. Nel caso che abbia luogo velocità iniziale, poniamo $IB = h$, e sarà $GI = k - h$, e se da I si conduca la IK parallela ad AX la GI sarà l'ordinata di K, per cui la (147) si muta nella

(148) $v^2 = 2g(y - GI)$

Nel caso adunque in cui si abbia velocità iniziale si cambia nel caso che non vi sia ponendo che in K senza velocità iniziale cominci la discesa per la curva. Nell'ipotesi che non vi abbia velocità iniziale la (146) si muta nella

(149) $v^2 = 2g\,(MI)$. Dal che mostrasi che il punto B arrivato in M ha la stessa velocità nella direzione della tangente che se fosse caduto dall'altezza IM. Dunque allorchè un punto materiale discende per una curva in ciascun punto ha la stessa velocità come se fosse caduto dalla corrispondente altezza qualunque sia la curva. Le medesime cose hanno luogo se la curva sia a doppia curvatura. Vedesi adunque che il dimostrato per la discesa dei gravi sul piano inclinato, si adatta al movimento in una curva qualunque. Ciò si adatta pei solidi.

S. 149. Poichè $v = \frac{ds}{dt}$, le (146) e (147) si mutano nelle

(150) $\frac{ds^2}{dt^2} = 2g(y-k)$,

(151) $\frac{ds^2}{dt^2} = 2g(y+h-k)$; dalle quali deduconsi le

(152) $dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y-k)}}$

(153) $dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y+h-k)}}$. Se dalla equazione della curva si

traggasi ds in funzione di dx e dy, cioè si riducano a contenere dy e dt queste due equazioni si potranno integrare almeno per serie. –

§. 150. Sia un punto materiale sollecitato da due forze, una Q_1 costante e continua, che lo spinga per un verso con moto uniformemente vario, ed un'altra Q_2 che lo spinga in senso opposto agendo in ragion reciproca delle distanze del punto materiale da un punto fisso B. Chiamisi Q la forza risultante che sollecita il punto materiale a capo del tempo t, ed avremo

(151) $Q = Q_2 - Q_1$. Sia A il punto d'onde ha principio il moto, e sia a la distanza fra i due punti A, B; sia s lo spazio passato dal mobile nel tempo t, ed m il valore di Q alla distanza 1, e $Q_2 > Q_1$.

A capo del tempo t la distanza del punto materiale sarà $a+s$, e per le condizioni del problema si avrà

$Q_2 : m :: 1 : a+s$.

e quindi la

(155) $Q_1 = \frac{m}{a+s}$, per cui la (154) si riduce alla

(156) $Q = \frac{m}{a+s} - Q_1$. Oltre a questa si hanno poi le due equazioni del moto vario che sono

(32) $v = \frac{ds}{dt}$,

(59) $Q\,ds = v\,dv$; posto nella (59) il valore di Q dato dalla (156) avremo la

(157) $\left(\frac{m}{a+s} - Q_1\right)ds = v\,dv$; ma per ipotesi Q_1 è costante, dunque integrando si ha, la

(158) $C + m\log(a+s) - Q_1 s = \frac{1}{2}v^2$: a determinare C si osservi che in A essendo nello stesso tempo $v=0$, $s=0$, dal che si deduce $C = -m\log a$. Si ha quindi l'equazione

(159) $2m\log\frac{a+s}{a} - 2Q_1 s = v^2$, integrale determinato; dunque avremo la

(160) $v = \pm\sqrt{2m\log\frac{a+s}{a} - 2Q_1 s}$, che in conseguenza della (32) si muta nella

(161) $\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{2m\log.\frac{(a+s)}{a} - 2Q_1 s}$, da cui si ottiene la

(162) $dt = \pm\frac{ds}{\sqrt{2m\log\frac{a+s}{a} - 2Q_1 s}}$;

Se $Q_1 = 0$, si ha la

(163) $dt = \pm \frac{ds}{\sqrt{2m \log \frac{a \mp s}{a}}}$.

= §. 251. Facciamo altre applicazioni: Determiniamo le equazioni del moto verticale tenendo conto delle variazi. della gravità nel vuoto. Sia r il raggio della terra, e g la gravità alla superficie di lei: sia a la distanza del mobile dal centro della terra nell'istante che si comincia a muovere. Quando il mobile avrà passato uno spazio s discendendo verso le superficie della terra sarà $a-s$. la Sia Q la forza continua che agisce sul mobile; si è veduto nella Fisica che l'intensione della gravità segue la ragion reciproca dei quadrati delle distanze dal centro della terra, dunque si avrà la proporz.

(a) $Q : g :: r^2 : (a-s)^2$, e quindi la

(164) $Q = \frac{g.r^2}{(a-s)^2}$: ma la (36) dà

(36) $Q = \frac{d^2s}{dt^2}$, dunque si avrà la

(165) $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g.r^2}{(a-s)^2}$; moltiplicando per $2ds$, si avrà la

(166) $2g.r^2 \frac{ds}{(a-s)^2} = 2\frac{ds.d^2s}{dt^2}$; considerata la t come variabile indipendente, e però dt costante, l'integrale della (166) sarà

(167) $\frac{2g.r^2}{a-s} + C = \frac{ds^2}{dt^2}$; supposto che non vi abbia velocità iniziale, al principio del moto esser debbe $v=\frac{ds}{dt}=0$, ed $s=0$, e però

$C = -\frac{2g.r^2}{a}$; si ha quindi la

(168) $\frac{2g.r^2}{a-s} - \frac{2g.r^2}{a} = \frac{ds^2}{dt^2}$ che è l'integrale determinato, che riducesi alla

va dist. [illegible]

(169) $\frac{2ag.r^2 - 2ag.r^2 + 2g.r^2 s}{a(a-s)} = \frac{ds^2}{dt^2} = v^2$; ovvero la

(170) $v^2 = \frac{2g.r^2}{a}.\frac{s}{a-s}$, che da la velocità del mobile in ciascun punto della verticale. Per avere il tempo nella (170) si metta $v = \frac{ds}{dt}$, ed avremo la

(171) $\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2g.r^2}{a}\frac{s}{a-s}$, e quindi

(172) $dt = \sqrt{\frac{(a-s)a}{2g.r^2 s}}.ds =$

$\frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\sqrt{\frac{a-s}{s}}.ds$. Moltiplicando per $a-s$ il numeratore e denominatore della frazione posta sotto l'ultimo radicale, avremo

$\sqrt{\frac{(a-s)^2}{s(a-s)}} = \frac{a-s}{\sqrt{as-s^2}}$; onde la

(173) $dt = \frac{1}{v}\sqrt{\frac{a}{2g_1}} \cdot \frac{a-s}{\sqrt{as-s^2}}\, ds =$

$\frac{1}{v}\sqrt{\frac{a}{2g_1}}\left(\frac{\frac{1}{2}a-s}{\sqrt{as-s^2}}\, ds + \frac{1}{2}a\, \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2-(\frac{1}{2}a-s)^2}}\right)$

la quale integrata da la

(174) $t = \frac{1}{v}\sqrt{\frac{a}{2g_1}}\left(\sqrt{as-s^2}+\frac{a}{2}A\left(\cos = \frac{a-2s}{a}\right)\right)$

Non si aggiunge costante, perchè si conta il tempo t dall'origine del moto, di guisa che sia $t=0$, quando $s=0$. La (174) mette davanti il valore del tempo in funzione dello spazio passato pel tempo stesso. Le (170) e (174) bastano per la soluzione della proposta quistione.

Se $s=a$, si ha la

(175) $v = \infty$, e

(176) $t = \sqrt{\frac{a}{2g_1}} \cdot \frac{a\pi}{2}$. La velocità ~~[illegible]~~ del punto d'attrazione è infinita, la qual cosa si vede anche dal calcolo.

La (176) da il tempo necessario per arrivare a cosifatto ~~fuoco~~ centro. Il 2° membro è proporzionale ad $a\sqrt{a}$, o $\sqrt{a^3}$, e quindi i tempi impiegati da due corpi per arrivare al centro d'attrazione, sono tra se come

le radici quadrate dei cubi delle distanze.

Si osservi che $A(\theta = \frac{a-2s}{a}) = A(\theta = \sqrt{1-\frac{(a-2s)^2}{a^2}}) = \ldots$ $A(\theta = 2\sqrt{\frac{as-s^2}{a^2}})$. Laonde, se il punto materiale non cade da considerevole altezza, s è piccolissimo rispetto ad a, ed a differisce pochissimo dal raggio terrestre, e di conseguenza alla (170) si può sostituire la

$v^2 = \frac{2g.r^2}{a} \cdot \frac{s}{a-s}$

(177) $v^2 = 2g.s$. Nella stessa ipotesi $2\sqrt{\frac{as-s^2}{a^2}}$, è piccolissima, e quindi l'arco che vi corrisponde è sensibilmente eguale al proprio seno. Inoltre, si può trascurare s^2 a fronte di as; fatto dunque $a = r$, la (176) si muta nella

(178) $t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{ar}{2g}} \cdot 2\sqrt{rs} = \ldots \sqrt{\frac{2s}{g}}$; d'onde la

(179) $s = \frac{g.t^2}{2}$. I trovati valori di v e di s, sono appunto quelli che hanno luogo nei moti de' corpi pesanti che cadono da piccole altezze, e quindi resta provato che in tali casi si può considerare costante la forza di gravità.

Da ciò concludere si può che la forza di gravità si può considerare come costante nella caduta ed ascesa dei gravi a cagione della piccolezza dell'altezza a paragone del raggio della terra.

Lezione 92.

§. 262. Determiniamo il moto rettilineo di un punto materiale attratto da due centri fissi A, B, supposte le attrazioni in ragion reciproca dei quadrati delle distanze dai centri. A maggior chiarezza supporremo che il mobile si muova nella retta che li unisce.

La lunghezza della retta AB che unisce i due centri sia $= l$, e sia s la distanza del mobile dal centro A. e però $l-s$ sarà la distanza da B. Le attrazioni dei due centri saranno presentate da $\frac{a^2}{s^2}$, $\frac{b^2}{(l-s)^2}$, essendo a^2 b^2 due coefficienti costanti. La forza che sollecita il punto materiale altro non è che $\frac{b^2}{(l-s)^2} - \frac{a^2}{s^2}$, dunque chiamata φ la forza avremo l'equazione

$$(180)\quad \varphi = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{b^2}{(l-s)^2} - \frac{a^2}{s^2}.$$

equazione del moto. Moltiplicando per $2ds$, si avrà

$$\frac{2.ds.d^2s}{dt^2} = \frac{2b^2}{(1-s)^2}ds - \frac{2a^2}{s^2}ds,$$

di cui l'integrale è la

(181) $\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = \frac{2b^2}{1-s} + \frac{2a^2}{s} + C.$ —

Al determinare la C, figuriamo che al principio del moto sia $s=h$, e $v=k$, vale a dire che il mobile sia distante dal centro A di h colla velocità k; dalla (181) si avrà

(182) $k^2 = \frac{2b^2}{1-h} + \frac{2a^2}{h} + C$, d'onde la

(183) $C = k^2 - \frac{2b^2}{1-h} - \frac{2a^2}{h}$, e quindi l'integrale determinato

(184) $v^2 - k^2 = 2b^2\left(\frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-h}\right) + \frac{2a^2}{}\times\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{h}\right)$. Coll'ajuto di quest'equazione si potrà avere v in funzione dello spazio s, cioè l'espressione della velocità corrispondente allo spazio s. —

§. 153. Si ha un punto G nella retta che unisce i due centri nel quale le due attrazioni sono eguali. Si S, la distanza dal centro A di tal punto G; e perciò $1-S$, sarà la distanza da B. Dalla condiz. che le attrazioni in G esser debbono eguali, si ha

(185) $\frac{b^n}{(l-s_1)^n} = \frac{a^n}{s_1^n}$, e quindi

(186) $\frac{b}{l-s_1} = \pm\frac{a}{s_1}$, ove a e b, si hanno per positivi. Dalla (186) si ottiene la

(187) $s_1 = \pm\frac{al}{b\pm a}$; i segni inferiori e superiori si corrispondono, e però si hanno due valori di s_1 che sono

(188) $s_1 = \frac{al}{b+a}$;

(189) $s_1 = -\frac{al}{b-a}$; contandosi i valori positivi di s_1 da A verso B. — Essendo $a+b > a$, ne conseguita che $\frac{al}{a+b} < al$, e però vi avrà un punto C di minor attrazione fra A e B, il quale per un dato valore di a, si accosterà ad A tanto più quanto b, sarà grande dato un valore di a. Dalla (189) se $b > a$ si ha s_1 negativo, e per conseguenza il punto C cadrà sul prolungamento di AB verso A. Se poi sia $b < a$, si ha la

(190) $s_1 = \frac{al}{m}$, fatto $b-a=-m$; se m fa il punto C cade nel prolungamento di AB dalla parte di B. Se poi

$m > a$, il punto G cade fra A, e B. E' poi evidente che fra A e B esser non vi può che un solo centro di egual attrazione, e che essendo $a > b$ il centro G si deve accostare più a B che ad A. Se poi $a < b$ il centro G si accosta più ad A che a B. Si dovrà dunque concludere che dai valori di s, dati dalle (188) (190) il 1.° appartiene al caso in cui $a < b$, e il 2.° $a > b$ poichè $a+b > b-a$.

Poniamo ora che il punto d'attrazione sia fra A e B, ed il mobile sia animato da una velocità iniziale che tenda ad allontanarlo da A. E' chiaro che tale velocità iniziale tenderà ad essere elisa dalla velocità che produrrebbe l'attrazione di A. Se $v = 0$ in G allora il corpo torna in A. Se poi $v = 0$ dopo G il mobile seguiterà a girare verso B.

§. 656. Per determinare il valore di k per cui il mobile attinga il punto G dove $v = 0$, si dovrà nella (182) supporre $v = 0$, quando $s = \sigma$, il che da-

(191) $-k^2 = 2b^2\left(\frac{1}{1-s_1} - \frac{1}{1-h}\right) + 2a^2\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{h}\right)$
ma si ha l'equazione
(187) $s_1 = \pm\frac{al}{b\pm a}$, dunque fat:
tane sostituzione avremo la
(192) $-k^2 = 2b^2\left(\frac{1}{1\mp\frac{al}{b\pm a}} - \frac{1}{1-h}\right) + 2a^2\left(\frac{b\pm a}{\pm al} - \frac{1}{h}\right)$, dalla quale
traendo il valore di k, si ha
$k = \pm\sqrt{\frac{2b^2}{1-h} + \frac{2a^2}{h} \mp 2\frac{(a\pm b)^2}{l}}$; per
questo valore di k il mo-
bile arrivato in C resterà
in equilibrio, combinando
si il + col − sotto, e viceversa

§. 165. Dalla (181) traendo dt,
si ha
(196) $dt = \frac{\sqrt{h - s^2}\,.\,ds}{\sqrt{2a^2l + (2b^2 - 2a^2 + Cl)s - Cs^2}}$
in generale non si conosce
la maniera d'integrare
quest'equazione benchè
separate. Se fosse la
cond.
(A) $2a^2l + (2b^2 - 2a^2 + Cl)s - Cs^2$
= quadrato l'integrale
si ottiene nel modo seg.
Dovendo (A) essere un
quadrato, dovrà essere
$(2b^2 - 2a^2 + Cl)s = 2\sqrt{-2a^2Cls^2}$,
e però avremo innalz. a quad.
$(2b^2 - 2a^2 + Cl)^2 = -8a^2Cl$, e svi-
luppando il quad., e traendo
si ha

$(182)\ k^2 = \frac{2b^2}{1-h} + \frac{2a^2}{h} + c$

(195) $c = -\frac{2(b^2+a^2)}{1} \pm \sqrt{\frac{4(b^2+a^2)^2 - 4(b^2-a^2)^2}{1}}$,

la quale ridotta si muta nella

(196) $c = -\frac{2(a \pm b)^2}{1}$ che sostituito nella (182) si ha la

(197) $k^2 = \frac{2b^2}{1-h} + \frac{2a^2}{h} - \frac{2(a \mp b)^2}{1}$, e però

(198) $k = \sqrt{\frac{2b^2}{1-h} + \frac{2a^2}{h} - 2(a \pm b)^2}$, si hanno quindi due valori di k per cui la funz.e (A) diventa un quadrato. Fatta sostituzione nella (190) del valore di c dato dalla (196) si trova la

(199) $dt = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{ls - s^2}}{al - (a \pm b)s}\, ds$

che si deve integrare.

Perciò si ponga

(200) $ls - s^2 = s^2 x^2$, e si avranno le due equazioni

(201) $s = \frac{l}{1+x^2}$, e quindi la

(202) $ds = -\frac{2lx\,dx}{(1+x^2)^2}$; fattane sostituzione nella (199), se ne deduce l'equazione

(203) $dt = \left(-\frac{\sqrt{2l^3}}{(a \pm b)^2}\left(\frac{a \mp bx^2}{(1+x^2)^2} \pm \frac{ab}{ax^2 \mp b}\right)dx\right.$

come si verifica facilmente riducendo a denominatore.

Ora $\int \frac{a \mp bx^2}{(1+x^2)^2}dx = \mp \int \frac{b\,dx}{1+x^2} + \int \frac{a \pm b}{(1+x^2)^2}dx$; si ha

$\mp \int \frac{b\,dx}{1+x^2} = \mp b\,A(\tau = x)$

$\int \frac{a\pm b}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(a\pm b)(1-x^2)dx}{2(1+x^2)^2} + \int \frac{(a\pm b)dx}{2(1+x^2)}$

$\int \frac{a\pm b}{(1+x^2)^2} dx = \frac{(a\pm b)x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}(a\pm b)\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{(a\pm b)x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}(a\pm b)A(\sigma = x)$.

Inoltre

$\int \frac{dx}{ax^2-b} = \int \frac{dx}{(x\sqrt{a}-\sqrt{b})(x\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$= \frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\int \frac{dx}{x\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \int \frac{dx}{x\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) =$

$\frac{1}{2\sqrt{ab}}\log(x\sqrt{a}-\sqrt{b}) - \frac{1}{2\sqrt{ab}}\log(x\sqrt{a}+\sqrt{b}) = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\log\frac{x\sqrt{a}-\sqrt{b}}{x\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

Si ha ancora

$\int \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\frac{a}{b}x^2+1}$; posto

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x = u$, si avrà

$dx = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}du$, e però

$\int \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{ab}}A(\sigma = u)$

$= \frac{1}{\sqrt{ab}}A\left(\sigma = \sqrt{\frac{a}{b}}\,x\right)$. Laonde l'integrale della (203) prendasi il segno superiore sarà

(204) $t = -\frac{\sqrt{2l^3}}{(a+b)^2}\left(\frac{\frac{1}{2}(a+b)x}{1+x^2} + \frac{1}{2}(a-b)\right.$

Se si prenda il segno inferiore si avrà

(205) $t = -\frac{\sqrt{el^3}}{(a+b)^2}\left(\frac{\frac{1}{2}(a-b)x}{1-x^2} + \frac{1}{2}(a-b)\right.$

$\left.A(\sigma = x) - \sqrt{ab}\;\sigma\;\sqrt{\frac{a}{b}}x + C_1\right)$;

ma dalla

$x = \sqrt{ls - s^2}$, dunque si ha dalla (204) che dalla (205)

si avrà t in funzione di s. Le costanti C, C_1 da determinare si debbono dietro la cond. che $t=0$, quando $s=h$, il che succede all principio del moto.

S. 156. Determiniamo per ultimo il moto verticale d'un corpo avendo riguardo alla resistenza dell'aria, supposto che una cosiffatta resistenza sia proporzionale al quadrato della velocità. È mestieri il notare due casi:

1° Quello in cui il corpo cada dall'alto al basso.

2° Quello in cui il corpo è spinto dal basso all'alto.

Cominciamo dal 1° caso. Si osservi che la forza continua che agisce sul corpo è la differenza delle due forze che agiscono continuamente sul corpo, l'una in senso contrario dell'altra, e sono la gravità e la resistenza dell'aria. La resistenza dell'aria è una forza variabile e che dipende dalla velocità del mobile; sia mò tale resistenza espressa m un coefficiente costante pel med.° corpo e mezzo, ma varia al variare del corpo e mezzo.

$s(v=\alpha) + \frac{1}{2}\sqrt{ab}\log\frac{x\sqrt{a}-\sqrt{b}}{x\sqrt{a}+\sqrt{b}} + C_1$)

…feriore),

Se il corpo cadesse da considerevole altezza, m cambierebbe altresì in ragione della densità degli strati dell'atmosfera. Ma poniamo che il corpo cada da piccole altezze e che il fluido sia omogeneo ed m costante. Siccome poi la forza di gravità per le piccole distanze è costante, come si è dimostrato al §. 430 sarà g costante; l'equazione dunque del moto sarà la

(206) $\varphi = g - mv^2$; ma dalla (34) che è $\varphi = \frac{dv}{dt}$, paragonando si avrà la

(207) $\frac{dv}{dt} = g - mv^2$; da cui si deduce la

(208) $dt = \frac{dv}{g - mv^2} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{dv}{\sqrt{g} + v\sqrt{m}} + \frac{dv}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}}\right)$ di cui l'integrale è

$t = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\log(\sqrt{g} + v\sqrt{m}) - \log(\sqrt{g} - v\sqrt{m})\right)$; ovvero

(209) $2\sqrt{gm} \cdot t = \log \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{m}}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}}$, non si aggiunge costante arbitraria perchè si suppone che non vi abbia velocità iniziale e il tempo t si conta dal principio del moto, e però $v = 0$, quando $t = 0$.

Dalla (209) passando ai

numeri si deduce la

(210) $e^{-2\sqrt{gm}\,t} = \frac{\sqrt{g}-v\sqrt{m}}{\sqrt{g}+v\sqrt{m}}$; dalla quale traendo il valore di v, si ottiene la

(211) $v=\sqrt{\frac{g}{m}}\cdot\frac{1-e^{-2\sqrt{gm}.t}}{1+e^{-2\sqrt{gm}.t}}$, equazione che in ogni istante fa conoscere la velocità del mobile.

Lezione 93.

la 94. Ripetiz.

A determinare lo spazio passato si ha la

(31) $v=\frac{ds}{dt}$, e però

$ds = v\,dt$; ma la forza continua

$\varphi = \frac{dv}{dt}$, dunque

$dt = \frac{dv}{\varphi}$, e però avremo la

(212) $ds = v\,dt = \frac{v\,dv}{\varphi} = \frac{v\,dv}{g-mv^2}$, ovvero la;

(213) $ds=\frac{1}{g}\cdot\frac{v\,dv}{1-\frac{m}{g}v^2}$, il cui integrale è la

(214) $s = -\frac{1}{g}\,\frac{g}{2m}\log\left(1-\frac{m}{g}v^2\right)$, ovvero

(215) $-2ms = \log\left(1-\frac{m}{g}v^2\right)$; non si aggiunge costante arbitraria poichè si ha $s=0$, quando $v=0$. Dalla (211) si ha

$v^2=\frac{g}{m}\cdot\frac{(1-e^{-2\sqrt{gm}.t})^2}{(1+e^{-2\sqrt{gm}.t})^2}$, dunque

(216) $s=-\frac{1}{2m}\log\left(1-\frac{(1-e^{-2\sqrt{gm}.t})^2}{(1+e^{-2\sqrt{gm}.t})^2}\right)$

e riducendo si ha

$s=-\frac{1}{2m}\left(\log 1-\log\frac{(1+e^{-2\sqrt{gm}\,t})^2}{4e^{-2\sqrt{gm}\,t}}\right)$

ma $\log 1=0$ dunque

(217) $s=\frac{1}{2m}\log\left(\frac{(1+e^{-2\sqrt{gm}\,t})^2}{4e^{-2\sqrt{gm}.t}}\right)$ che dà il valore di s espresso per t.

§. 457. Alla (210) si può dare la forma infrascritta

(218) $\frac{1}{e^{2\sqrt{gm}.t}} = \frac{\sqrt{g} - v\sqrt{m}}{\sqrt{g} + v\sqrt{m}}$; si è ved.° nell' 3.° che $e = 2,718$ --- e però il 1.° membro diminuisce al crescere di t, dimodochè appresso un tempo più o men lungo secondo che $2\sqrt{gm}$ è più o meno piccolo il 1.° membro si può considerare come nullo, e la (218) si cambierà nella

(219) $\sqrt{g} - v\sqrt{m} = 0$, d'onde la

(220) $v = \frac{\sqrt{g}}{m}$; quantità costante.

Dal che conseguita, che il moto di un corpo che cade a traverso un fluido omogeneo di cui la resistenza sia proporzionale al quadrato della velocità il moto tende a diventare uniforme, la qual cosa si ripete dalla resistenza del mezzo che distrugge l'accelerazione.

§. 458. Supposta nulla la resistenza del mezzo, cioè $m = 0$, le due equazioni (210) e (215) debbonsi cambiare in quelle del moto uniformemente accellerato: ma ci apparirà

che quando $m=0$. le due trovate equazioni si verificano per identità di termini; dunque converrà usare di un artifizio particolare per ottenere il cambiamento. Alla (220) si può dare la forma

(221) $(1+e^{-2\sqrt{gm}.t})v\sqrt{m}=(1-e^{-2\sqrt{gm}.t})\sqrt{g}$:

ma la

(222) $e^{-2\sqrt{gm}.t}=1-2\sqrt{gm}.t+\frac{4gm}{2}t^2+\&$

come dall' $\S$. dunque la (221.) si cambia nella

(223) $(1+e^{-2\sqrt{gm}.t})v\sqrt{m}=(2\sqrt{gm}.t-2gmt^2+\&)\sqrt{g}$; egli è patente che il fattore $\sqrt{m}$ è comune, e però dividendo per esso, si ha la

(224) $(1+e^{-2\sqrt{gm}.t})v=(2\sqrt{g}.t-2g\sqrt{m}t^2+\&)\sqrt{g}$

da cui posto $m=0$, si ha $2v=2gt$, ovvero la

(39) $v=gt$ che è l'equazione trovata al $\S$. 432. Si ha poi $\log(1-\frac{m}{g}v^2)=-\frac{mv^2}{g}+\frac{mv^4}{2g^2}+\&)$ come $\S$. per cui dalla (215) si deriva la

(225) $2s=\frac{v^2}{g}+\frac{mv^4}{2g^2}+\&$, da cui posto $m=0$, si ha

$2s=\frac{v^2}{g}$; ma $v=gt$, dunque $v^2=g^2t^2$, e però la

(45) ~~$v=gt$~~ $s=\frac{g}{2}t^2$ come al $\S$. 434.

§. 459. Veniamo ora al 2°. caso, in cui il corpo è spinto verticalmente dal basso all'alto. In tal caso tanto la gravità che la forza resistente del mezzo sono forze ritardatrici, e però si ha la

(226) $\varphi = -g - mv^2$; ma $\varphi = \frac{dv}{dt}$; dunque avremo la

(227) $\frac{dv}{dt} = -g - mv^2$, e però la

(228) $-dt = \frac{dv}{g+mv^2} = \frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{1+\frac{m}{g}v^2}$;

poniamo $\sqrt{\frac{m}{g}} \cdot v = y$, se si avrà

$dv = \sqrt{\frac{g}{m}}\, dy$, onde

$-dt = \frac{1}{g} \cdot \frac{\sqrt{\frac{g}{m}} \cdot dy}{1+y^2} = \frac{1}{\sqrt{mg}} \cdot \frac{dy}{1+y^2}$,

che integrata da la

(229) $-t = \frac{1}{\sqrt{mg}}\, A(\sigma = y) + C =$

$\frac{1}{\sqrt{mg}} \cdot A\left(\sigma = \sqrt{\frac{m}{g}} \cdot v\right) + C$; ovvero

avremo la

(230) $-\sqrt{mg} \cdot t = A\left(\sigma = \sqrt{\frac{m}{g}} \cdot v\right) + C$;

per determinare C si ha la velocità di projezione, e contando che il tempo abbia principio del moto dovrà essere $t = 0$, quando $v = a$, onde dalla (230) si ha

$A\left(\sigma = \sqrt{\frac{m}{g}} \cdot a\right) + C = 0$, e quindi la

(231) $C = -A\left(\sigma = \sqrt{\frac{m}{g}} \cdot a\right)$; donde si ha la

(232) $\sqrt{gm} \cdot t = A\left(\sigma = \sqrt{\frac{m}{g}} \cdot a\right) - A\left(\sigma = \sqrt{\frac{m}{g}}\right.$

integrale determinato che

mette davanti una relazio-
ne fra q e v. Dalle due
equazioni $v = \frac{ds}{dt}$, $q = \frac{dv}{dt}$
si deduce $ds = \frac{v\,dv}{g + mv^2}$ di cui
l'integrale è la

(233) $s = -\frac{1}{2m}\log(g+mv^2) + C_1$; a de-
terminare C_1, si ha $s=0$, quan-
do $v=a$; e però la

(234) $C_1 = \frac{1}{2m}\log(g+ma^2)$, e quindi
l'integrale determinato

(235) $2ms = \log\left(\frac{g+ma^2}{g+mv^2}\right)$. Vedremo
in seguito che m è in ragion
reciproca della densità del
corpo. Per conoscere la mas-
sima altezza alla quale può
il corpo innalzarsi in virtù della velocità
di projezione, è d'uopo osser-
vare che ivi $v=0$. Dalla
(235.) avremo dunque la

(236.) $h = \frac{1}{2m}\log\left(1+\frac{m}{g}a^2\right)$. Da que-
sta rendesi aperto che l'al-
tezza h è tanto più gran-
de quanto più piccolo è m,
essendo pari le altre cir-
costanze, e però i corpi
più densi salgono a mag-
giori altezze.

§. 260. Il problema risoluto sul mo-
to di un corpo in un mezzo
resistente comprende pure la
discesa dei gravi lungo un pia-
no inclinato, e ciò si farà po-
nendo in luogo di g, $\frac{gh}{l}$ come al §. 226.

Se il piano fosse orizzontale esser dee $g=0$; ma invece di dedurre la soluzione dal caso generale torna in acconcio il farla pel piano inclinato. La (207) quando $g=0$ si riduce alla

(237) $\frac{dv}{dt}=-mv^2$, d'onde la

(238) $-dt=\frac{dv}{mv^2}$, di cui l'integrale è la

(239) $t=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{v}+C_2$. Anche qui la C_2 si debbe determinare dalla cond.e che a $v=a$, $t=0$ corrisponda, dalle quali si ha

(240) $C_2=-\frac{1}{ma}$, e però si avrà l'integrale determinato

(241) $t=\frac{1}{mv}-\frac{1}{ma}$: d'onde la

(242) $v=\frac{a}{1+amt}$: si ha poi

$ds=vdt=\frac{adt}{1+amt}$, di cui l'integrale è

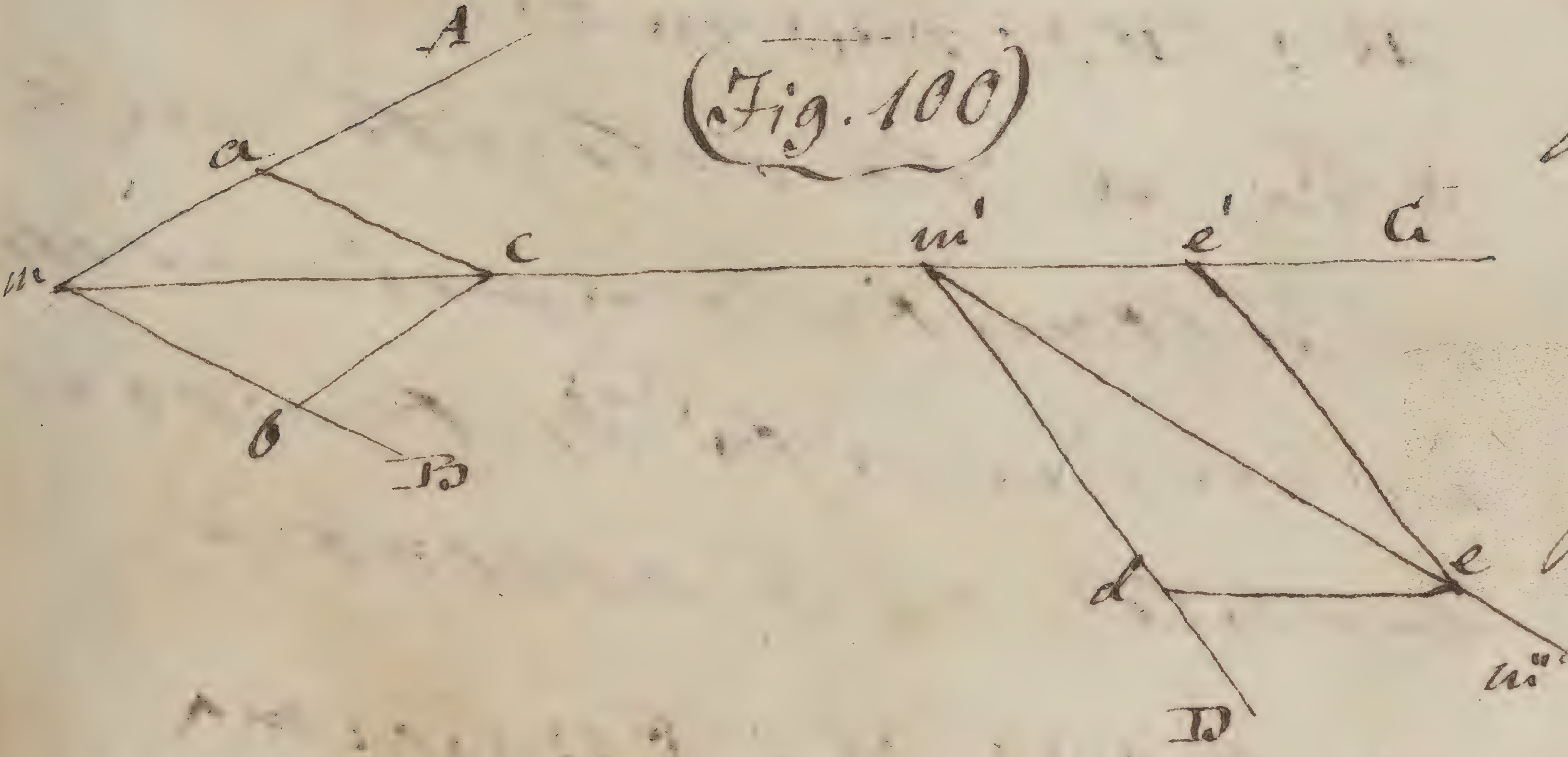
(243) $s=\frac{1}{m}\log(1+amt)$; non si aggiunge costante arbitraria perchè ad $t=0$, $s=0$. Dalla (243) si vede che la velocità del corpo diminuisce continuamente, e che dopo un certo dato tempo egli è giunto di così fatta guisa che l'attrito arriva tali forze a distruggere —

Capitolo XXXV.°

Del moto curvilineo di un punto materiale

§. 261. Il moto di un punto materiale che non si fa in linea retta è necessariam.te prodotto da più forze che sollecitano il punto in direzioni diverse.(a) Prenderemo quindi in considerazione un punto materiale al tutto libero, e che si possa movere in una linea o una superficie qualunque.

(a) ed in diff.ti tempi.



(Fig. 100)

Sia il punto materiale m (fig. 100) sollecitato da due forze istantanee F, F' le cui direzioni sieno mA, mB.

Poniamo che ma, mb figurino le velocità che le due forze F, F' imprimerebbero al mobile se ciascuna di esse agisse separatamente, di guisa che ma sia lo spazio che passerebbe in un'unità di tempo ubbidendo alla sola F, ed mb, lo spazio che passerebbe nella stessa unità di tempo ubbidendo alla sola F'. Sulle mb, ma costruito il parallelogrammo macb, il punto m, passerà nell'unità di tempo la diagonale mc, poichè le velocità si compongono come le forze, ubbidendo alla con-

quali
nella

temporanea azione delle P. P', o della loro risultante. Ciò si conferma nel modo seguente.

Poichè le forze sono proporzionali alle velocità da loro prodotte, si avrà

P : P' :: ma : mb; e perchè risultante R delle P. P' è presentata dalla mc diagonale del parallelogrammo macb; si ha poi

R : P :: mc : ma.

Sia x la velocità che la risultante imprimerebbe in un'unità di tempo al mobile, e si avrebbe

x : ma :: R : P :: mc : ma

Sostituendo all'azione delle P, P' l'azione della loro risultante R, il punto materiale verrà animato da una velocità espressa da mc, e nella direzione di questa diagonale. Perchè qualcosa fra chi nessuna novella forza agisca sul punto m, esso si moverà di moto uniforme sopra la retta che è la diagonale mc, prolungata, e ad ogni unità di tempo passerà una porzione della retta mc, che sarà = mc :

su ciascun punto della mc,
sarà il mobile nello stesso
stato che la R agisce su di
lui e gli imprimesse la
velocità espressa da mc.

§. 462. Supponiamo che il mobile
sia arrivato in m'; punto
della mc; arrivato in questo
punto una forza istantanea
R' vi sia applicata in una
direzione qualunque che sia
m'D; e presentiamo per m'd,
la velocità che la forza
R' imprimerebbe al mobile
se fermo lo sollecitasse: in
tale supposiz. il mobile
si trova nello stesso caso
che se nel punto m' fosse
sollecitato dalle forze R,
ed R', laonde si avrà la
velocità e la direzione del
mobile prendendo m'c'=mc,
e compiuto il parallelogram.
mo m'c'ed, la diagonale di
lui m'e sarà in direzione
ed in intensione la velocità
cercata. Della
stessa guisa si supponesse
che omessa applicata al mo-
bile una novella forza
istantanea allorchè il mo-
bile è arrivato in m'' della
sua nuova direzione, l'azio-
ne di questa nuova forza
gli farà cambiare dire-
zione, e la sua direzione

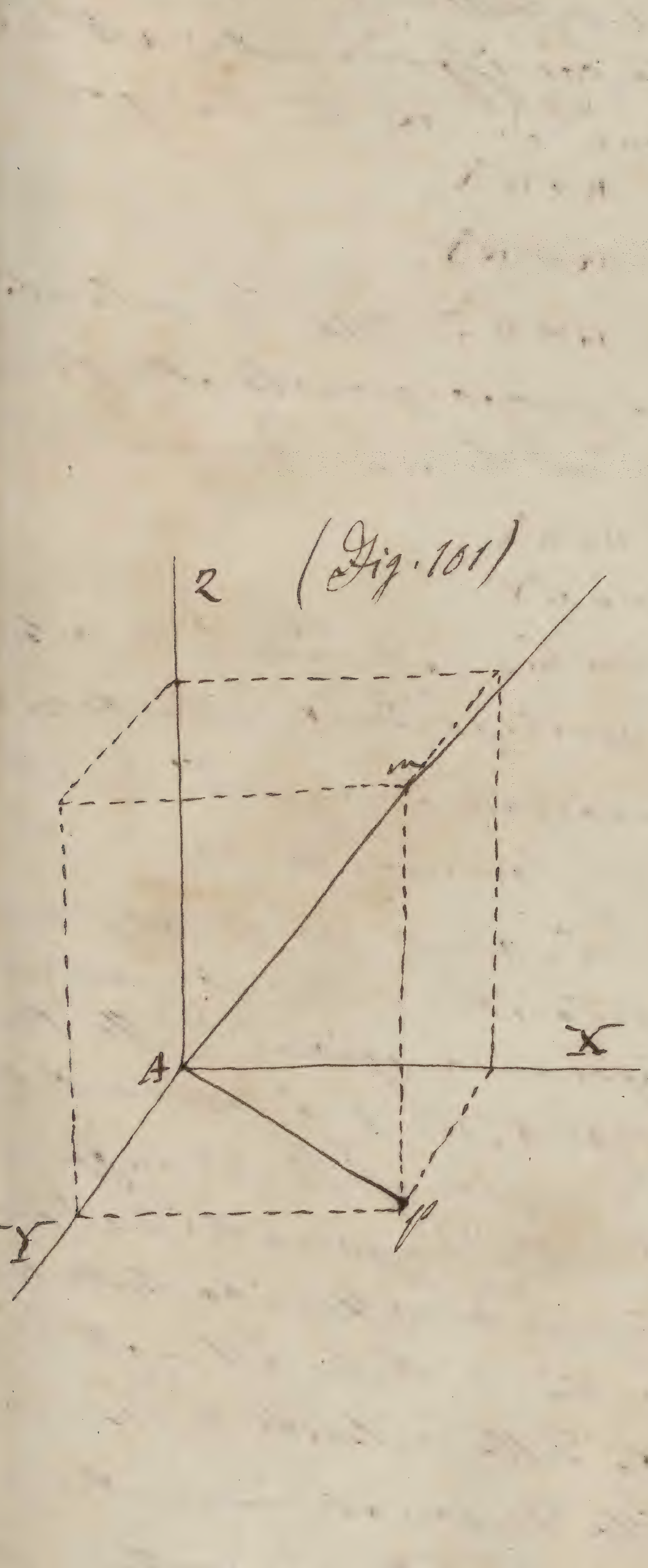
ed intensione ovvero determinata come la m'l. —
In generale è manifesto che quante forze si vogliono R, R', R''... R⁽ⁿ⁾ che agiscono a tempi diversi sul mobile esso passerà un poligono del quale sarà facile descrivere i lati. Ciascun lato sarà passato con moto uniforme e velocità costante, ma variabile da un lato all'altro. Il 1.º lato sarà passato colla velocità dovuta ad R; il 2.º colla velocità dovuta alla risultante delle due R, R', così il 3.º con quella delle R, R', R'' ec.
Quindi è aperto che a misura che i lassi di tempi che separano le azioni delle forze R, R', R'' ec. diminuiscono, il poligono passato dal ~~poligono~~ mobile si accosterà ad una curva continua. —
Il dettato mette davanti come da un moto rettilineo si passi al curvilineo. Nel caso che le forze istantanee R, F, F' ~~ec.~~ agiscono contemporaneamente o a lassi di tempi separati, ma nella stessa direzione,

il mobile non descriverà un poligono ma una retta, e la velocità totale sarebbe eguale alla somma delle velocità parziali. — Se ve ne fossero che agissero in senso contrario la differenza. ——

Lezione 95.

§. 163. Il metodo il più semplice per determinare il moto di un punto materiale nello spazio è di assegnare in ciascun istante la posizione delle projezioni di lui sopra tre assi dati di situazione. Così fatte projezioni rappresentare possono tre punti mobili che tengono dietro al punto materiale nel suo movimento, ed allora la quistione si riduce a trovare la legge di quei tre movimenti rettilinei. ——

(Fig. 101)



Sia A (fig. 101.) il punto da cui si comincia a muovere il punto materiale. Per A si protraggano i tre assi AX, AY, AZ fissi ed ortogonali, e poniamo che siano contemporaneamente applicate al mobile quando è in A delle forze istantanee in qualunque direzione ed intensione. Quali siansi il N.° di così fatte forze, ridurre si possono a tre dirette secondo i tre assi. Presentiamo le forze per

A, B, C, secondo gli assi delle x, y, z, e per a, b, c, le velocità che imprimerebbero al mobile le forze A, B, C se fossero sole nelle direzioni di AX, AY, AZ. ———

Il punto materiale dovendo obbidire all'azione contemporanea delle tre forze esso si moverà nella direz.e della loro risultante R colla velocità corrispondente all'intensione di R. Si ha poi

(1.) $A = R \cos R\hat{X}$,

(2.) $B = R \cos R\hat{Y}$,

(3.) $C = R \cos R\hat{Z}$. Ma le velocità sono proporzionali alle forze come al S. 11. dunque la

(4.) $a = v \cos R\hat{X}$,

(5.) $b = v \cos R\hat{Y}$,

(6.) $c = v \cos R\hat{Z}$, essendo v la velocità corrispondente alla forza R. Innalzando a quad.o le (4)(5) la (6) e sommando si ha, la

(7.) $v^2 = a^2 + b^2 + c^2$, e di conseguenza la velocità v dovuta alla contemporanea azione delle tre forze A, B, C è presentata in direzione ed in intensione dalla diagonale del parallelepipedo costruito sulle tre velocità, a, b, c. Il mobile in virtù della velocità v, descriverà sulla diagonale in un tempo qualunque t, una retta = vt.

poichè essendo ~~le~~ forze istantanee il moto è uniforme, si ha $s=vt$, come al §. 169.

Le projezioni di questa retta sugli assi AX, AY, AZ sono: $vt.\cos\hat{X}$, $vt\cos\hat{Y}$, $vt\cos\hat{Z}$: ovvero a cagione delle (b) (c) e (d) sono at, bt, ct; d'onde derivasi, „che le projezioni del ~~[illegible]~~ mobile sugli assi ortogonali
„si muovono uniformemente
„sugli assi medesimi colle ve-
„locità a, b, c nel mentre che
„il mobile si muove uniforme-
„mente nello spazio colla
„velocità v risultante delle
„a, b, c."

§. 172. Poniamo che alla fine del tempo t, nuove forze istantanee agiscano sul punto materiale, le componenti delle quali parallele agli assi ortogonali AX, AY, AZ, sieno A_1, B_1, C_1, e a_1, b_1, c_1 sieno le corrispondenti velocità che ciascheduna di queste forze originerebbe nella sua direzione se essa agisse sola sul mobile in riposo. In tale caso il mobile si trova nello stesso stato che se fosse fermo e fosse sollecitato dalle forze A, B, C, A_1, B_1, C_1, ovveramente solo dalle tre $A+A_1$, $B+B_1$, $C+C_1$:

rispettivamente parallele agli assi coord.i ortogonali AX, AY, AZ; alle quali forze corrispondono le velocità $a+a_1$, $b+b_1$, $c+c_1$, poichè alla somma delle forze nelle stesse direzioni, agenti nello stesso senso, corrisponde la somma delle velocità da loro prodotte risultante. Detta v_1 la velocità da cui esser debbe animato il mobile, si avrà

(8.) $$v_1^2=(a+a_1)^2+(b+b_1)^2+(c+c_1)^2.$$

I cosini degl'angoli che la direzione della velocità v_1 fa con gli assi AX, AY, AZ, sono rispett.te rappresentati da

$$\frac{a+a_1}{v_1},\ \frac{b+b_1}{v_1},\ \frac{c+c_1}{v_1}.$$ Durante un'altro tempo t_1 che immediatamente consegue il tempo t, le projezioni del mobile sugli assi percorsi sono gli spazj $(a+a_1)t_1$, $(b+b_1)t_1$, $(c+c_1)t_1$, e di conseguenza alla fine del tempo $t+t_1$ le distanze delle prefate projezioni dal punto A saranno

$at+(a+a_1)t_1$; $bt+(b+b_1)t_1$, $ct+(c+c_1)t_1$.

Applichiamo ancora al

punto materiale alla fine del tempo t_1 delle nuove forze di cui le componenti parallele agli assi sieno rispettiv. A_1, B_1, C_1 alle quali corrispondono le velocità a_1, b_1, c_1. Con un ragionamento simile al precedente, si avrà che le projezioni sugli assi saranno

$(a+a_1+a_2)t_2$, $(b+b_1+b_2)t_2$ $(c+c_1+c_2)t_2$

di guisa che alla fine del tempo $t+t_1+t_2$ codeste projezioni si troveranno a distanze dal punto A, eguali ad

$at+(a+a_1)t_1+(a+a_1+a_2)t_2$,

$bt+(b+b_1)t_1+(b+b_1+b_2)t_2$,

$ct+(c+c_1)t_1+(c+c_1+c_2)t_2$.—

Continuando nello stesso modo, e considerando i tempi successivi t_3, t_4 ... t_m, e sieno $A_{(m)}$, $B_{(m)}$, $C_{(m)}$ le componenti parallele agli assi AX, AY, AZ delle forze applicate al punto materiale al principio del tempo $t_{(m)}$. Sieno $a_{(m)}$, $b_{(m)}$, $c_{(m)}$ le velocità corrispondenti; ed x, y, z gli spazj passati dalle projezioni del punto materiale sugli assi AX, AY, AZ dal principio di t al fine di $t_{(m)}$, e si avrà

(9) $x = at + (a+a_1)t_1 + (a+a_1+a_2)t_2$
$+ \cdots\cdots + (a+a_1+\cdots+a_{(n)})t_{(n)}$

(10) $y = bt + (b+b_1)t_1 + (b+b_1+b_2)t_2$
$+ \cdots\cdots + (b+b_1+\cdots+b_{(n)})t_{(n)}$

(11) $z = ct + (c+c_1)t_1 + (c+c_1+c_2)t_2$
$+ \cdots\cdots + (c+c_1+c_2+\cdots+c_{(n)})t_{(n)}$

ove x, y, z sono le coord.^{e} del punto materiale nello spazio, mediante delle quali si determina la posizione del punto materiale nello spazio senza costruire il poligono che descrive il corpo.

§. 165. I valori di x, y, z mandano aperto, che lo spazio passato dalla projezione del mobile sugli assi ortogonali non dipende che dalle velocità che produrrebbero le forze parallele agli assi stessi se agissero sole sul mobile, ~~in modo che tale~~ spazio non è modificato dall'azione delle altre forze. Così per y e z.

Essi ~~ess~~ ottenuti risultamenti sono indipendenti dai lassi di tempo $t, t_1, t_2 \cdots t_{(n)}$ che separano le azioni di forze successivam.^{e} applicate al mobile, come pure dalla grandezza di velocità applicate al mobile.

Quindi supporre potremo che i prefati lassi di tempo siano (a) indeterminatamente piccoli, cioè supporre si può che sia animato da una forza continua e da una istantanea. Dovremo dunque concludere, che se le forze qualunque che producono il moto ~~retti~~ curvilineo di un punto materiale si compongano in tre parallele agli assi e si considerino le projezioni come tre punti mobili, il movimento delle projezioni su ciascun asse sarà dovuto alle forze parallele all'asse stesso, e sarà lo stesso se le altre forze fossero nulle. In ciascun caso si determinerà tale moto dietro le date equazioni; e perciò qualunque moto curvilineo si riduce alla considerazione di moti rettilinei o di soli due quando siasi certo dalla natura della quistione che il mobile debba per tutto il movimento rimanere sullo stesso piano poichè allora il moto si riferisce a due assi.

(a) tutti, o in parte.

---

§. 166. Poniamo ora il caso per cui chiarire del moto di un punto materiale pesante

animato dalla gravità, al quale s'imprima una forza diretta secondo una linea orizzontale. Egli è aperto che il mobile sarà sempre sopra un piano verticale per cui passa la orizzontale che è la direzione della velocità.(a) Inoltre, fatta astrazione dalla gravità, affine di determinare il movimento di projezione sulla retta si vede che esso sarà uniforme e dovuto alla data velocità. Se tal moto fosse nullo si vede che il moto sulla verticale sarebbe uniformemente accelerato, dunque in virtù del teorema dimostrato l'un moto non deve disturbar l'altro, e di conseguenza la curva descritta dal mobile sarà tale che le ascisse orizzontali cresceranno secondo il tempo, e le ordinate secondo i quadrati dei tempi come si ha dal moto accelerato, e però la curva descritta sarà una parabola avente l'origine sul punto di partenza l'asse maggiore verticale, ed il parametro dipend. dalla relaz. fra le velocità e gravità —

(a) perchè le forze che producono il moto sono in un piano verticale —

§. 467. Cerchiamo ora le equazi. differ. del moto curvilineo di un punto materiale soggetto all'azione di una o più forze continue e di una istantanea che gli communica una velocità finita.

Dopo un tempo t, sieno x, y, z le tre coord.° ortogonali del punto riferite ai tre assi AX, AY, AZ, le quali saranno funzioni di t. Scomposta ciascuna forza continua sollecitante il punto materiale in 3 rispett.° parallele ai tre assi coord., e sieno X, Y, Z, la somma delle componenti parallele agli assi delle x, y, z corrispondentemente. Le quantità X, Y, Z, saranno date in ciascun caso particolare in funzione di x, y, z, e si dovranno considerare positive o negative secondoche tendono ad accrescere o diminuire la velocità del mobile. Abbiamo di già dimostrato, il moto della projezione su ciascuno di gli assi, è dovuto alle sole forze parallele all'asse stesso; ma al §. 449. abbiamo veduto che ha luogo in generale la

$\varphi = \frac{d^2s}{dt^2}$. dunque in questa a vece di s, sostituiremo

x, y, z avremo le tre equazioni del moto, cioè avremo

(12) $X = \frac{d^2x}{dt^2}$,

(13) $Y = \frac{d^2y}{dt^2}$,

(14) $Z = \frac{d^2z}{dt^2}$.

La velocità iniziale del mobile non entra per nulla in queste equazioni, ma questa velocità, la sua direzione e la posizione del punto materiale all'origine del moto servono a determinare le costanti arbitrarie che rendono completi gl'integrali delle equazioni (12) (13) e (14) che sono 6 di numero perchè ciascuna delle (12) – è di 2.° ordine.

La completa soluzione di ciascun caso particolare domanda adunque che s'integrino le tre trovate equazioni, e dipoi si determinino le 6 costanti arbitrarie dietro le condizioni iniziali del moto.

Quando poi si sa che il corpo restar debba su di un dato piano in tutto il suo moto, si renderà più semplice la questione prendendo il piano per uno dei coordinati ad es. il (x, y) =0; in tal caso si ha z = 0, ed allora

la quistione non dipende che dalla (12) e (13).

In generale, ottenuti gl'integrali delle (12) (13) e (14) si avranno i valori di x, y, z, t per mezzo delle quali eliminato t resteranno 2 equazioni contenenti x, y, z che rappresenteranno due superficie, dall'intersecazione delle quali viene determinata la linea descritta nello spazio dal punto materiale che in generale sarà a doppia curvatura e che dicesi *trajettoria* del mobile.

§. 463. Il caso il più semplice che presentare si possa è quello in cui $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ cioè che il punto sia animato da una sola forza istantanea. In tal caso le (12) (13) e (14) si riducono alle

(15) $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

(16) $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$

(17) $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$ di cui gl'integrali completi sono

(18) $x = at + a_1$

(19) $y = bt + b_1$

(20) $z = ct + c_1$, essendo a, a_1, b, b_1, c, c_1 le sei costanti arbitrarie.

Posto l'origine delle coord.e nel punto ove parte il mobile, e che il tempo abbia il principio nell'istante della partenza, sarà all'origine quando $t=0$ $x=0$, $y=0$, $z=0$, e però $a_1=0$, $b_1=0$, $c_1=0$; il che riduce le (18), (19), e (20) alle

(21) $x=at$,

(22) $y=bt$,

(23) $z=ct$: dalle quali si ha

(24) $t=\frac{z}{c}$ valore che messo nelle (21) (22) ci dà

(25) $x=\frac{az}{c}$,

(26) $y=\frac{bz}{c}$ che mostrano la trajettoria essere una retta (a). Sia u la porzione di questa retta compresa fra l'origine e il punto (x, y, z), e si avrà

(27) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=t\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; conviene adunque dobbiamo dire uniforme il moto del punto materiale nello spazio, poichè la (27) ci fa vedere essere lo spazio proporzionale al tempo.

Le (21) (22) e (23) ci mostrano essere uniforme altresì il moto delle projezioni sui tre assi coordinati. —

La velocità del mobile nello spazio è $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, e le velocità delle projezioni sugli assi delle x, y, z, sono rispettivamente a, b, c. —

(a) poichè le (25) e (26) sono le equazioni di due rette, e rappresentano le projezioni di una retta obiettiva sui piani coord.i (x, z). (y, z).

In generale, la velocità della projezione di un punto materiale su di una retta chiamasi velocità di questo punto scomposta secondo la retta, ed a, b, c le componenti della velocità, e $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ secondo i tre assi, e reciprocamente $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ è la risultante delle velocità.
Pongasi $v=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ e suppongasi che v rappresenti anche in direzione una costante velocità, ed osservando che x, y, z sono le projezioni di u sui tre assi coord. si avranno le

(28) $x=u.\cos v\hat{X}$,
(29) $y=u.\cos v\hat{Y}$
(30) $z=u.\cos v\hat{Z}$: ma $x=at$, $y=bt$, $z=ct$, ed $u=t\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, dunque
(31) $a=v\cos v\hat{X}$,
(32) $b=v\cos v\hat{Y}$,
(33) $c=v\cos v\hat{Z}$. Queste equazioni combinano esattamente con le trovate come esser deve poichè le forze sono proporzionali alle velocità prodotte nell'unità di tempo.

Lezione 96.

§. 169. Riprendiamo il caso generale ove X, Y, Z sono forze continue date. Se ad una data epoca del moto si supponga che le forze vengano a cessare, il moto sopra ciascun asse diventerà uniforme, e le velocità sugli assi delle x, delle y, e delle z, saranno $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, e però il moto del punto si cambierà

in moto rettilineo ed uniforme. Sia v la velocità di questo moto; si ha $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$; $v=\frac{ds}{dt}$, dunque

$v=\sqrt{\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}}$; dalle (31) (32) e (33) si trae

(34) $v \cos \widehat{vX} = \frac{dx}{dt}$,

(35) $v \cos \widehat{vY} = \frac{dy}{dt}$,

(36) $v \cos \widehat{vZ} = \frac{dz}{dt}$; ma $v=\frac{ds}{dt}$, dunque avremo le tre seguenti

$\frac{ds}{dt}\cdot \cos \widehat{vX} = \frac{dx}{dt}$,

$\frac{ds}{dt} \cos \widehat{vY} = \frac{dy}{dt}$,

$\frac{ds}{dt} \cos \widehat{vZ} = \frac{dz}{dt}$, ovvero le

(37) $\cos \widehat{vX} = \frac{dx}{ds}$,

(38) $\cos \widehat{vY} = \frac{dy}{ds}$,

(39) $\cos \widehat{vZ} = \frac{dz}{ds}$: ma $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, sono i coseni degli angoli che fa la tangente di una curva nel punto (x, y, z) cogli assi coordinati ortogonali delle x, y, z rispett.$^{\text{o}}$ Dunque la direzione della velocità v coincide colla direzione della tangente. Dal che rendesi aperto, che „se d'improvviso cessino le forze conti„nue che agiscono sul pun„to materiale, il punto segui„terebbe a muoversi nella dir.

"zione della tangente la traje-
"toria con una velocità eguale
"all'elemento della curva di-
"viso per l'elemento del tempo.

§. 270. Un ragionamento semplicis-
simo conduce alle med.e conse-
guenze.

Qualunque sia il moto di
un punto materiale che de-
scrive una trajettoria, si può
considerare la trajettoria com-
posta di un n.o indeterm.e
grande di elementi indeter-
m.e piccoli, cioè considerarla
un poligono di latercoli
saranno passati con moto
uniforme; la velocità adun-
que del punto materiale
finchè resta sull'elemento
della curva o lato del poligo-
no eguaglia la lunghezza
del lato diviso pel tempusc-
lo indeterm.e piccolo che im-
piega a passarlo. Laonde
se sopprimessi per un istante
le forze continue che agi-
scono sul punto, per l'iner-
zia esso seguiterà a mover-
si nel prolungamento di
questo lattercolo che è nella
direzione della tangente
la trajettoria in quel punto.
Il punto materiale scorre-
rà adunque sulla tangen-
te con una velocità precisam-

tata da $\frac{ds}{dt}$.

§. 171. Nel moto curvilineo allor chè dicesi velocità del mobile in un istante qualunque s'intende la velocità del moto rettilineo ed uniforme che avrebbe luogo se in tale istante le forze che rendono curvilineo e fanno variare il movimento cessassero improvvisamente. Nel moto curvilineo la velocità in un istante qualunque è $=\frac{ds}{dt}$, ed ha la direzione della tangente la trajettoria in quel punto medi:

La variabile s è una funzione del tempo laquale mette davanti lo spazio passato dal mobile in quel dato tempo; laonde ass. rive si può che " nel moto " curvilineo come nel ret- " tilineo la velocità eguaglia " la derivata dello spazio di- " visa per quella del tempo.

Per avere la forza conti. una scomposta secondo la tangente la trajettoria è d'uopo prendere le componenti secondo la tangente delle forze X, Y, Z. — Ma $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, sono

i coseni degl' angoli che fa la tangente coi tre assi dunque le componenti saranno

$X\frac{dx}{ds}$, $Y\frac{dy}{ds}$, $Z\frac{dz}{ds}$. —

La somma di cosiffatte componenti sarà

$\frac{Xdx+Ydy+Zdz}{ds}$, ossia per le (12) (13) e (14) sarà

$\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dsdt^2}$; ma si ha

$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$, dunque prend.° il diff.°

$dsd^2s=dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z$

onde la forza continua del mobile scomposta secondo la tangente sarà

$\frac{dsd^2s}{dsdt^2}=\frac{d^2s}{dt^2}$. Il che mostra che nel moto curvilineo la forza secondo la tangente eguaglia la seconda derivata dello spazio considerato funzione del tempo conforme al trovato al §. 129 pel moto rettilineo —

(12) $X=\frac{d^2x}{dt^2}$

(13) $Y=\frac{d^2y}{dt^2}$

(14) $Z=\frac{d^2z}{dt^2}$

§. 272. Determiniamo ora la velocità $v=\frac{ds^2}{dt^2}$, per le (12.) (13.) e (14.) —

Moltiplicando le (12) (13) e (14) per $2dx$, $2dy$, $2dz$, e sommati i prodotti si avrà

$2(Xdx+Ydy+Zdz)=$

$\frac{2dxd^2x+2dyd^2y+2dzd^2z}{dt^2}$; ma si ha $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$,

e perciò,

$$d.ds^2 = 2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y + 2dz\,d^2z,$$

e però

$$d\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y + 2dz\,d^2z}{dt^2},$$

e quindi avremo la

(10) $d\frac{ds^2}{dt^2} = 2(X dx + Y dy + Z dz)$ ed

integrando la

(11) $\frac{ds^2}{dt^2} = C + 2\int(X dx + Y dy + Z dz)$

Allorchè $X dx + Y dy + Z dz$ è differenziale esatto di una funzione di x, y, z, la equazione (11) dà la velocità del mobile in un punto qualunque della trajettoria, purchè si conosca così fatta velocità in un determinato punto, per poter determinare C.

Infatti supposto che $X dx + Y dy + Z dz$ sia un differenziale esatto si potrà ottenere il suo integrale, e si avrà

(12) $\int(X dx + Y dy + Z dz) = f(x, y, z)$

e quindi avremo la equazione

(13) $\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = C + 2f(x, y, z)$;

Poniamo che la velocità sia A nel punto che corrisponde alle coordinate $x = a$, $y = b$, $z = c$; a determinare la C avremo la equazione

(24) $A^2 = G + f(a,b,c)$, da cui
$G = A^2 - f(a,b,c)$ e di conseguenza l'integrale determinato sarà

(25) $v^2 = A^2 + 2f(x,y,z) - 2f(a,b,c)$ che darà il valore di v, velocità corrispondente al punto a, b, c &.

Le condizioni che debbono aver luogo perchè la funzione sia un diff.le esatto sono

$$\left(\frac{dX}{dy}\right) = \left(\frac{dY}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{dX}{dz}\right) = \left(\frac{dZ}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{dY}{dz}\right) = \left(\frac{dZ}{dy}\right).$$

Sufficit.e §. 173. Poniamo che tutte le forze continue che sollecitano il punto materiale sieno dirette verso centri fissi, essendo l'intensione di ciascuna forza una funzione della distanza fra il punto materiale ~~della forza~~ e il centro d'attrazione.

Sia T l'intensione di una forza, e supponiamo che sia diretta verso un centro fisso di cui l, m, n sono le coord. el quale sia distante della quantità f dal punto di sua applicaz.e (x, y, z); la f mette davanti a dunque la porzione di T compresa ~~fra~~ da tale distanza, e si avrà la

(46) $f^2=(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2$; i coseni degli angoli che la direzione di F fa cogli assi delle x, y, z sono d.°

$\frac{x-l}{f}$, $\frac{y-m}{f}$, $\frac{z-n}{f}$, e di conseguenza le componenti di F parallele agli assi medesimi saranno

$\frac{x-l}{f}F$, $\frac{y-m}{f}F$, $\frac{z-n}{f}F$: ma dalla (46.) deducesi la

(47.) $f=\sqrt{(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2}$, dunque avremo la

(48) $df=\frac{x-l}{f}dx+\frac{y-m}{f}dy+\frac{z-n}{f}dz$, e però avremo la

(49.) $Fdf=\frac{x-l}{f}Fdx+\frac{y-m}{f}Fdy+\frac{(z-n)}{f}Fdz$, laonde Fdf, è la porzione del valore di $Xdx+Ydy+Zdz$ che origina dalla forza F. Se dunque abbiasi un N.° di forze continue F, F', F'', F''' ec., le quali sieno dirette verso punti fissi, di cui le distanze variabili siano, f, f', f'', f''' ec., per ciascheduna di q.te forze si avrà un espressione simile alla (49); la somma di tutte queste porzioni dovrà eguagliare $Xdx+Ydy+Zdz$

dunque avremo la

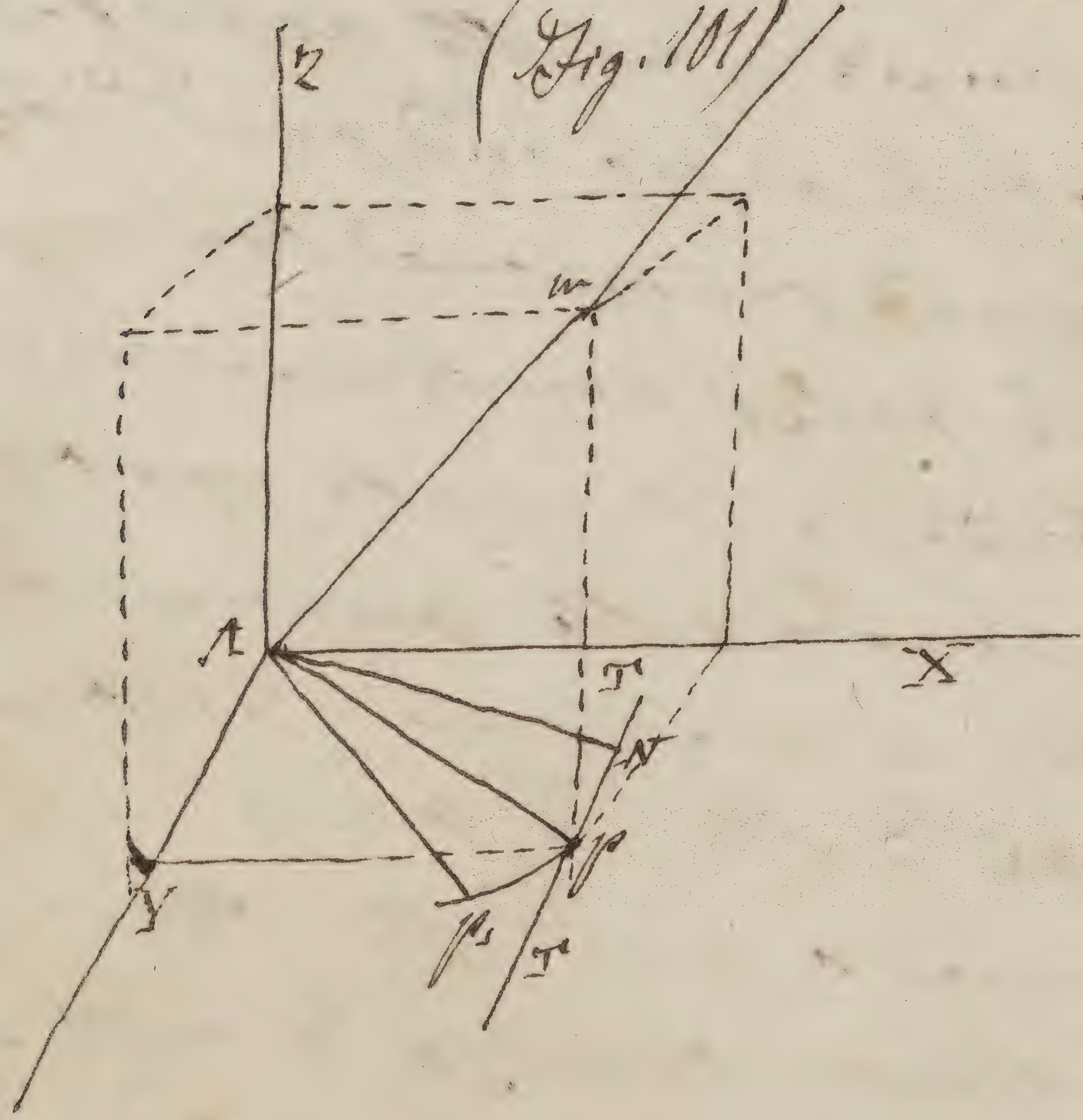
(50) $Xdx + Ydy + Zdz = F'df + F''df' + F'''df'' + \ldots$ ec. La F' è funz.e per ipotesi di f, F'' è funz.e di f', e così di F''' ec. dunque il 2.° membro della (50) si compone di differenziali esatti e però dovrà essere diff.le esatto il primo ossia $Xdx + Ydy + Zdz$ sarà differenziale esatto nelle fatte ipotesi, e ciò indipend.e da alcuna relazione fra x, y, z; se le forze continue che sollecitano il punto materiale siano dirette verso centri fissi, e ciascuna sia funzione della distanza. Se una o più delle forze continue fossero dirette a centri mobili, le coord.e di questi ~~...~~ centri mobili sarebbero variabili. Supponiamo che l, m, n siano variabili, allora la funzione $Xdx + Ydy + Zdz$ non sarà più diff.le esatto nella (49). —

Allorchè $Xdx + Ydy + Zdz$ è differenziale esatto, la (45) dà la

(51) $v^2 - A^2 = 2f(x, y, z) - 2f(a, b, c)$; cioè
„ la diff.za dei quadrati della
„ velocità in due diversi pun-
„ ti della trajettoria, senza

che sia necessario il conoscere la curva passata dal mobile passando il mobile da un punto all'altro.

§. 274. Allorchè il punto materiale è sollecitato da una forza costante sola diretta verso un centro fisso si ottengono immediatamente tre integrali di 1.° ordine delle (12) (13) (14). (Fig. 101).



(Fig. 101)

Sia il centro fisso in A origine delle coord.e ortogonali. In una posizione qualunque del punto materiale, e la retta Am l'intensione di una forza a lui applicata. Costruito il parallelepipedo di cui Am è la diagonale e che abbia i tre ~~tre~~ lati che terminano in A sui tre assi ortogonali, egli è patente che i fatti lati saranno le coord.e di m. Le forze X, Y, Z, che sono le componenti di Am vengono presentate da x, y, z, e di conseguenza avremo

X : Y : Z :: x : y : z, e però le

(52) $xY = yX$,

(53) $zX = xZ$,

(54) $yZ = zY$; si moltiplichi la

(13.) $Y = \frac{d^2y}{dt^2}$, per x; la

(12) $X=\frac{d^2x}{dt^2}$, per y i ~~...~~

(14) $Z=\frac{d^2z}{dt^2}$ ~~(14) $Z=\frac{d^2z}{dt^2}$ per~~ dipoi la

(13) si moltiplichi per z, e la

(14) per y, e le differenze dei

prodotti daranno le infrascritte

equazioni

(55) $xd^2y-yd^2x=(xY-yX)dt^2$;

(56) $zd^2x-xd^2z=(zX-xZ)dt^2$;

(57) $yd^2z-zd^2y=(yZ-zY)dt^2$.

Ma in virtù delle (52)(53) e

(54) i secondi membri di queste

equazioni sono zero, dunque

avremo le equazioni

(58) $xd^2y-yd^2x=d(xdy-ydx)=0$,

(59) $zd^2x-xd^2z=d(zdx-xdz)=0$,

(60) $yd^2z-zd^2y=d(ydz-zdy)=0$:

Integrando le quali si ~~...~~ avrà

una costante che converrà mol-

tiplicare per dt, e però avremo

(61) $xdy-ydx=cdt$.

(62) $zdx-xdz=c'dt$.

(63) $ydz-zdy=c''dt$ essendo c, c', c''

le costanti arbitrarie che ren-

dono completi gli integrali.

Moltiplicate le (61)(62)

e (63) per z, y, x, la somma

dei prodotti sarà

$xzdy-yzdx+yzdx-xydz$

$+xydz-xzdy=czdt+c'ydt$

$+c''xdt=0$, e però dividendo

per dt avremo la

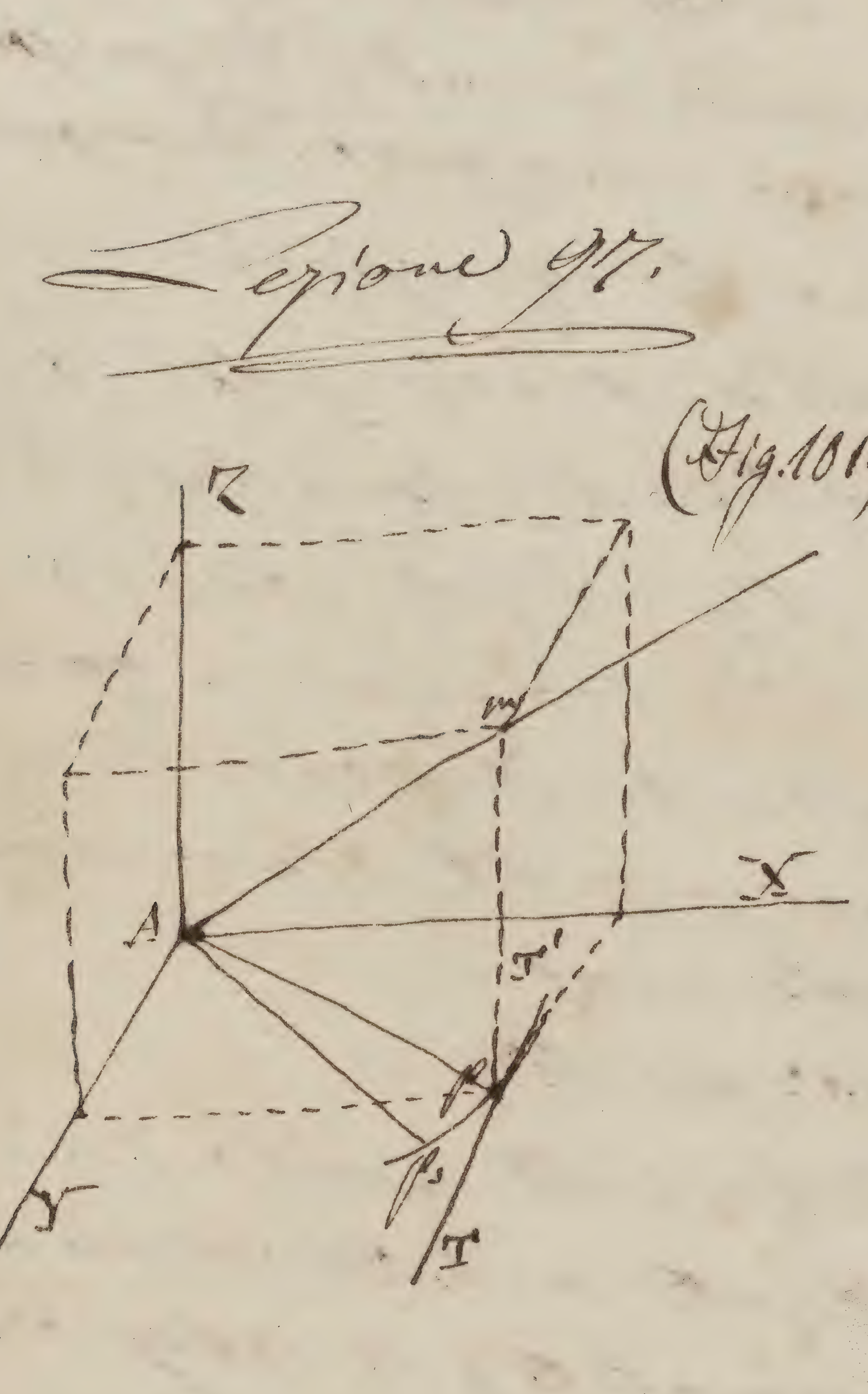
(64) $cz+c'y+c''x=0$, equazione di un

piano che passa per l'origine.

Dovremo dunque concludere che nel presente caso la trajettoria è una curva piana. Difatto, tutti i punti da una parte e dall'altra del piano protratto per la direz. della velocità iniziale del punto materiale e pel punto fisso verso il quale la forza che sollecita è sempre diretta. Non vi ha dunque ragione p. cui il mobile sortir debba da tal piano.

Lezione 97.

(Fig. 101.)



§. 475. Si osservi la (Fig 101)
Sia p la projezione del punto m sul piano (x,y), e protratta Ap vi si misuri la distanza da A. Poniamo $Ap = r$, $\omega = \angle XAp$, e si avrà

$x = r\cos\omega$,

$y = r\sin\omega$, e però

$dx = \cos\omega\, dr - r\sin\omega\, d\omega$

$dy = \sin\omega\, dr + r\cos\omega\, d\omega$, onde

(65) $x\,dy = r\cos\omega\sin\omega\, dr + r^2\cos^2\omega\, d\omega$,

(66) $y\,dx = r\sin\omega\cos\omega\, dr - r^2\sin^2\omega\, d\omega$, e quindi ha

(67) $x\,dy - y\,dx = r^2(\sin^2\omega + \cos^2\omega)\,d\omega = r^2\,d\omega$. L'angolo elementare $d\omega$ ormai rappresentato da pAp_1 di guisa che Ap, Ap_1, sieno le distanze da A delle projezioni sul piano (x,y) del punto materiale nel lasso di tempo dt indeterminatam. piccolo. L'archetto pp_1, passato in questo tempo sarà pure in

terminatamente piccoli. Il settore pAp_1 è l'area descritta dal raggio Ap nel tempuscolo dt, la quale area viene rappresentata da $\frac{1}{2} v^2 dw$, onde la

(68) $\frac{1}{2} v^2 dw = \frac{1}{2}(xdy - ydx) = \frac{1}{2} c dt$, per le (67) e (61), e quindi l'area del settore pAp_1 è presentata da $\frac{1}{2} c dt$ che è quantità costante, tali supponendosi dt.

Concludere adunque si debbe che l'area descritta dal raggio Ap nel moto del punto in un tempo qualunque t è proporzionale a così fatto tempo ed è presentata da $\frac{1}{2} ct$ (integr.) Le altre due equaz.i (62) e (63), mettono similmente davanti, che i raggi condotti da A alle projezioni dei punti materiali sui piani (x,z) (y,z) descrivono delle aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.

E' quindi aperto, che quando la forza continua agisce su di un punto materiale traendolo verso un punto fisso, le aree descritte intorno questo punto dalla retta che unisce il punto sul centro d'attrazione projettate su di un piano ~~projett~~ passante per questo centro sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.

Più avanti attingeremo alla medesima conseguenza parlando di varj corpi attratti dalle mutue loro attraz.

§. 175. Reciprocamente, quando ciò ha luogo relativamente a tre piani ortogonali che passano per un punto concluderemo che la risultante delle forze continue che agisce sul mobile, ha costantemente la direzione della retta che unisce il punto materiale col punto comune d'attraz.

Diffatti posto le coord. di questo punto, le quantità $xdy-ydx$, $zdx-xdz$, $ydz-zdy$, sono costanti; e però avremo le tre equaz.

(69) $xd^2y-yd^2x=0$,

(70) $zd^2x-xd^2z=0$,

(71) $yd^2z-zd^2y=0$.

che sono i loro differenziali; per cui dalle (55) (56) e (57) si deducono le

(72) $yX=xY$,

(73) $zX=xZ$,

(74) $yZ=zY$. Le quali mostrano essere le componenti X, Y, Z tra se come le coord.e x, y, z ortogonali; e però la loro risultante

ha la direzione della retta che unisce l'origine col punto materiale, avvegnacchè essa è la diagonale del parallelepipedo di cui x, y, z sono i tre lati.

(68) $\frac{1}{2} r^2 dw = \frac{1}{2} c\, dt$.

§. 177. Dalla (68) si ha la

(75) $\frac{dw}{dt} = \frac{c}{r^2}$; per un altro punto della trajettoria si ha

(76) $\frac{dw_1}{dt_1} = \frac{c}{r_1^2}$; quindi avremo

$\frac{dw}{dt} : \frac{dw_1}{dt_1} :: \frac{c}{r^2} : \frac{c}{r_1^2} :: \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^2}$

Ma dw, e dw_1 sono i due angoli elementari descritti ne' tempuscoli dt, dt_1 dalla projezione del punto materiale sopra un piano qualunque che passi pel centro d'attrazione, dunque $\frac{dw}{dt}$, e $\frac{dw_1}{dt_1}$ sono le velocità, che diconsi angolari, con le quali la sudetta retta descrive i due angoli dw, dw_1. Dunque conchiudere dobbiamo, che in ogni trajettoria le velocità angolari sono in ragion reciproca delle projezioni de' raggi vettori sopra un piano qualunque che passi pel centro d'attrazione.

§. 178. Poichè la trajettoria percorsa da un punto materiale che venga continuamente sollecitato da una forza diretta ad un centro fisso, è una curva

piano §. 474, e il dettato
ne' §. 475, 476, 477 si o-
vi sica qualunque sia la di-
rezione del piano di proj-
ezione purchè passi pei cen-
tri d'attrazione, ne conse-
guita che ogni qualvolta
una forza continua che
solleciti un punto materia-
le secondo un punto fisso
d'attraz.e le aree descritte
dai raggi vettori sono pro-
porzionali ai tempi impie-
gati a descriverle —
E reciprocamente, se un
punto movendosi su di una
trajettoria, il raggio vettore
descriva delle aree pro-
porzionali ai tempi, il pun-
to sarà sollecitato da
una forza continua di-
retta verso il centro. —
Finalmente in ogni tra-
jettoria ~~raggi vettori~~ le veloci-
tà angolari sono in ragion reciproca
dei raggi vettori.

(Fig. 161) §. 479. Poniamo che il ~~punto~~ piano di pro-
jezione del punto materia-
le sia il piano della traje-
ttoria e che ess.e ne presen-
ti un archetto ipse da P si
conduca la tangente T..,
e di più ~~[illegible]~~ si conduca a
lei la perpend. AV = Q

stante che l'archetto $pp_1 = ds$ della trajettoria si considera indefinitamente piccolo, si potrà considerare rettilineo il Δ. pcp_1, e però la sua area sarà $\frac{1}{2} q ds$, e però pel §. 175 si avrà

(77) $\frac{1}{2} r^2 du = \frac{1}{2} q ds = \frac{1}{2} c dt$, e quindi la

(78) $\frac{ds}{dt} = \frac{c}{q}$; per un' altro punto della trajettoria starà

(79) $\frac{ds_1}{dt_1} = \frac{c}{q_1}$, onde avremo la

$$\frac{ds}{dt} : \frac{ds_1}{dt_1} :: \frac{c}{q} : \frac{c}{q_1} :: \frac{1}{q} : \frac{1}{q_1};$$

ma $\frac{ds}{dt}$, e $\frac{ds_1}{dt_1}$ sono velocità del punto materiale, dunque in ogni trajettoria le velocità effettive sono reciprocamente come le perpendicolari condotte dal centro di attrazione sulla tangente protratta al punto della trajettoria su cui sta il punto materiale.

§. 180. Sia il mobile sollecitato da una sola forza continua Π diretta verso un centro fisso nella direzione del raggio r, la quale potrà essere ejiandio la risultante di più forze continue dirette comunque nello spazio. In tal caso si è veduto che la trajettoria è una curva piana. Preso il centro come l'origine delle coordinate, supposto che il piano (x, y) sia quello su cui giace, si avranno

che la F fa cogli assi delle x, y sono $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}$, e però $\frac{x}{r}F, \frac{y}{r}F$ saranno le componenti nella direzione degli assi coord. ortogonali. Siccome nel presente caso le forze $\frac{x}{r}F, \frac{y}{r}F$ tendono a diminuire le coord.e così dalle due equazioni del moto

(12) $X = \frac{d^2x}{dt^2}$,

(13) $Y = \frac{d^2y}{dt^2}$, ne verrà

(80) $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}F$,

(81) $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}F$, molt.e la (80) per dy e la (81) per dx, la differenza dei prodotti sarà

(82) $\frac{d^2x}{dt^2}dy - \frac{d^2y}{dt^2}dx = \frac{yF}{r}dx - \frac{xF}{r}$ ovvero

(83) $\frac{Fdt^2}{r}(xdy - ydx) = d^2y.dx - d^2xdy$: ma detto R il raggio vettore si ha C.S

$$R = \frac{ds^3}{d^2ydx - d^2xdy}$$, dunque avremo l'equazione

(84) $\frac{Fdt^2}{r}(xdy - ydx) = \frac{ds^3}{R}$, e quindi la

(85) $R = \frac{rds^3}{Fdt^2(xdy - ydx)}$; ma si ha

(61) $xdy - ydx = c\,dt$, dunque

(86) $R = \frac{rds^3}{cFdt^3}$; dalla (78) si ha

(87) $\frac{ds^3}{dt^3} = \frac{c^3}{q^3}$, onde la

(88) $R = \frac{rc^2}{Fq^3}$, e però la

(89) $F = \frac{V\hat{c}}{Rq^3}$; per un altro punto della trajettoria si ha similmente

(90) $F_1 = \frac{V_1\hat{c}}{R_1 q_1^3}$, e però

$F : F_1 :: \frac{V}{Rq^3} : \frac{V_1}{R_1 q_1^3}$. Dal che concludere si debbe che nelle trajettorie la forza continua tendente ad un centro fisso, ~~[illegible]~~ è proporzionale al raggio che unisce questo punto col punto materiale mobile, diviso pel prodotto del raggio osculatore nel cubo della perpend.e che si fa cascare dal centro fisso alla trajettoria nel punto ove trovasi il mobile —

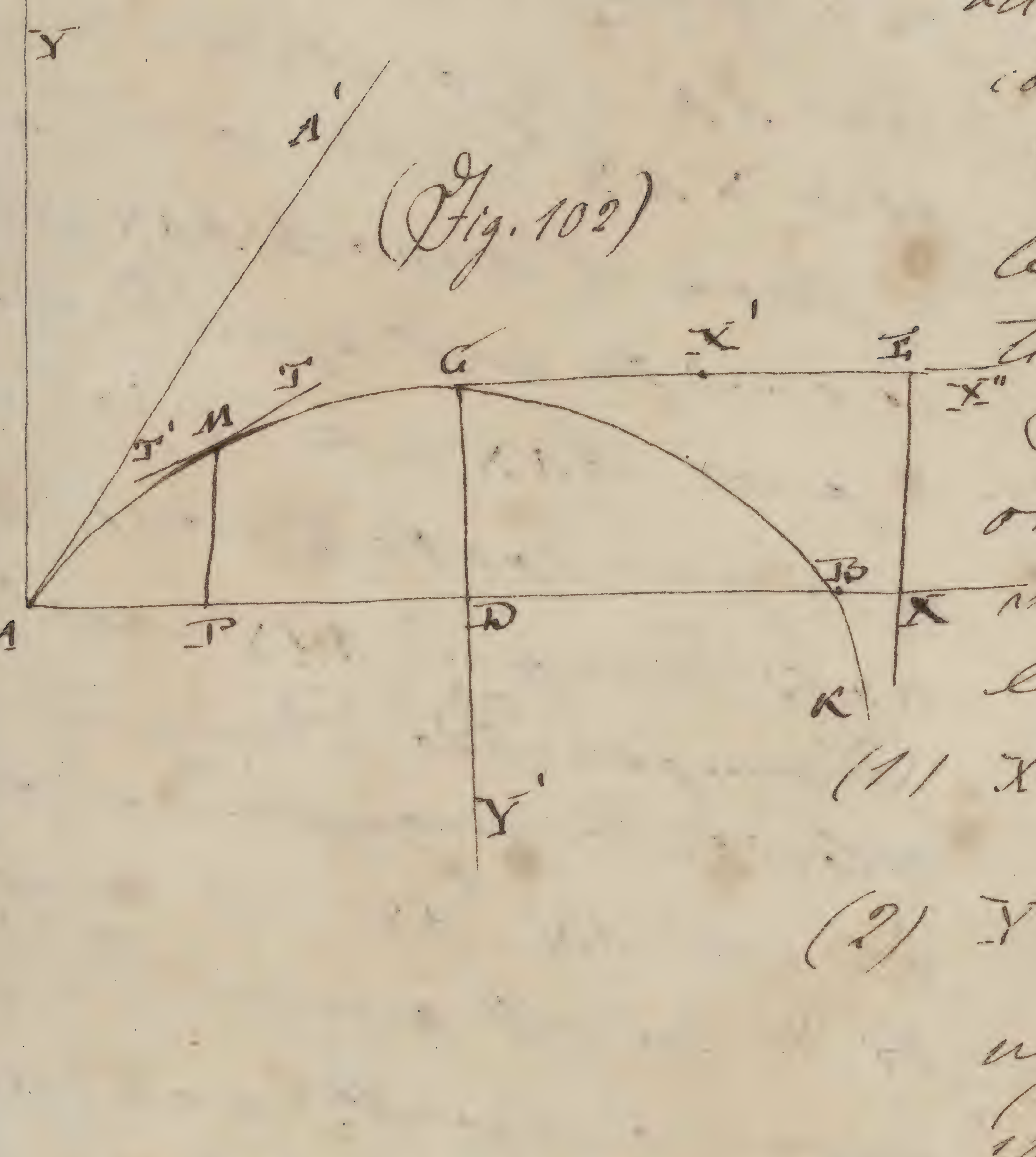
(11.)

Capitolo XXXVI°

Del moto dei Projetti

§. 281. A chiarire la teorica del moto curvilineo ed facciamo applicazione ad un punto materiale pesante spinto da una forza istantanea nel vuoto oppure in un mezzo resistente.

Dando principio nel caso del vuoto, è patente che la curva che passerà il projetto sarà in un piano verticale protratto per la direzione della forza istantanea, nel quale piano supporremo le coord.e (x, y).



(Fig. 102)

Sia (fig. 102) AX orizzontale l'asse delle x, ed AY verticale l'asse delle y.

Supporremo positive le ordinate sopra AX.

Nel presente caso bastano le due equazioni del moto

(1) $X = \frac{d^2x}{dt^2}$,

(2) $Y = \frac{d^2y}{dt^2}$. Siccome non v'ha nessuna forza continua che spinga il corpo secondo l'asse delle x, avremo $X = 0$, ed $Y = -g$ presentata per g la gravità costante. Le due equazioni del moto adempiute saranno

(3) $\frac{d^2x}{dt^2}=0$

(4) $\frac{d^2y}{dt^2}=-g$; gl'integrali comp[leti]
delle (3) e (4) sono le

(5.) $x=bt+b_1$

(6.) $y=-\frac{g}{2}t^2+ct+c_1$; essendo, b, b_1,
c, c_1, le costanti arbitrarie
A determinarle, supponiam[o]
che parta il projetto dall'ori[-]
gine A delle coord.^{e} (x, y) e che
il tempo t abbia principio all'
origine del moto; in tale ip[o]
tesi ad $x=0$, $y=0$, corrispon[-]
derà deve $t=0$, e però nelle
(5) e (6) converrà che sia
$c_1=0$, $b_1=0$, e così nella (6.)
Sia a la velocità iniziale di
projezione la cui direzione
sia AA' esistente entro l'an-
golo YAX delle coord. positive
e sarà l'angolo A'AX l'ango-
lo che fa coll'asse delle x,
e però $A'AX=\alpha$; ma gli
assi per ipotesi sono ortogo-
nali, dunque $A'AY=90°-\alpha$.
Scomponendo adunque la
velocità di projezione secondo
gli assi AX, AY, le componen[-]
ti di lei all'origine del moto
saranno rispett.^{te} $a\cos\alpha$, $a\cos$[illegible]
ma in un istante qualunque
così fatte velocità douvranno rappre[-]
sentate da $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, e le
(5) e (6) pel ved. cioè $b_1=0, c_1=0$,

si riducono alle

(7.) $x = bt$,

(8.) $y = -\frac{g}{2}t^2 + ct$, delle quali prese il differenziale considerando x, y funzioni di t avremo

(9.) $\frac{dx}{dt} = b$

(10.) $\frac{dy}{dt} = -gt + c = c$ all'origine.

Dunque sarà

$b = a\theta\alpha$, $c = a\varrho\alpha$, e così si sono determinate le costanti sostituite nelle (7) (8) si hanno gl'integrali determinati

(11) $x = a\theta\alpha . t$

(12) $y = -\frac{gt^2}{2} + a\varrho\alpha t$. Le (11) e (12) sono quelle de' moti delle projezioni del punto materiale secondo gli assi delle x, y.

Dalla (11) si ha

$t = \frac{x}{a\theta\alpha}$, e però avremo la

(13) $y = -\frac{gx^2}{2a^2\theta^2\alpha} + \frac{a\varrho\alpha}{a\theta\alpha} . x =$

$-\frac{gx^2}{2a^2\theta^2\alpha} + \sigma\alpha x$.

Concludere adunque si dee che la trajettoria è una parabola di cui il diametro principale è verticale; al vertice G la tangente è orizzontale, e però $y' = \frac{dy}{dx} = 0$. Il differenziale della (13) da

(14) $\frac{dy}{dx} = \sigma\alpha - \frac{g}{a^2\theta^2\alpha} x$.

Siano le coord.^{e} al vertice

$x = AD = x_1$,

$y = GD = y_1$, e dalla (14) si avrà

$0 = \sigma\alpha - \frac{g}{a^2\theta^2\alpha} x_1$, e però avremo le

(13) $y = -\frac{g x^2}{2 a^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha . x$

(11) $x = a \cos \alpha . t$

(12) $y = -g \frac{t^2}{2} + a \sin \alpha t$.

Lezione 98.

(15) $x_1 = AD = \frac{a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$. Sostituito questo valore nella (13) si ha

$y_1 = -\frac{a^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{g} = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{2g} = DC$

Si ha poi

$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = v^2$. —

Dalla (11) e dalla (12) deriva

(16) $\frac{dx}{dt} = a \cos \alpha$

(17) $\frac{dy}{dt} = -gt + a \sin \alpha$ e quindi

(18) $v^2 = a^2 \cos^2 \alpha + g^2 t^2 - 2ag \sin \alpha t + a^2 \sin^2 \alpha = a^2 - 2gy$; per la (12). Si ha dunque la velocità del projetto in un punto qualunque della sua trajettoria —

§. 482. L'ordinata $y_1 = CD$ del vertice della parabola mette davanti la massima altezza a cui attinge il mobile e dicesi altezza del getto. Arrivato in C il mobile discende, e il ramo di parabola che passa discendendo è al tutto simile a quello dell'ascesa, e perciò taglia l'asse AX in un punto B in cui l'ascissa AB è doppia di quella AD del vertice, e che dicesi portata del getto o ampiezza; si ha dunque

$AB = x_2 = 2AD = \frac{2 a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$; ma $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, dunque avremo

(19) $AB = x_2 = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{g}$, laonde, il massimo valore di AB ha luogo quando $\alpha = 45°$, poichè $2\alpha = 90$, e $\sin 2\alpha = 1$. Si dovrà

dunque conchiudere che per una data forza istantanea di projezione si ha la massima portata quando è lanciato con una direzione che faccia colla orizzontale un'angolo semiretto.

Il trovato valore di AD si deduce dalla (13), ponendo $y=0$. Diffatti da essa si ha

$$0=-\frac{gx^2}{2a^2\theta^2\alpha}+\sigma\alpha.x,$$ da cui

si deduce immediatamente la (19)

Se la velocità iniziale a sia data, si può determinare l'angolo α pel quale il projettile attinga un punto, pel quale $x=p$, $y=q$ siano le coordinate. A determinare α ricorreremo alla (13) che in tal caso dovrà sussistere pei valori di $x=p$, $y=q$, e però avremo la

(20) $$q=-\frac{gp^2}{2a^2\theta^2\alpha}+\sigma\alpha.p;$$ a rendere più semplice quest'equazione, sia h l'altezza dovuta alla velocità a di projezione, ed al §. 63 si è veduto essere $a^2=2gh$, g essendo la gravità, per cui la (20) si muta nella

(21) $$q=-\frac{p^2}{4h\theta^2\alpha}+\sigma\alpha.p;$$ poniamo $\sigma\alpha=z$, ed avremo

$$\frac{\phi^2\alpha}{\theta^2\alpha}=\frac{1-\theta^2\alpha}{\theta^2\alpha}=z^2,$$ e però

$$\frac{1}{\theta^2\alpha}=1+z^2,$$ per cui la (21) diventa

$$q=-\frac{1+z^2}{4h}p^2+pz,$$ onde avremo

$4hy = -(1+z^2)p^2 + 4hpz$, ossia
$p^2z^2 - 4hpz + 4hy + p^2 = 0$, che
sciolta rispetto alla z darà la

(22) $z = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - 4hy - p^2}}{p}$.

In generale dunque $z = \tau\alpha$, ha due valori dipendenti dal doppio segno che ha il radicale, e di conseguenza si può attingere lo scopo gettando il projetto secondo due direzioni, le quali si riducono ad una se la quantità sotto al radicale sia zero, e sarà impossibile il problema se tale quantità sia negativa.—

§. 283. Dal detto rendesi aperto quanto riesca semplice la teorica dei projetti allor che si fa astrazione dalla resistenza nel mezzo, la quale quando il projetto si muova nell'aria diven[ta] troppo grande, e non è concesso trascurare senza rendere erronei i risultamenti.

La resistenza di un mezzo qualunque è una forza diretta secondo la tangente della trajettoria e in senso contrario al moto del projettile.

Sia R la resistenza del mezzo, ed essa agirà nel prolungamento della tangente della trajettoria in senso contrario alla direz. della tangente

e però le sue componenti secondo i tre assi ortogonali saranno $-R\frac{dx}{ds}$, $-R\frac{dy}{ds}$, $-R\frac{dz}{ds}$, osservando che la gravità tende a diminuire la coordinata verticale y, le tre equazioni del moto saranno

(23) $\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{dx}{ds}$,

(24) $\frac{d^2y}{dt^2} = -g - R\frac{dy}{ds}$,

(25) $\frac{d^2z}{dt^2} = -R\frac{dz}{ds}$: dividendo la (23) per la (25) avremo

$\frac{d^2x}{d^2z} = \frac{dx}{dz}$, d'onde

$\frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2z}{dz}$, e però integrando

$\log dx = \log dz + \log C$, ovvero

(26) $\log dx = \log . C dz$, e passando ai numeri la

(27) $dx = C dz$ di cui l'integrale è la

(28) $x = Cz + C_1$, che rappresenta la projezione della trajettoria sul piano orizzontale (x, z). Così fatta projezione è dunque una retta, e però la trajettoria è in un piano verticale, ossia sul piano (x, y). È dunque dimostrato che anche nel caso del mezzo la trajettoria si può riferire a due coordinate. —

§. 286. Le equazioni (23) e (24) si applicano a qualunque punto

del projetto, se tutti abbiano il medesimo movimento nello spazio, di guisa che descrivano delle curve parallele, e che a ciascun istante siano le curve parallele e dirette nel medesimo senso. Quello al punto materiale si può surrogare un corpo di finite dimensioni, nel qual caso R dipende dalla forma dimensioni e velocità del projetto; dipende altresì dalla densità del mezzo resistente. Ma senza errore sensibile si può supporre costante la densità del mezzo per tutta la trajettoria. Poniamo la resistenza del mezzo proporzionale al quadrato della velocità, e ricordando che $v=\frac{ds}{dt}$, si potrà supporre $R=m\frac{ds^2}{dt^2}$, ove m è costante per tutta la durata del moto. Le equazioni pertanto del moto in questo caso della resistenza, saranno

(30) $\frac{d^2x}{dt^2}=-m\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt}$

(31) $\frac{d^2y}{dt^2}=-g-m\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt}$; dalla (30) si ha

$\frac{d^2x}{dt^2}:\frac{dx}{dt}=-m\frac{ds}{dt}$, di cui l'integrale è

$\log.\frac{dx}{dt}=-ms+C$, e passando ai ~~nu~~ numeri

$\frac{dx}{dt} = e^{-ms+c_1} = e^{-ms} \cdot e^{c_1}$, ponendo $e^{c_1} = C_1$ si ha la

(32) $\frac{dx}{dt} = C_1 e^{-ms}$.

Al punto A origine del moto si ha $s=0$, e la velocità orizzontale ivi è pel D. l. 81. $\frac{dx}{dt} = a\theta\alpha$, dalla (32) adunque nasce la

(33) $C_1 = a\theta\alpha$, e però avremo l'integrale determinato

(34) $\frac{dx}{dt} = a\theta\alpha e^{-ms}$. Sia p la tangente trigonometrica dell'angolo che fa la tangente MT in un punto in cui le coordi. sono x, y coll'asse delle x, cioè sia

(35) $p = \frac{dy}{dx} = y'$, la quale moltiplicata per $\frac{dx}{dt}$ si ha

(36) $\frac{p\,dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$, la cui derivata è

$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + p\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$, per cui la (31) mutasi nella

(37) $\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + p\frac{d^2x}{dt^2} = -g - m\frac{ds}{dt}$. $\frac{dy}{dt}$, ovvero sostit. il valore della (30)

(38) $\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} - mp\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} = -g - m\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt}$: ma $p = \frac{dy}{dx}$, dunque avremo la

(39) $\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} - m\frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} = -g - m\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt}$, che riducesi alla

(40) $\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = -g$. Dalla (34) derivasi innalz. a quad.

$\frac{dx^2}{dt^2} = a^2\theta^2\alpha e^{-2ms}$, per cui dividen-
do la (40) si ha per quoto

(41) $\frac{dp}{dx} = -\frac{g e^{2ms}}{a^2\theta^2\alpha}$; ma $p = \frac{dy}{dx}$,

dunque avremo

$\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{dx}\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{1}{dx}\,ds$, onde

(42) $ds = \sqrt{1+p^2}\,dx$; moltiplicando
per quest'equazione la (41) si avrà

(43) $dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{g e^{2ms}}{a^2\theta^2\alpha}\,ds$, della quale
l'integrale è la

(44) $\int\sqrt{1+p^2}\cdot dp = \frac{C}{2} - \frac{g e^{2ms}}{2a^2 m\theta^2\alpha}$; ma

$\int\sqrt{1+p^2}\cdot dp = \frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\log(p+\sqrt{1+p^2})$ come è noto. Dunque

(45) $p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) = C - \frac{g e^{2ms}}{a^2 m\theta^2\alpha}$. A determinare
C si ha nello stesso tempo
$s=0$, e $p=\sigma\alpha$; la direzione
poi della velocità al princi-
pio del moto è la tangente
della curva e perciò $p=\sigma\alpha$,
sostituendo nella (45) si ha

(46) $\sigma\alpha\cdot\sqrt{1+\sigma^2\alpha^2} + \log(\sigma\alpha+\sqrt{1+\sigma^2\alpha^2}) = C - \frac{g}{a^2 m\theta^2\alpha}$, donde la

(47) $C = \sigma\alpha\sqrt{1+\sigma^2\alpha^2} + \log(\sigma\alpha+\sqrt{1+\sigma^2\alpha^2}) + \frac{g}{a^2 m\theta^2\alpha}$; ma dalla (41) si ha

$\frac{1}{m}\cdot\frac{dp}{dx} = -\frac{g e^{2ms}}{a^2 m\theta^2\alpha}$, per cui la
(45) mutasi nella

(48) $p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) = C + \frac{1}{m}\frac{dp}{dx}$, quindi la

(49) $dx = \frac{dp}{m(p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) - C)}$;

ma $p = \frac{dy}{dx}$, e però $dy = p\,dx$

(40) $\frac{dp}{dt}\frac{dx}{dt}=-g$

Dunque avremo la

(50) $dy=\frac{p\,dp}{m\left(p\sqrt{1+p^2}+\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)-C\right)}=0$

Dalla (40) si ha

$dt^2=-\frac{dp\,dx}{g}$, nella quale se

pongasi il valore di dx dato

dalla (49) se ne deriva la

(51) $dt=\frac{-dp}{\sqrt{m g}\cdot\sqrt{C-p\sqrt{1+p^2}-\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}}$;

si è preso il segno negativo da-

vanti al radicale perchè l'an-

golo di cui p è la tangente

diminuisce aumentando il

tempo per cui dp e dt deb-

bono avere segni contrarj.

§. 185. Si può anche con agevolezza

ottenere il valore della veloci-

tà v in funzione di p; difatti

si ha

$v=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dt}=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+p^2}$

in cui sostituiti i valori di dx

e dt dati dalle (49) e (51) se

ne ottiene la

(52) $v=\frac{\sqrt{\frac{g}{m}}\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{C-p\sqrt{1+p^2}-\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}}$

§. 186. Si può esprimere ancora

l'arco s in funzione di t; e

di vero dalla (45) si ha la

(53) $e^{2ms}=\frac{a^2 m\, \theta^2 \alpha}{g}\left(-p\sqrt{1+p^2}-\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)+C\right)$

dalla quale prendendo i lo-

garitmi deducesi la

(54) $s=\frac{\log\left(\frac{a^2 m\,\theta^2\alpha}{g}\left(C-p\sqrt{1+p^2}-\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\right)\right)}{2m}$

Lezione 100.

la 101. Ripetiz.e

§. 187. La completa soluzione della

quistione è data dalle (49) (50) (51).

Se in generale si sapessero integrare le (49) e (50) sotto forma finita si avrebbe x, ed y in funzione della p. Per mezzo di esse eliminando la p si avrebbe un'equazione in x, y che sarebbe la Trajettoria. Quantunque non si possa ottenere un valor finito delle (49) e (50), ciò non ostante si può descrivere la trajettoria per punti. Difatti le (49) e (50) si possono rappresentare per le

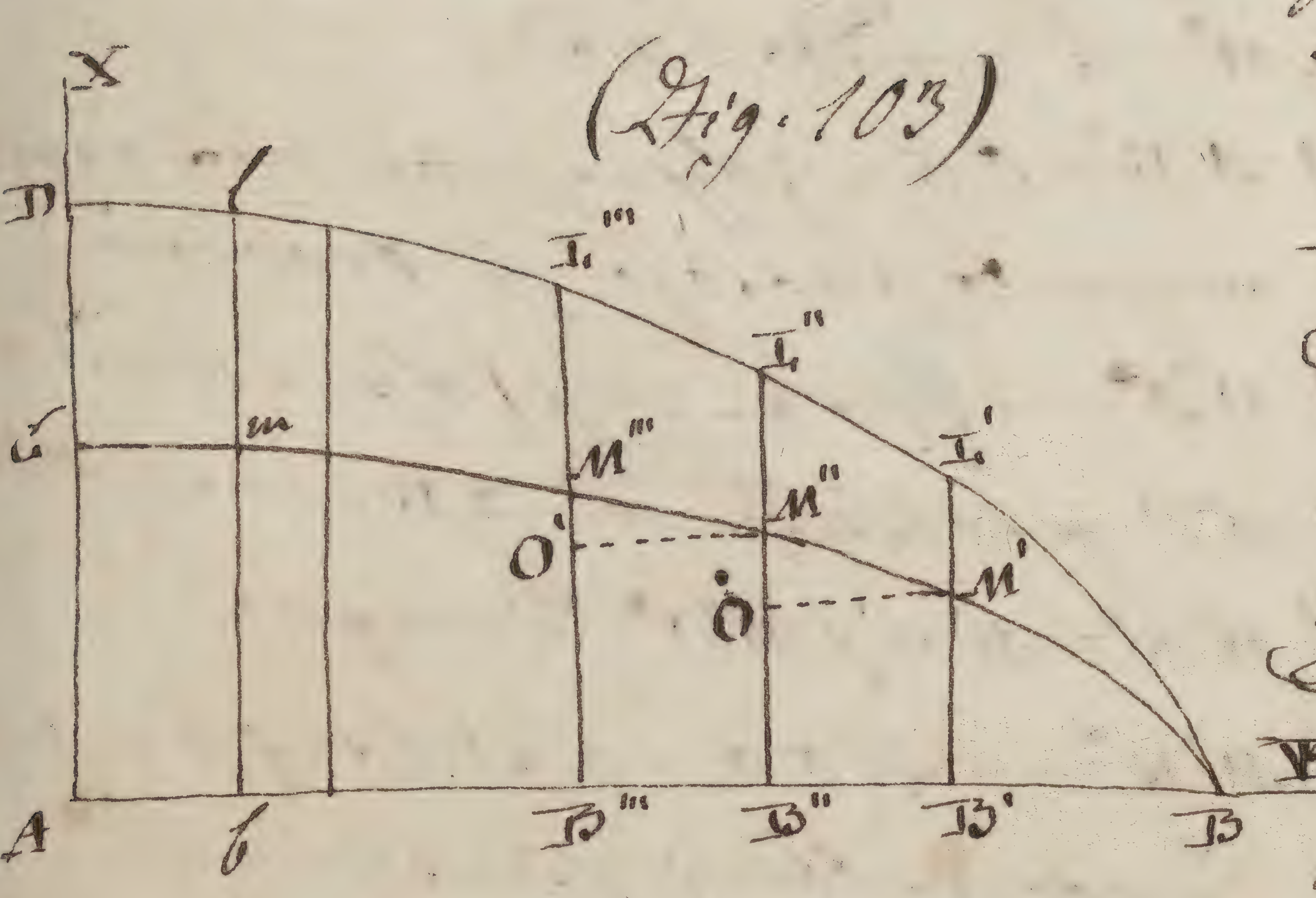
(55) $dx = \varphi(p)dp$,

(56) $dy = \varphi_1(p)dp$; dalla (55) si ha

(57) $\frac{dx}{dp} = \varphi(p)$. Si osservi, che $\frac{dx}{dp}$ non è altro che la tangente trigonometrica dell'angolo che fa la tangente la curva coll'asse delle p, essendo p l'ascissa, x le ordinate. Cerchiamo di costruire questa curva detta aussiliaria che serve a determinare qualunque punto della trajettoria. —

Sia la

(58) $x = f(p)$ la curva aussiliare rappresentata da quest'equaz.° La (58) dev'essere verificata dai valori che verificano la trajettoria; per la trajettoria ad $x = 0$, corrisponde $p = o$ a §. 484. Dunque protratti gli assi AX, AB (fig 103), si si



(Fig. 103).

prenda $AB = \sigma\alpha$, il punto α apparterrà alla curva ausiliaria.

Si divida AB in quante parti si voglia piccolissime, ed una di queste venga presentata da $d\rho$, e sarà facile il trovare i punti M', M'', M''' — corrispondenti ai B', B'', B''' —. Infatti supposti i punti stessi vicinissimi gli archetti M'M'', M''M''' potranno venir surrogati dai latercoli del poligono circoscritto, e l'angolo che uno di questi fa con l'asse delle ascisse in generale ha per tangente $\frac{dx}{d\rho}$ il cui valore vien dato dalla (57) conosciuta $\varphi(\rho)$. Così, ad ottenere la tangente trigonometrica dell'angolo che fa con l'asse stesso in un luogo di AB, si dovrà porre la equazione

(59) $AB' = AB - BB' = \sigma\alpha - d\rho$

Per la trajettoria si sono posti gli angoli che fanno le tangenti in diversi punti con l'asse delle ascisse, supponendo l'apertura di tali angoli volta da A verso B, e però avremo

(60) $\sigma M'BB' = \varphi(\sigma\alpha - d\rho)$ onde la

(61) $\sigma M'BB' = f(\sigma\alpha - d\rho)$, dunque sarà

(62) $M'B' = -\varphi(\sigma\alpha - d\rho)\, BB'$, ovvero la

(63) $M'B' = -f(\sigma\alpha - d\rho)\, d\rho$; per mezzo delle (59) e (63) si costruirà prossimamente il punto M' della curva

ausiliaria BC. Ad determinare M'', si prenda la

(64) $AB'' = \sigma\alpha - 2d\beta$, e con un ragionamento analogo si troverà

(65) $M''O^* = -\varphi(\sigma\alpha - 2d\beta)\,d\beta$, essendo $M''O'$ parallella ad AB: ma si ha

(66) $M''B'' = M'B' + M''O^*$, dunque

(67) $M''B'' = -\varphi(\sigma\alpha - d\beta)\,d\beta - \varphi(\sigma\alpha - 2d\beta)\,d\beta$

Troverebbesi similmente

(68) $M'''B''' = -\varphi(\sigma\alpha - d\beta)\,d\beta - \varphi(\sigma\alpha - 2d\beta)\,d\beta - \varphi(\sigma\alpha - 3d\beta)\,d\beta$, e così di seguito.

Di modo che si potranno determinare quanti punti si voglia della curva ausiliaria, e l'operazione riuscirà tanto più precisa, quanto più piccole saranno le porzioni BB', $B'B''$, ec.

Operando della stessa guisa sulla (56) si costruirà una seconda curva ausiliaria di cui le coord.e sono β ed y. Le coord. mb, lb delle curve ausiliarie che corrispondono alla stessa ascissa β, appartengono alla trajettoria di cui le coord.e sono $B'I'$, $B''I''$ ec.

§. 288. Si è veduto, che nel vuoto il ramo ascendente della trajettoria è uguale al discendente; non è così in un mezzo resistente, e si dimostrerà che esso è una curva assintotica.

Ad dimostrarlo trasportiamo

l'origine delle coordinate nel vertice della trajettoria, di guisa che GX', GY' (fig. 102) siano i nuovi assi paralelli ai primi. È chiaro che per quest'operazione si dovrà porre $x = x_1 + AD$, $y = GD - y_1$, essendo x_1, y_1 le coordinate della trajettoria posta l'origine in G. — Prendendo il differenziale delle due esposte equazioni, si avrà $dx = dx_1$, $dy = -dy_1$. Se facciasi $p_1 = \frac{dy_1}{dx_1}$, si avrà $p = -p_1$, e quindi $\log(p + \sqrt{1+p^2}) = \log(-p_1 + \sqrt{1+p_1^2})$; ma

$$-p_1 + \sqrt{1+p_1^2} = \frac{(-p_1 + \sqrt{1+p_1^2})(p_1 + \sqrt{1+p_1^2})}{p_1 + \sqrt{1+p_1^2}} = \frac{1}{p_1 + \sqrt{1+p_1^2}}; \text{ quindi}$$

$$\log(p + \sqrt{1+p_1^2}) = \log\frac{1}{p_1 + \sqrt{1+p_1^2}} = -\log(p_1 + \sqrt{1+p_1^2}),$$ per cui le (49) e (50) si mutano nelle due

(49) $$dx = \frac{dp}{m(p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}) - C)}$$

(50) $$dy = \frac{p\,dp}{m(p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}) - C)}$$

(69) $$dx_1 = \frac{dp_1}{m(p_1\sqrt{1+p_1^2} + \log(p_1 + \sqrt{1+p_1^2}) + C)}$$

(70) $$dy_1 = \frac{+p_1\,dp_1}{m(p_1\sqrt{1+p_1^2} + \log(p_1 + \sqrt{1+p_1^2}) + C)}$$

Costruendo il ramo discendente mediante le (69) e (70), come si è fatto per l'ascendente, si potrà dare a p_1 dei valori grandi oltre ogni limite. Ma nel caso che p_1 sia grandissimo si possono ottenere dei valori prossimi di dx_1, dy_1 con somma facilità.

Poniamo che p_1 sia grandissimo; allora in luogo di $\sqrt{1+p_1^2}$ si può prendere solamente p_1, e per questa sostituzione si hanno le due equazioni,

(71) $dx_1 = \frac{dp_1}{m(p_1^2 + \log 2p_1 + C_1)}$

(72) $dy_1 = \frac{+p_1 dp_1}{m(p_1^2 + \log 2p_1 + C_1)}$; ma quando p_1 è grandissimo, $\log 2p_1$ è piccolissimo rispetto a p_1^2, dunque si potrà trascurare in suo confronto, per cui si hanno ora dalle (71) (72) le due equazioni

(73) $dx_1 = \frac{dp_1}{m(p_1^2 + C_1)}$

(74) $dy_1 = \frac{+p_1 dp_1}{m(p_1^2 + C_1)}$. Siccome poi p_1^2 si può ritener grande oltre ogni limite, così si può trascurare ancora C_1, per cui le (73) e (74) verranno surrogate dalle

(75) $dx_1 = \frac{dp_1}{m p_1^2}$

(76) $dy_1 = \frac{+p_1 dp_1}{m p_1^2}$, di cui gl'integrali sono

(77) $x_1 = b - \frac{1}{m p_1}$

(78) $y_1 = b_1 + \frac{\log p_1}{m}$, essendo b, b_1 le due costanti arbitrarie.

La (78) mostra che al crescer di p_1 la y_1 cresce oltre ogni limite, e la (77) dimostra che x_1 ha per limite b; dunque il ramo discendente ha per assintoto una

retta verticale, per cui si prenda $CE = b$, e si conduca la verticale EF, il ramo discendente CBR si accosta entro ogni limite a questa retta senza mai arrivarla.

§. 489. Ponendo nella (51.) $-p_1$ a vece di p e facendo analoghe riduzioni stante la massima grandezza di p_1 si otterrà

(51) $dt = \dfrac{-dp}{\sqrt{\frac{gm}{m}}\sqrt{c - p\sqrt{1+p^2} - \log(p+\sqrt{1+p^2})}}$

(79) $dt = \dfrac{dp_1}{\sqrt{mg}.p_1}$, ed integrando,

(80) $t = b_2 + \dfrac{1}{\sqrt{mg}} \log. p_1$, ove b_2 è la costante arbitraria; ma dalla (78) si ha

(81) $\log p_1 = my_1 - mb_1$, dunque

(82) $t = b_2 - \dfrac{mb_1}{\sqrt{mg}} + \dfrac{my_1}{\sqrt{mg}}$.

Posto $b_2 - \dfrac{mb_1}{\sqrt{mg}} = b_3$, si ha la

(83) $t = b_3 + \dfrac{my_1}{\sqrt{mg}}$, e quindi la

(84) $y_1 = t\sqrt{\dfrac{g}{m}} + b_4$ (a), equazione che mette davanti essere il moto d'un projetto in un mezzo di cui la resistenza è in ragione dei quadrati delle velocità, tendente a divenir il moto uniforme colla velocità $\sqrt{\dfrac{g}{m}}$, il che si è ottenuto al §. 457.

(a) in b_4 si contiene $\sqrt{\dfrac{g}{m}}$ ossia si ha $-b_3\sqrt{\dfrac{g}{m}} = b_4$.

§. 490. Allorchè l'angolo di projezione A'AX è picolissimo il projetto non attinge che una altezza piccolissima si può determinare la porzione AGB (fig. 102) di trajettoria sopra l'asse delle x.

Infatti, per tutta questa porzione

zione la tangente della trajettoria
è quasi orizzontale, la qual cosa
rende p piccolissimo, quindi si
potrà trascurare p^2 nel radicale
$\sqrt{p^2+1}$, per cui la (42) riducesi alla

(42) $ds = \sqrt{1+p^2}\,dx$

(85) $ds = dx$, e però $s = x$, e non si
aggiunge costante arbitraria
perchè ad $s=0$, $x=0$. Se nella

(41) $\frac{dp}{dx} = -\frac{g e^{2ms}}{a^2\theta^2\alpha}$

(41) si metta x in luogo di s,
si ha la

(86) $\frac{dp}{dx} = -\frac{g e^{2mx}}{a^2\theta^2\alpha}$, dunque prossi-
mamente $\theta\alpha = 1$, e detta h
l'altezza dovuta alla velocità
iniziale a, si ha $a^2 = 2hg$ per cui
la (86) diventa pel §. 184.

(87) $\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2h}e^{2mx}$, di cui l'integrale
è la

(88) $p = -\frac{1}{4mh}e^{2mx} + C$. A determinare
la costante arbitraria C si ha la
condizione che $p = \theta\alpha$ quando
$x=0$, e però avremo la

(89) $C = \theta\alpha + \frac{1}{4mh}$, e quindi l'integra-
le determinato sarà la

(90) $p = \theta\alpha - \frac{1}{4mh}(e^{2mx}-1)$ la quale
moltiplicata per dx dà la

(91) $p\,dx = dy = \theta\alpha\,dx - \frac{1}{4mh}(e^{2mx}-1)dx$,
il cui integrale è

(92) $y = \theta\alpha x - \frac{1}{8m^2h}e^{2mx} + \frac{1}{4mh}x + C$,
Determinando C, di guisa che sia
$y=0$, quando $x=0$, si ottiene (a)

(a) (93) $C = \frac{1}{8m^2h}$, e però l'integrale
determinato sarà

(94) $y = \theta\alpha x - \frac{1}{8m^2h}(e^{2mx} - 2mx - 1)$ che mette
davanti l'equazione della curva AtB.
Si osservi che $\theta\alpha . x$ è l'ordinata ver-
ticale della retta Aa' che il projetto
passerebbe se la gravità non agisse

sopra di lui, di guisa che il termine $-\frac{1}{8m^2h}(e^{2mx}-2mx-1)$ mette davanti in ciascun punto della trajettoria l'altezza dai cui il mobile è disceso in conseguenza della gravità, e della resistenza del mezzo. Dando ad x dei diversi valori si avranno altri valori di p e di y, quindi perverremo a costruire per punti la trajettoria, la quale verrà ad essere tanto più precisa, quanto più piccolo sarà δi. —

§. 491. L'altezza del getto ossia la massima ordinata CD determinare si può direttamente nell'infrascritto modo. Al vertice C si ha $p=0$, e però dalla (90) si ha

(95) $e^{2mx}=1+2mh\sigma a$, d'onde si ha

(96) $2mx=\log(1+2mh\sigma a)$, e quindi

(97) $x=AD=\frac{1}{2m}\log(1+2mh\sigma a)$. Sostituiti nella (94) i valori di e^{2mx}, e di x si ottiene

(98) $y=\frac{\sigma a}{2m}\log(1+2mh\sigma a)-\frac{1}{8m^2h}(1+2mh\sigma a-\log(1+2mh\sigma a)-1)=CD$

Per ottenere l'ampiezza AB, posto $y=0$, nella (94) si ha

$0=\sigma a.x-\frac{1}{8m^2h}(e^{2mx}-2mx-1)$ e quindi

(99) $e^{2mx}=1+2mx+8m^2h\sigma a.x$.

Equazione trascendente, dalla quale per approssimazione si trarrà il valore di $x=AB$ allorchè sono dati a, h ed m.

Capitolo XXXVII.

Del moto dei Pianeti

Lezione 102.

§. 1292. Finora sonosi supposte date le forze sollecitanti un punto materiale e dipendentemente si sono trovate le circostanze del moto di lui; prendiamo ora ad esaminare una questione, cioè dati i movimenti dei corpi trovare le forze che li producano. I Cieli ci porgono un'esempio di cosifatta questione.

Una esatta osservazione ha stabilito i seguenti fatti che ad onorare la memoria dell'Astronomo che li scoprì nomansi leggi di Keplero.

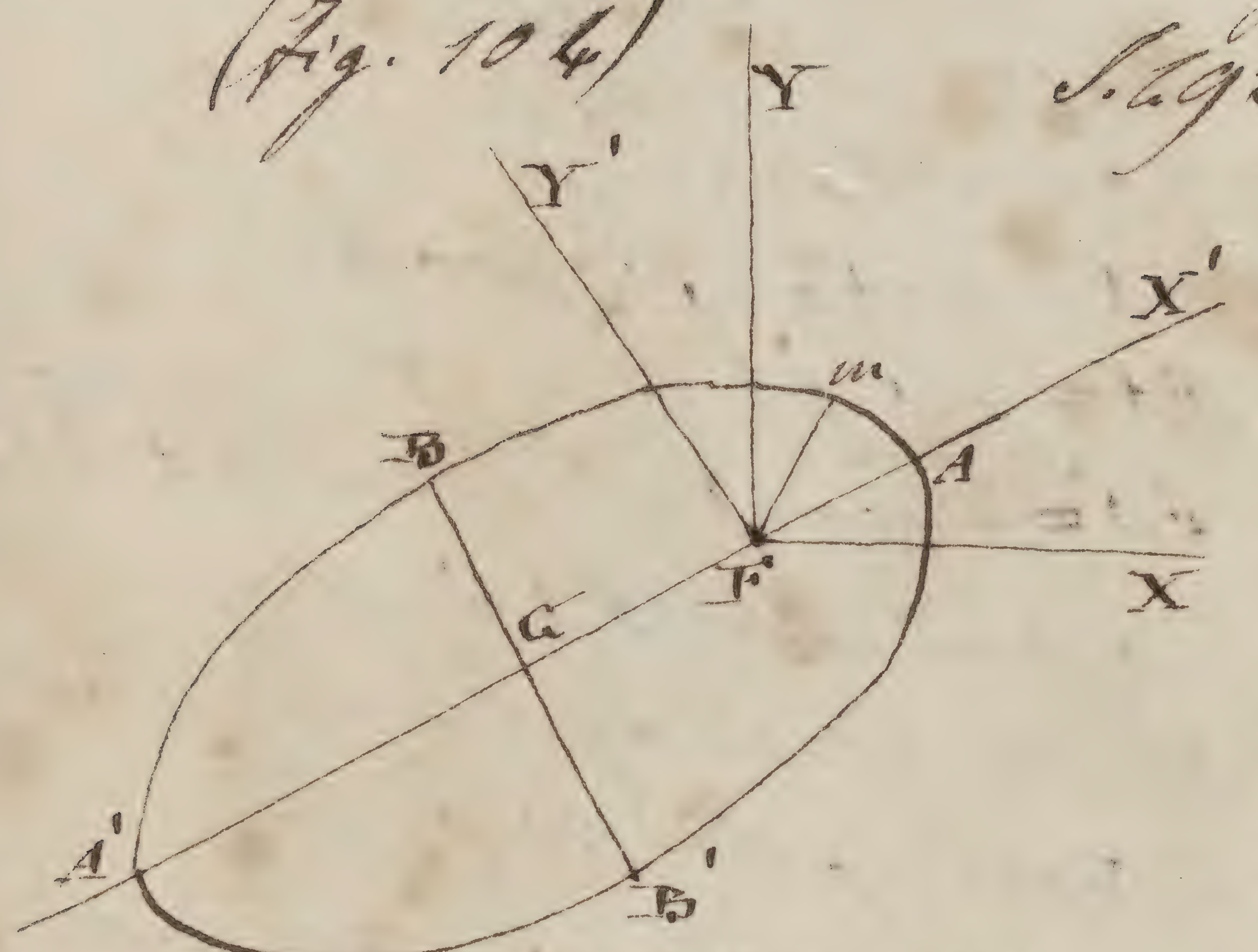
1.a Legge. I pianeti si muovono in curve piane, e i loro raggi vettori descrivono intorno al centro del Sole delle aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.

2.a Legge. Le orbite cioè le trajettorie de' pianeti sono ellissi, in un fuoco delle quali è locato il centro del Sole.

3.a Legge. I quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei pianeti intorno al Sole sono tra se come i cubi dei diametri principali maggiori delle loro orbite.

Queste leggi si riferiscono al moto del centro di gravità di ciascun pianeta: egli è dunque il moto di così fatto punto che prendiamo a considerare, dimodocchè per posiz.e del pianeta e sua velocità, s'intenderà quella del suo centro di gravità.

(Fig. 104)



(a) fuoco F protratta, nel piano dell'orbita del pianeta.

§. 493. Sia A'BAB' l'elisse descritta dal pianeta di cui è sia il centro F il fuoco in cui sia il centro del Sole, e sia in m la posiz.e di un pianeta, e $mF = r$, e l'angolo $mFX = \gamma$ che è formato dal raggio vettore e da una retta che passa per il (a)

Pongasi $GA = a$, e $GB = b$, posta l'origine al centro G, l'ascissa del fuoco F, $GF = \alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Si faccia l'angolo $AFX = \lambda$ costante, e si avrà l'angolo $mFX' = \gamma - \lambda$; pel vid.o dattrod. l'equazione polare dell'elisse sarà la

(1.) $$r = \frac{a^2 - \alpha^2}{a + \alpha\cos(\gamma - \lambda)} = \frac{b^2}{a + \alpha\cos(\gamma - \lambda)}$$; sia $e = \frac{\alpha}{a}$, che da la relazione della eccentricità dell'elisse al semidiametro maggiore: relazione che gli astronomi dicono eccentricità dell'orbita; avremo quindi

$ea = \alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$, per cui la (1) si muta nella

(2) $r = \dfrac{a^2 - e^2a^2}{a + ea\cos(\gamma-\lambda)} = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\gamma-\lambda)} = \dfrac{a(1+e)(1-e)}{1+e\cos(\gamma-\lambda)}$ che rappresenta l'elisse riferita a coord.^e polari.

Avendosi $e = \dfrac{\alpha}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, ne verrà $a^2e^2 = a^2 - b^2$, e però la

(3) $b = a\sqrt{1-e^2}$, valore del semidiametro principale minore. Si ha poi

$FA = a - \sqrt{a^2-b^2}$,

$FA' = a + \sqrt{a^2-b^2}$, ovvero

(4) $FA = a(1-e)$;

(5) $FA' = a(1+e)$; dalla (prima) poi si mostra che FA è il minimo, ed FA' il massimo de' raggi vettori, perchè si ha $\cos FA = \cos(\gamma-\lambda) = 1$ perchè tale angolo sarà zero; e pel 2.° si ha $\cos FA = \cos(\gamma-\lambda) = -1$, perchè sarà di 180°. laonde $a(1-e)$, ed $a(1+e)$ rappresentano rispett.^te la minima e la massima distanza del pianeta dal centro del sole. Inoltre la semisomma $\underline{a(1-e) + a(1+e)}$, dicesi distanza media del pianeta dal centro del sole che è $= a$. L'angolo variabile γ è la longitudine del pianeta contata nel pi. no dell'orbita; la λ è la longitudine del perielio (pario, elios vicino - sole), afelio (da —). l'angolo $\gamma - \lambda$ anomalia ove

del pianeta. ——

L'area descritta nel tem-
puscolo dt dal raggio vettore
r, è §.175. $\frac{1}{2} r^2 d\varphi$: in virtù
della prima legge di Keplero
si avrà

(6) $r^2 d\varphi = c.dt$. ——

§.294. Ciò posto, siano x, y le coord.
del centro di gravità del centro
del pianeta relative agli assi
FX, FY protratti pel centro
del sole nel piano del pianeta.
Sia R la forza continua che
agisce contro il pianeta nella
direzione Fm. La 1ª legge
rende aperto che la forza
continua che agisce contro
il pianeta è costantemente
diretta secondo la retta che
unisce il centro di gravità del
pianeta e del sole come al
§. 178. I coseni degl'angoli
mFX, e mFY sono rispett.
$\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, e di conseguenza
$R.\frac{x}{r}$, ed $R\frac{y}{r}$ sono le compo-
nenti della R nella direzione
degli assi coord. ortogonali
FX, FY. La trajettoria de-
scritta dal pianeta essendo
concava verso il centro del
sole, è chiaro che la forza
che produce il moto agisce
verso il centro stesso, e per-
ciò le componenti di lei tendo-
no a diminuire le coord.ᵉ x,
e y, per la qual cosa le

equazioni del moto saranno

§. 177

(7.) $\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r}$

(8.) $\frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r}$; moltiplicando la (7) per $2dx$, e la (8) per $2dy$, e sommando i prodotti si avrà

$\frac{2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y}{dt^2} = -\frac{2R}{r}(xdx+$

ma essendo gli assi ortogonali, si ha $r^2 = x^2+y^2$; e però differenziando si ha $rdr = xdx+ydy$, e però la

(9.) $\frac{2dx\,d^2x+2dy\,d^2y}{dt^2} = -2Rdr$, onde integrando si ha la

(10.) $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = b - 2\int Rdr$: ma si hanno le equazioni

(11) $x = r\cos\varphi$,

(12) $y = r\sin\varphi$, dunque diff.° si ha

(13) $dx = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi$

(14) $dy = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi$, onde la

(15.) $dx^2+dy^2 = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)(dr^2+r^2d\varphi^2) = dr^2+r^2d\varphi^2$; onde la (10) si converte nella

(16.) $\frac{dr^2+r^2d\varphi^2}{dt^2} = b - 2\int Rdr$.

Dalla equazione (6) si ha

(6) $r^2 d\varphi = c\,dt$

(17) $dt = \frac{r^2d\varphi}{c}$, e però $dt^2 = \frac{r^4d\varphi^2}{c^2}$ per cui la (16) si muta nella

(18.) $\frac{c^2}{r^4}\frac{dr^2}{d\varphi^2} + \frac{c^2}{r^2} = b - 2\int Rdr$.

Se la forza R sia data in funzione di r, cioè se abbiasi la

$y\,dy)$

$(2)\; r = \dfrac{a(1+e)(1-e)}{1+e\theta(y-\lambda)}$

(19.) $R = f(r)$, la (18.) sarà l'equazione della trajettoria: ma è ancora la (2) l'equazione della trajettoria, dunque il confronto della (15) colla (2) deve servire a determinare R. Dalla (2) si ha la

$$(20)\quad \frac{1}{r} = \frac{1+e\theta(y-\lambda)}{a(1-e^2)}$$; il cui diff.^le è

$$-\frac{dr}{r^2} = -\frac{e\theta'(y-\lambda)}{a(1-e^2)}\,dy$$, e però

avremo la

$$(21)\quad \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dy} = \frac{e\theta'(y-\lambda)}{a(1-e^2)}$$: ma

$\theta'^2(y-\lambda) = 1-\theta^2(y-\lambda)$, dunque avremo la (innalz.^{do} a quad.^{to} la (21))

$$(22)\quad \frac{1}{r^4}\frac{dr^2}{dy^2} = \frac{e^2}{a^2(1-e^2)^2} - \frac{e^2\theta^2(y-\lambda)}{a^2(1-e^2)^2}.$$

Dalla (2) poi si ha

$r + er\theta(y-\lambda) = a(1-e^2)$, e però

$$\frac{r}{a(1-e^2)} + \frac{er\theta(y-\lambda)}{a(1-e^2)} = 1,$$ donde

$$\frac{e\theta(y-\lambda)}{a(1-e^2)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{a(1-e^2)},$$ la quale innalzata a quad.^{to} dà

$$\frac{e^2\theta^2(y-\lambda)}{a^2(1-e^2)^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{a(1-e^2)}\frac{1}{r} + \frac{1}{a^2(1-e^2)^2},$$ per cui la (22) si cambia nella

$$(23)\quad \frac{1}{r^4}\frac{dr^2}{dy^2} = \frac{e^2}{a^2(1-e^2)^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2}{a(1-e^2)}\frac{1}{r} - \frac{1}{a^2(1-e^2)^2};$$ per q.to valore la equazione (18) viene surrogata dalla

$$(24)\quad \frac{a^2e^2}{a^2(1-e^2)^2} + \frac{2a^2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r} - \frac{a^2}{a^2(1-e^2)^2} = b - 2\int R\,dr.$$

il differenziale di questi è

$-\frac{2c^2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{dr}{r^2} = -2R\,dr$, d'onde

(25) $R = \frac{c^2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r^2}$. Poniamo per semplicità la

(26) $\frac{c^2}{a(1-e^2)} = \mu$, e si avrà la

(27) $R = \mu\cdot\frac{1}{r^2}$. Vedremo come si determina μ. Intanto si vede essere la forza continua che trattiene il pianeta nella sua orbita in ragion reciproca del raggio vettore, la qual cosa si è pure veduta al §. 178. ove le forze sono come i quadrati delle velocità. Egli è dunque per l'azione di una forza continua variabile secondo questa legge con una impulsione istantanea primitiva, che ciascun pianeta descrive un'ellisse del cui fuoco è il centro del sole. La quantità μ, esprime l'intensione di essa fatta forza all'unità di distanza. La μ è funzione di c, a, e le quali quantità hanno valori differenti per ciascun pianeta: dunque dovremo vedere se la μ varii, e mostreremo che è costante secondo della terza legge di Keplero. —

§. 495. Sia T il tempo della rivoluzione di un pianeta intorno al sole. Si è dedotto che c rappresenta il doppio dell'area trascorsa in un unità di tempo, e però cT sarà il doppio dell'area descritta nel tempo T per la 1.ª legge di Keplero. Ma nel lasso del tempo T il raggio vettore descrive l'intera elisse di cui l'area è rappresentata da

$\frac{b}{a}\int(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$, mentrecchè $\int(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$ rappresenta l'area del circolo circoscritto all'elisse. Sia E l'area dell'ellisse, quella del circolo circoscritto sarà $a^2\pi$, e però avremo

$\pi a^2 : E :: 1 : \frac{b}{a} :: 1 : \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$

$:: 1 : \frac{\sqrt{a^2-a^2e^2}}{a} :: 1 : \sqrt{1-e^2}$, donde avremo l'equazione

(28) $E=\pi a^2\sqrt{1-e^2}$, e quindi la

(29) $cT=2\pi a^2\sqrt{1-e^2}$; d'onde

$c=\frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}$; ponendo questo valore nella (26) ne verrà la

(30) $\mu=\frac{4\pi^2a^4(1-e^2)}{T^2(1-e^2)a}=\frac{4\pi^2a^3}{T^2}$, relativamente ad un altro pianeta sia T_1 il tempo della sua rivoluzione, e si avrà

(31) $\mu_1=\frac{4\pi^2a_1^3}{T_1^2}$; ma per la terza legge si ha

$T^2 : T_1^2 :: a^3 : a_1^3$, dunque

$\frac{a^3}{T^2}=\frac{a_1^3}{T_1^2}$; dunque $\mu=\mu_1$.

L'intensione della forza continua che agisce sui pianeti è dunque la stessa per tutti i corpi all'unità di distanza; questa forza non varia che in ragione delle distanze dal Sole e dalle posizioni loro. Laonde figurati due pianeti locati alla med.a distanza dal Sole essi saranno sollecitati dalla med.a forza continua ed abbandonati a sè stessi camminerebbero secondo la retta che unisce il centro di gravità del pianeta e del Sole: mostrasi quindi una singolare analogia tra la forza che rattiene i pianeti nelle loro orbite e la gravità terrestre.

§. 456. Non basta conoscere la natura dell'orbita dei pianeti che ci è stata data dall'osservazione ma è mestieri avere i valori di r e di η in funzione di t, affine di assegnare la posizione del mobile in ciascun punto della sua trajettoria, i quali valori si ottengono combinando fra se le (2) e (6). Ad es. se abbiasi $r = f(t)$ dalla (6) si ha

(32) $d\eta = \frac{dt\, h}{r^2}$; la quale è sep. rata e per fare almeno s.

se potrà avere l'integrale e dalla (2) avere r. Se fosse
$y = \varphi(t)$ si avrebbe
$dy = \varphi'(t)\,dt$, per cui la (6) riducesi alla
(33) $r^2\varphi'(t) = C$, da cui
$r = \psi(t)$; quindi mediante la (2) si otterrà almeno per serie il valore di y in funzione di t.

Lezione 103.

§. 497. Supponiamo ora data la legge secondo la quale agisce la forza continua sul pianeta e cerchiamo la trajettoria di lui e la legge del moto.

Seguitiamo a rappresentare con r il raggio vettore in un punto qualunque e $\frac{\mu}{r^2}$ la forza continua secondo questo raggio.

Egli è chiaro che un punto materiale gettato nello spazio secondo una direzione qualunque è soggetto all'attrazione di un punto fisso che si deve muovere per il piano che passa per questa retta e per la retta che unisce il punto materiale con il centro fisso, avvegnacchè tutto è simile da una parte e dall'altra e non vi ha ragione perchè il pianeta debba sortire dal piano. Si dovrà dunque concludere che l'orbita dei

pianeti è una curva piana, il cui piano è quello che all'origine del moto passa pel raggio vettore, e per l'origine. Figuriamo in questo piano per tratti pel centro del sole (fig. 104) due assi ortogonali AX AY, e le componenti della forza $\frac{\mu}{r^2}$ secondo questi assi saranno $\frac{\mu x}{r^3}$, $\frac{\mu y}{r^3}$, e quindi osservando che queste forze tendono a diminuire le coordinate x, y avremo le due equazioni del moto

(34) $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}$

(35) $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}$, ove dt è l'elemento del tempo; moltiplicando queste equazioni rispettivamente per $2dx$, e $2dy$ e sommando i prodotti si avrà

$\frac{2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y}{dt^2} = -\mu\frac{2xdx+2ydy}{r^3}$
$= -\frac{\mu d.(x^2+y^2)}{r^3} = -\mu\frac{d.r^2}{r^3} =$
$-2\mu\frac{dr}{r^2}$, ed integrando deducesi la

(37) $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + b = 0$, essendo b la costante arbitraria che completa l'integrale.

Moltiplicando le (34) e (35) rispettivamente per y e per x, la differenza dei prodotti sarà

(38) $\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = \frac{\mu xy - \mu xy}{r^3} = 0$

ossia avremo la

(39) $xd^2y - yd^2x = 0$, di cui l'integrale

(40) $xdy - ydx = cdt$, essendo c, la costante.

L'equazioni adunque (37) e (40) sono due integrali completi di 1° ordine delle equazioni (34) e (35). – Per trasformare le coordinate ortogonali in polari r, e φ, porre si debbe

(11) $x = r\cos\varphi$,

(12) $y = r\sin\varphi$, d'onde le

(13) $dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$

(14) $dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$, fatta sostituzione nelle (37) e (40) si ottengono le

(41) $\frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + b = 0$,

(42) $r^2 d\varphi = cdt$, d'onde

$dt = \frac{r^2 d\varphi}{c}$, il quale valore sostituito nella (41) la cambia nella

(43) $\frac{c^2(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{r^4 d\varphi^2} - \frac{2\mu}{r} + b = 0$;

pongasi

(44) $r = \frac{1}{z}$, ed avremo la

(45) $dr = -\frac{dz}{z^2}$, per cui la (43) mutasi nella

$\frac{c^2 z^4}{d\varphi^2}\left(\frac{dz^2}{z^4} + \frac{1}{z^2}d\varphi^2\right) - 2\mu z + b = 0$

ovvero

(46) $\frac{c^2 dz^2}{d\varphi^2} + c^2 z^2 - 2\mu z + b = 0$. Equaz.

derivata di 1.° ordine della trajettoria. Sciolta la (46) rispetto a dy si ha la

(47) $dy = \frac{c\,dz}{\sqrt{2\mu z - b - c^2 z^2}}$; moltiplicando numeratore e denominatore di questa per $\frac{c}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}$ avremo

(48) $dy = \frac{c^2 dz}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}} : \frac{c\sqrt{2\mu z - b - c^2 z^2}}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}} =$

$\frac{c^2 dz}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}} : \sqrt{1 - \left(\frac{\mu - c^2 z}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}\right)^2}$, di cui l'integrale completo è la

(49) $y = c_1 + A\left(\theta = \frac{\mu - c^2 z}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}\right)$, essendo c_1 la costante arbitraria.

onde

$y - c_1 = A\left(\theta = \frac{\mu - c^2 z}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}\right)$; dunque

$\theta(y - c_1) = \frac{\mu - c^2 z}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}$, e quindi la

(50) $c^2 z = \mu - \sqrt{\mu^2 - bc^2}\,.\,\theta(y - c_1)$; ma $z = \frac{1}{r}$, dunque avremo la

(51) $c^2 = \mu r - r\sqrt{\mu^2 - bc^2}\,.\,\theta(y - c_1)$.

Per mettere in evidenza che la (51) rappresenta una curva di 2.° ordine prendiamo gli assi coord.i ortogonali AX', AY' che passano pel centro del sole, ed allora il raggio vettore r, farà coll'asse AX' l'angolo $m\bar{r}X' = m\bar{r}X - X'\bar{r}X = y - \lambda$; ma l'angolo λ è arbitrario e porrò si qui $c_1 = \lambda + \pi$; e quindi a vece di

$\theta(y-a)$ surrogare si può
$\theta(y-(\lambda+\pi))$: ma $\theta(y-(\lambda+\pi))$
$=\theta-(\pi+\lambda-y)=\theta(\pi+\lambda-y)$;
ma $\theta(\pi+\lambda-y)=-\theta(\lambda-y)=$
$-\theta(y-\lambda)$, dunque la (51) può
essere presentata dalla

(52) $c^2=\mu r+r\sqrt{\mu^2-bc^2}.\theta(y-\lambda)$; per
passare dalle coord.e polari
alle rettangole fa d'uopo por-
re (essendo x', y', le coord.e rett.e)
$r=\sqrt{x'^2+y'^2}$, e
$\theta(y-\lambda)=\frac{x'}{r}$, il che muta
la (52) nella

(53) $c^2=\mu\sqrt{x'^2+y'^2}+x'\sqrt{\mu^2-bc^2}$, d'onde
avremo
$\mu\sqrt{x'^2+y'^2}=c^2-x'\sqrt{\mu^2-bc^2}$, e poi
$\mu^2(x'^2+y'^2)=c^4-2c^2x'\sqrt{\mu^2-bc^2}+$
$x'^2(\mu^2-bc^2)$, ossia

(54) $\mu^2y'^2+bc^2x'^2=c^4-2c^2x'\sqrt{\mu^2-bc^2}$
equazione che evidentemen-
te rappresenta un'elisse
od un iperbola o parabola
secondo che b è positivo
negativo o nullo. Ma per
cambiare assi coord.ti non
cambia la natura della
curva. Dunque la trajetto-
ria è una delle sezioni coni-
che. Dalla (53) si ha
$\sqrt{x'^2+y'^2}=r=\frac{c^2-x'\sqrt{\mu^2-bc^2}}{\mu}$,
il quale valore di r è fun-
zione di x'. Dal che ne

ne viene che qualunque delle tre curve venga presentata dalla (54) l'origine delle coordinate è nel fuoco della curva. Se fosse $u^2 = bc^2$, la (54) riducesi alla

(55) $u^2(y^2 + x^2) = c^4$, ovvero

(56) $y^2 + x^2 = \frac{c^4}{u^2}$, equazione di un circolo coll'origine al centro, ovvero un elisse di eccentricità nulla.

Risulta quindi, che gettato un corpo nello spazio, il quale sia sollecitato da una forza continua diretta verso il centro fisso, e di cui l'intensione sia in ragion reciproca del quadrato della distanza stessa, passa una trajettoria che è una curva di 2.° Ordine

§. 498. All'origine del moto sia r' la lunghezza del raggio vettore, cioè abbiasi la

(57) $r = r'$, e sia v' il valore della velocità v in questo punto, vale a dire si abbia la

(58) $v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}{dt}$ $= v'$, §. 494. e sia δ l'angolo che la velocità v' fa con il raggio vettore r' all'origine del moto, onde la componente della velocità v', sarà $v' \cos\delta$, che viene presentata da $\frac{dr}{dt}$, dunque si avrà

(59) $\frac{dr}{dt} = v'\theta\delta$. Oltre a questa all'origine del moto si ha la
(57) $r = r'$, e
(60) $\frac{dr^2 + r^2 dy^2}{dt^2} = v'^2$, ossia
(61) $\frac{v'^2\theta^2\delta^2 + r'^2 dy^2}{dt^2} = v'^2$, ossia
(62) $\frac{dy^2}{dt^2} = \frac{v'^2}{r'^2} - \frac{v'^2\theta^2\delta}{r'^2} = \frac{v'^2(1-\theta\delta)}{r'^2} = \frac{v'^2\theta^2\delta}{r'^2}$. Fatta sostituzione nelle (41) e (42) si ottiene

(41) $\frac{dr^2+r^2dy^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + b = 0$
(42) $r^2 dy = c\,dt$

(63) $v'^2 - \frac{2\mu}{r'} + b = 0$,
(64) $c = r'v'\theta\delta$. Dalla equazione (63) deducesi la
(65) $b = \frac{2\mu}{r'} - v'^2$, la costante arbitraria b, sarà dunque positiva negativa o nulla secondo che $v'^2 < \frac{2\mu}{r'}$, $v'^2 > \frac{2\mu}{r'}$, o $v'^2 = \frac{2\mu}{r'}$.

Concludere adunque si debbe che la specie della curva di 2° ordine descritta dal mobile dipenderà dalla sua velocità e distanza dal centro fisso, essendo indipendente dalla direz.e della velocità insiziale e s'influirà sulla trajettoria perchè entra nel valore di c. Se abbiasi
$\mu^2 = bc^2 = \left(\frac{2\mu}{r'} - v'^2\right) r'^2 v'^2 \theta^2 \delta$, la trajettoria sarebbe un circolo.

L'osservazione ci aveva resi certi che le orbite dei

pianeti sono elissi in un fuoco delle quali era il sole, e dietro ciò si è trovato che la forza che sollecita il pianeta è in ragion reciproca del raggio vettore.

Il Calcolo poi ci mostrò che la forza istantanea combinata colla continua le può far descrivere un circolo, un'elisse od un iperbole, quindi esservi possono corpi che veduti da noi una volta mai più si vedono.

§. 199. Consideriamo in particolare il caso dell'elisse e determiniamo in tal caso r e y.

Dalla (42) ottiensi la

(42) $r^2dy = cdt$

(41) $\frac{dr^2+r^2dy^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + b = 0,$

(67) $dy = \frac{cdt}{r^2}$, per cui la (41) diventa

(68) $\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{c^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} + b = 0$. Il più grande ed il più piccolo valore che ha luogo di r, si deve determinare ponendo la

(69) $\frac{dr}{dt} = 0$, ossia la

(70) $\frac{c^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} + b = 0$, ovvero

(71) $r^2 - \frac{2\mu}{b}r + \frac{c^2}{b} = 0$; ma al §. 193 si è veduto che $a(1+e)$ ed $a(1-e)$ rappresentano rispett.^e il mass. e min. raggio vettore, dunque queste due quantità esser debbono radici della (71) e perciò avremo

$\frac{2\mu}{b} = a(1+e) + a(1-e) = 2a$

o $\frac{c^2}{b} = a^2(1-e^2) = a(1+e)a(1-e)$
d'onde

(72) $b = \frac{\mu}{a}$, e però $\frac{c^2 a}{\mu} = a^2(1-e^2)$ e

(73) $c^2 = \mu a(1-e^2)$, questi valori di c^2, e b si deducono ancora dalla

(2) $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\theta(\gamma-\lambda)}$, e

(52) $c^2 = \mu r + r\sqrt{\mu^2-bc^2}\,\theta(\gamma-\lambda)$

ciascheduna delle quali rappresenta la trajettoria. Dalla (52) si ha

$$r = \frac{c^2}{\mu+\sqrt{\mu^2-bc^2}\cdot\theta(\gamma-\lambda)},$$ che

deve essere lo stesso di quello dato dalla (2) e però avremo

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e\theta(\gamma-\lambda)} = \frac{c^2}{\mu+\sqrt{\mu^2-bc^2}\cdot\theta(\gamma-\lambda)}$$

che debb'essere vera prideuctis di termini e riducendo a denominator comune, si ha

(74) $a\mu(1-e^2)+a(1-e^2)\sqrt{\mu^2-bc^2}\,\theta(\gamma-\lambda) = c^2+c^2e\theta(\gamma-\lambda)$.

È evidente che debbono essere eguali i coeff.i che contengono $(\gamma-\lambda)$ ossia si avrà

$a\mu(1-e^2) = c^2$, che è la (73)

(75) $a(1-e^2)\sqrt{\mu^2-bc^2} = c^2e$, sost.o il valore di c^2 trovato, si ha

$a(1-e^2)\sqrt{\mu^2-bc^2} = ea\mu(1-e^2)$ e quindi la

(76) $e = \frac{\sqrt{\mu^2-bc^2}}{\mu}$, d'onde la

(77) $e^2\mu^2 = \mu^2-bc^2$, e

$b = \frac{\mu^2-e^2\mu^2}{c^2} = \frac{\mu^2-e^2\mu^2}{\mu a(1-e^2)} =$

$= \frac{[illegible](1-e^2)\mu}{a(1-e^2)} = \frac{\mu}{a}$. I valori di c^2, e di b^2 sostituiti nella (68) la mutano nella

(78) $$\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{a\mu(1-e^2)}{r^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = 0,$$

onde

(79) $$dt = \frac{\sqrt{\frac{a}{\mu}}\cdot r\,dr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}.$$ Ad ottenere l'integrale si ponga la

(80) $r = a(1-e\cos u)$ essendo u una nuova variabile, e si avrà

$dr = ae\sin u\,du$

$(r-a)^2 = a^2e^2\cos^2 u = a^2e^2(1-\sin^2 u)$ e quindi

$a^2e^2-(r-a)^2 = a^2e^2\sin^2 u$, per cui la (79) mutasi nella

(81) $$dt = \frac{\sqrt{\frac{a}{\mu}}\cdot a^2e(1-e\cos u)\sin u\,du}{ae\sin u} = (1-e\cos u)\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}du.$$

Pongasi per semplicità $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{m}$, e ne avrà la

(82) $m\,dt = (1-e\cos u)du$, di cui l'integrale completo è la

(83) $nt = u - e\sin u + c$, equazione che dà il valore di u in funzione di t. Mediante poi la (80) si otterrà il valore di r in funzione di t; ciò conosciuto, la (2) darà il valore di φ in funzione di t. Ciò conosciuto si potrà in un istante qualunque determinare la posizione del pianeta nella sua orbita

Lezione 104.

§. 560. L'eccentricità delle orbite de' pianeti è in generale una frazione piccolissima, il che permette di trascurare nella (2) $r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\theta(y-\lambda)}$, e^2 senza errore sensibile, per la qual cosa essa si riduce alla

(84) $r=\frac{a}{1+e\theta(y-\lambda)}$, moltiplicando numeratore e denom.e per $1-e\theta(y-\lambda)$ avremo la

(85) $r=\frac{a(1-e\theta(y-\lambda))}{1-e^2\theta^2(y-\lambda)}$; trascurato e^2, si ha $=a(1-e\theta(y-\lambda))$ onde

(86) $r^2=a^2(1-e\theta(y-\lambda))^2$; sviluppando e trascurati i termini che contengono e^2 si ha $=a^2(1-2e\theta(y-\lambda))$; ma sih(?) (6) $r^2dy=c\,dt$, la quale ss(?) la (73) $a\mu(1-e^2)=c^2$ si converte nella

(87) $r^2dy=\sqrt{a\mu(1-e^2)}.dt$ nella quale mettendo il valore di r^2 dato dalla (85) e posto $e^2=0$, si otterrà la

(88) $(1-2e\theta(y-\lambda))dy=\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}dt$; poniamo $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}=\frac{1}{n}$, ed avremo l'equazione

(89) $(1-2e\theta(y-\lambda))dy=n\,dt$, di cui l'integrale è

(90) $y-2e\theta(y-\lambda)=nt+K$ essendo K la costante arbitraria che completa l'integrale.

A maggiore semplicità porremo nulle le costanti λ, k il che corrisponde a contare y da AX' che passa pel perielio e il tempo t dal punto stesso per cui si ha contemporaneamente $y=0$, $k=0$. Dalle (90) in tal caso si ha

(91) $y = ut + 2e\,0y$; se si ponesse $e=0$, si avrebbe

(92) $y = ut$, e però lasciato alla (91) la ut, messo a vece di y ut, si deriverà

(93) $y = ut + 2e.0.ut$. Se dunque nella (86) si ponga $\lambda = 0$, e $y = t$, si avrà

(94) $r = a(1 - e0.ut)$. Mediante queste due equazioni si avrà in ciascun punto la posizione del pianeta nelle fatte supposizioni. ——

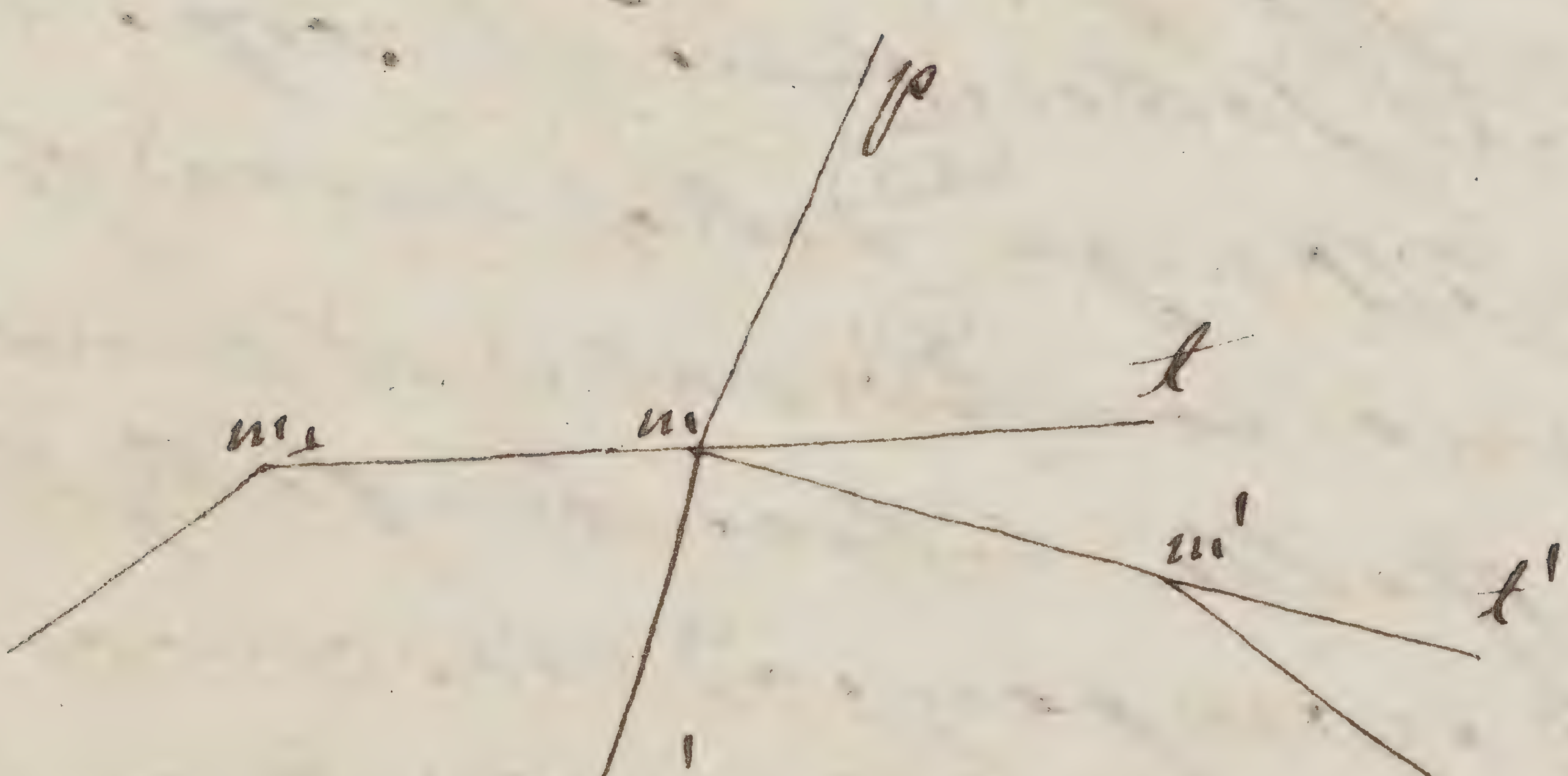
Capitolo XXXVIII.

Del moto di un punto materiale sopra una data linea

§. 501. Quando un punto materiale è costretto a muoversi sopra una curva piana o a doppia curvatura, la resistenza che q.sta curva oppone al movimento del punto equivale ad una forza che agisce sempre sul mobile in una direzione perpend.re alla curva stessa la quale ne è la trajettoria. Di guisa che aggiungendo alle forze che sollecitano il corpo la resistenza della curva si può considerare il punto affatto libero. Infatti, se si scomponga ciascuna forza sollecitante il punto materiale ~~[illegible]~~ in due l'una perpend.re alla tangente la curva, e l'altra secondo la tangente: le sole componenti nella dirz. della tangente avranno il loro effetto, e le forze perpendicolari alla tangente che sono normali alla curva saranno distrutte dalla resistenza di lei. La risultante T delle componenti perpend.i alla curva espri-

meri la pressione esercitata in ciascun punto sulla curva. La resistenza che distrugge siffatta pressione sarà una forza continua eguale a P. Questa P sarebbe la sola sopportata dalla curva se il mobile fosse in riposo; ma essendo in moto fa nascere un'altra pressione dipendente dalla tendenza che ha il mobile ad andarsene per la tangente. Il vederlo in evidenza supponiamo alla curva un poligono infinitilatero e consideriamo il ~~passaggio~~ ~~del~~ mobile nel passaggio da un latercolo all'altro.

Siano (fig. 105) m_1m, mm' due latercoli consecutivi e prolungati i lati in t, t', l'angolo tmt' fatto dalle tangenti nomasi angolo di contatto che è piccolissimo nelle curve continue. Poniamo $tmt' = \omega$ indefinitamente piccolo; si sa che il piano determinato dai latercoli m_1m, e mm', o dalle due tangenti è il piano del circolo osculatore del punto m. Se la curva è a doppia curvatura questo piano varia da un punto all'altro della curva, ed è costante



(Fig. 105.)

per le curve piane.

Sia v la velocità del mobile allorchè attinge il punto m che avrà la direzione mt; scomposta essa in due una nella direzione mm', e l'altra ad essa perpend. le componenti saranno $v \cos \omega$, $v \operatorname{sen} \omega$: la $v \operatorname{sen} \omega$ è distrutta dalla resistenza della curva; ma $v \operatorname{sen} \omega$ è indeterminatamente piccola perchè tale è ω; e perciò potremo concepire una forza continua la quale agisca sul mobile imprimendogli in ciascun punto della trajettoria una velocità nella stessa direzione ed intensione che la $v \operatorname{sen} \omega$. Sia Q una così fatta forza, e la resistenza della curva sarà eguale ed opposta ad essa Q.

L'altra componente $v \cos \omega$ esprime la velocità con la quale il mobile comincia a muoversi sulla lato consecutivo mm'; ma era animato dalla velocità v, dunque detta p la velocità perduta si avrà

$v - p = v \cos \omega$, e però

$p = v - v \cos \omega = v(1 - \cos \omega) = 2v \operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{2}$

per la trig.

Potremo poi attribuire questa diminuzione di velocità ad una seconda forza continua agente nella direz. della tang. alla trajettoria e in senso contrario

a quelli del moto. Sia $\mathcal{C}'$ la novella forza, e si avrà

$\mathcal{C}' : \mathcal{C} :: 2v\theta\hat{w} : v\theta w$, d'onde

$$\frac{\mathcal{C}'}{\mathcal{C}} = \frac{2v\theta\hat{w}}{v\theta w} = \frac{2\hat{w}}{\theta w} = \frac{1-\theta w}{\theta w}$$

$$= \frac{1-\theta w}{\sqrt{1-\theta^2 w}} = \frac{\sqrt{1-\theta w}}{\sqrt{1+\theta w}} = \frac{\sqrt{2.\theta\hat{w}}}{\sqrt{2.\theta\hat{w}}}$$

$= \sigma\hat{w}$, che è indeterminatamente piccola perchè wi indeterminatamente piccola e tale tangente, e però $\mathcal{C}'$ sarà piccolissimo rispetto a $\mathcal{C}$ e però da trascurarsi — Nel calcolo adunque della pressione si deve omettere.

Laonde conchiudesi si deduce che la pressione totale che un punto materiale in moto esercita sulla curva che è costretto a descrivere è la risultante delle due forze normali $\mathcal{C}$ e P; la 1.a dovuta alla velocità del mobile e la 2.a alle forze che sollecitano il mobile. La resistenza della linea è una forza eguale ed opposta a questa —

§.502. Non fa mestieri conoscere questa resistenza per trovare le equazioni del moto del punto materiale. All'uopo basta sapere ch'ell'è una forza continua e però paragonabile alle altre forze continue che sollecitano il mobile che la sua dire-

di tutte le forze che sollecitano il corpo.

direzione è normale alla trajettoria.

Siano x, y, z le coord.e ortogonali le quali corrispondono alla fine del tempo t, e siano X, Y, Z le ~~forze~~ componenti parallele agli assi. La forza normale si chiami N, ed avremo la

(1.) $\cos^2 N\hat{X} + \cos^2 N\hat{Y} + \cos^2 N\hat{Z} = 1.$

Gli angoli poi che fa la tangente la curva cogli assi coordinati hanno rispettivamente per coseni $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. La N è perpendicolare alla tangente in un medesimo punto la trajettoria, dunque pel veduto nell' D.e si avrà la

(2.) $\frac{dx}{ds}\cos N\hat{X} + \frac{dy}{ds}\cos N\hat{Y} + \frac{dz}{ds}\cos N\hat{Z} = 0.$ Le componenti della N parallele agli assi delle x, y, z, sono rispett.te $N\cos N\hat{X}, N\cos N\hat{Y}, N\cos N\hat{Z}$; dunque avremo immediatamente le tre equazioni del moto, cioè sono

(3) $\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos N\hat{X}$

(4) $\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos N\hat{Y}$

(5) $\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos N\hat{Z}$. Mediante le 5. trovate equazioni potremo eliminare, N, $N\cos N\hat{X}, N\cos N\hat{Y}, N\cos N\hat{Z}$: la risultante dall'eliminazione sarà un equaz.e derivata di 2.o ordine contenente x, y, z, e t; siccome si suppo

ne data la trajettoria cioè la curva, che per maggior generalità la supporremo data dall' equazione di due superficie che sieno

(6) $f(x,y,z)=0$,

(7) $f_1(x,y,z)=0$ dall' intersecazione delle quali ne venga la trajettoria. In tal modo avremo tre equazioni dipendentemente avremo le coordinate x, y, z del mobile in funzione di t, e però il punto in cui si trova il mobile.

= §. 503. Moltiplicate le (3) (4) e (5) rispettivamente per dx, dy, dz, la somma de' prodotti sarà

$$\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2} =$$
$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz+N(dx\cos N^{\wedge}x + dy\cos N^{\wedge}y+dz\cos N^{\wedge}z)$$; ma la quantità entro parentesi è zero per la (2), dunque questa si riduce alla

(8) $$\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2} = X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$$, come si trovò quando il punto era affatto libero. Quest' equazione è indipendente da N e sua direzione.

Ma si ha $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ dunque differenziando si avrà

$$d^2s=\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$
$$=\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{ds}$$, e però

$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z$

Per questo valore la (8) si muta in quella

(9.) $\frac{d^2s}{dt^2} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}$.

Si osservi che $X\frac{dx}{ds}$, $Y\frac{dy}{ds}$, $Z\frac{dz}{ds}$, sono le componenti secondo la tangente di X, Y, Z, cioè le componenti della forza che sollecita il mobile della quale X, Y, Z sono le componenti secondo i tre assi ortogonali.

Potremo dunque concludere che componente secondo la tangente della forza che sollecita il mobile eguaglia la 2.ª derivata di s, divisa per dt^2 come quando il mobile è affatto libero.

L'espressione $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, può essere o non essere diff.le esatta. Se supponiamo che q.to trinomio sia differenziale esatto indipendentemente da qualunque relazione fra x, y, z la (8) sarà integrabile, difatti poniamo

(10.) $\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = f_1(x,y,z)$

Integrando adunque la (8) otterremo la

(11.) $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2 = 2f_1(x,y,z) + C$, perchè il 1.º membro andrebbe diviso per 2.

Per mezzo delle equaz.i della

trajettoria (6), e (7) si possono ottenere y, z in funzione di x, e però ridurre la (11) a non contenere che x e t. Ciò fatto si avrà un'equazione di 1.° ordine in x, dx, e dt, che potremo supporre presentata dalla

(12) $dt = F(x)\,dx$, che è separata e dipende dall'integraz.e di una funzione ad una sola variabile. Integrata si avrà x in funzione di t e per converso. Si dovrà dunque concludere che quando il trinomio $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ è un differenziale esatto la determinazione del moto del punto materiale dipenderà dall'integraz.e di una funz.e ad una sola variabile.

§. 504. Allorchè la (11) ha luogo si deducono conseguenze notabili relative al moto del mobile.

Supponiamo $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, il che torna lo stesso che il mobile non sia animato da forze continue, e si avrà

(13) $f_r(x, y, z) = 0$ e però la

(14) $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = c$, il che mostra essere il ...

drato della velocità eguale alla costante c.

Dal che conseguita che un punto materiale animato solo da una forza istantanea e non da forze continue costretto a muoversi su d'una curva ritiene invariata la sua velocità, la qual cosa si deduce ancora dal dimostrato al §. 501.

Vediamolo come pel dimostrato al §. 501 ciò si deduca. In questo paragrafo si è veduto che la diminuzione di velocità nel passaggio da un lato al consecutivo del poligono è presentata da $2v\theta\frac{\omega}{\lambda}$; ma si è veduto ancora che ω è indeterminatamente piccolo dunque $\theta\frac{\omega}{\lambda}$ sarà un indeterminatamente piccolo di 2.° ordine cioè sarà indeterminatamente piccolo a petto di $\frac{\omega}{\lambda}$.

Dunque è da conchiudersi che la diminuzione di velocità nel passaggio da un lato all'altro è un infinitesimo di 2.° ordine, il quale è notato da un tre ∞ di 1.° ordine, e però la diminuzione sarà un infinitesimo di 1.° ordine.

Dunque il passaggio di un corpo ~~al al~~ da un punto all'altro della trajettoria non può produrre che un infinitesimo di 1.° ord.e e però trascurabile. Questi risultamenti sup.

pongono la curva continua altrimenti negli angoli finiti che formerebbero delle rette la velocità diminuirebbe proporzionalmente al quad. del sen dell'angolo stato.

Lezione 105.
la 106. Ripet.

§. 505. Se le forze X, Y, Z non fieno nulle la velocità del mobile non è più costante, ma ella è indipendente del tutto dalla trajettoria che il mobile è obbligato a passare. Difatti: sia v la velocità che alle coordinate x, y, z corrisponde, ed A la velocità corrispondente alle coord. a, b, c; Dalla (1) si ha la

(15) $v^2 = A^2 + 2f_r(x,y,z) - 2f_r(a,b,c)$ la quale mostra che le differenze dei quadrati delle velocità in due diversi punti della trajettoria non dipende che da f_r e coord.

Questo risultamento è analogo a quello trovato al §. 475 relativam. ad un punto materiale libero.

§. 506. Dalla (15) mostrasi altresì che se più mobili, sottoposti all'azione delle med. forze continue partano da un punto di cui le coord. sieno a, b, c con la velocità comune A, e si muovano sopra diverse linee

essi avranno tutti la med.ª ve-
locità allorchè attingeranno
la superficie data dalla

(16) $fr(x,y,z)=C_1$, essendo C_1 una
costante arbitraria. Difatti,
dipend.e dalla (16) la (15) ridu-
cesi alla

(17) $v^2 = A^2 + 2C_1 - 2fr(a,b,c)$, d'onde

(18) $v = \sqrt{A^2 + 2C_1 - 2fr(a,b,c)}$, che
è costante.

Poniamo ad es. che la sola
gravità g agisca sul mobile,
e si prenda verticale l'asse
delle Z, e diretto secondo la
gravità; in tal caso si avrà
$X=0$, $Y=0$, $Z=g$, e quindi la

(19) $\int(Xdx+Ydy+Zdz)=fr(x,y,z)$
$=gz$, onde la (16) si muta
nella

(20) $gz=C_1$ che rappresenta un
piano orizzontale ossia pa-
ralello all'(x,y). Laonde
concludere si debbe, che se un
n.º qualunque di punti ma-
teriali pesanti scorrano su
diverse linee e partano dallo
stesso punto con la med.ª velo-
cità iniziale, essi avranno
velocità uguali allorchè attin-
gono un piano orizzontale;
risultamento che non è che
un estensione di quello avuto
al §. 446.

§. 507. Prendiamo ora in considerazione la pressione esercitata dal mobile sopra ~~pi~~ ciascun punto della trajettoria. Perciò converrà determinare P e Q e le loro risultante di conseguenza.

Si prenda la risultante delle forze X, Y, Z; e per la direzione di questa forza e la tangente nel punto considerato si figuri condotto un piano, e sopra di lui si scomponga la risultante in due; l'una diretta secondo la tangente e ~~tt~~ l'altra ad essa perpend.e che sarà la pressione P. Rispetto alla Q si è dimostrato al §. che in ciascun istante impri.me al mobile una velocità $v\sigma\omega$ indeterminatam.e piccola; ma la forza continua ha per misura l'elemento della velocità che s'imprime al mobile diviso per l'elemento del tempo t, §. 429, dunque avremo la

(21) $Q = \frac{v\sigma\omega}{dt}$; quando l'arco è in determinatam.e piccolo si può prendere a voce del ...

Dunque avremo

(22) $Q = \frac{w.v}{dt}$; Ma si è ved.° al §. 294 che l'angolo in un ~~t~~ punto qualunque della curva = l'elemento ds, diviso per il raggio di curvatura; dunque posto esso r, si avrà

(23) $w = \frac{ds}{r}$

e però,

(24) $Q = \frac{v}{r} \cdot \frac{ds}{dt}$; ma $\frac{ds}{dt} = v$, dunq.

(25) $Q = \frac{v^2}{r}$, che è la pressione dovuta alla velocità ~~d~~ del mobile ed è quella che dicesi forza centrifuga.

Adunque, la forza centrifuga è in ragion diretta della velocità ed inversa del raggio di curvatura ove essa si considera. La direzione della forza centrifuga in un punto qualunque m (fig 105) coincide colla normale nel piano del circolo osculatore, cioè colla linea che cade dalla parte convessa della curva, e però tende essa a scostare il punto mobile dal centro d'attrazione, come si è davanti veduto.

Conosciute le P, Q in grandezza e direzione, si determinerà la pressione totale prendendo la risultante di queste due forze.

---

§. 508. Allorchè la trajettoria è una linea piana, e che tutte

le forze agenti sul mobile sono dirette nel piano di lui, le due forze P, Q saranno dirette secondo la medesima retta, e la pressione eguaglierà la loro somma, o la loro differenza secondo il senso nel quale agiscono. In tal caso sia R la risultante delle forze continue applicate al mobile, e δ l'angolo acuto od ottuso che la normale fa con essa dalla parte concava della curva cioè colla n, e si avrà

(26) $P = R\theta\delta$, e la pressione al punto in fatta astrazione dal segno sarà

$\frac{v^2}{\gamma} - R\theta\delta$; inoltre essa eserciterà la sua pressione secondo n, come la forza centrifuga se $\frac{v^2}{\gamma} - R\theta\delta$ sia positivo, e in senso contrario se negativo.

§. 509. La forza N che entra nelle equazioni generali del moto è ora conosciuta perchè è eguale ed opposta alla pressione già determinata.

Nulladimeno non sarà inutile il dimostrare come si determini col mezzo delle trovate equazioni supponendo per maggior semplicità

trajettoria piana, le forze che sollecitano il mobile su questo piano. Prendendo questo piano per l'(x, y) le equazioni (1) e (2) si mutano nelle

(27) $\theta^2 N\hat{X} + \theta^2 N\hat{Y} = 1$

(28) $\frac{dx}{ds}\theta N\hat{X} + \frac{dy}{ds}\theta N\hat{Y} = 0$, cui si debbono aggiungere le

(3) $\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\theta N\hat{X}$

(4) $\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\theta N\hat{Y}$. Trattasi di dedurre da queste la forza N la cui intensione debbe esser presentata da una quantità positiva, nel mentre che la direzione viene data dagli angoli $N\hat{X}$, $N\hat{Y}$ che ne determinano la posizione, e che dedurre debbonsi dalle equazioni del moto. Dalla (28) si ha

(29) $\theta N\hat{X} = -\frac{dy}{dx}\theta N\hat{Y}$, per cui la (27) mutasi nella

$\frac{dy^2}{dx^2}\theta^2 N\hat{Y} + \theta^2 N\hat{Y} = 1$, ovvero

$(dx^2 + dy^2)\theta^2 N\hat{Y} = dx^2$; ossia

$ds^2\theta^2 N\hat{Y} = dx^2$, e poi la

(30) $\theta N\hat{Y} = \pm\frac{dx}{ds}$; si troverebbe similmente la

(31.) $\theta N\hat{X} = \pm\frac{dy}{ds}$, che sostituite nella (28) si ha

$\pm\frac{dx\,dy}{ds^2} \mp \frac{dx\,dy}{ds^2} = 0$, come esser deve che avanti ai valori di $\theta N\hat{X}$, $\theta N\hat{Y}$ si prendano segni contrarj —

Sostituiti i valori di questi cosi ni con segni contrarj nella (a) e (b) si ha

(33) $\frac{d^2x}{dt^2} = X \pm N\frac{dy}{ds}$,

(34) $\frac{d^2y}{dt^2} = Y \mp N\frac{dx}{ds}$. Moltiplicate queste rispettivamente per $\frac{dy}{ds}$, $-\frac{dx}{ds}$, la somma dei prodotti è

$\frac{dy}{ds}\times\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{ds}\times\frac{d^2y}{dt^2} = X.\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds} \pm N\frac{dy^2+dx^2}{ds^2}$; ma $dy^2+dx^2 = ds^2$, dunque avremo la

(35) $\pm N = \frac{dy}{ds}.\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{ds}.\frac{d^2y}{dt^2} + Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds}$; ma

dx, dy come variabili

$d.\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2}$, dunque $\frac{dx^2}{dt^2}.d\frac{dy}{dx} = dx\frac{d^2y}{dt^2} - dy\frac{d^2x}{dt^2}$; ma $\frac{ds}{dt} = v$, e però $\frac{dx\,ds}{dt} = v\,dx$, d'onde

$\frac{dx}{dt} = v\frac{dx}{ds}$; quindi la (35) si riduce alla

$\pm N = \frac{1}{ds}\,\frac{dx^2}{dt^2}.\,d\frac{dy}{dx} + Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds}$

ovvero

(36.) $\pm N = -v^2\frac{dx^2}{ds^3}.\,d\frac{dy}{dx} + Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds}$; ma il raggio d'osculo

$\gamma = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{ds^3}{dx^2.d\frac{dy}{dx}}$,

dunque

$\frac{dx^2}{ds^3}\times d.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\gamma}$, e però la

(37) $\mp N = -\frac{v^2}{\gamma} + Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds}$; avendosi $\theta N^\wedge X = \pm\frac{dy}{ds}$, e $\theta N^\wedge Y = \mp\frac{dx}{ds}$, il segno superiore di N corrisponde ai segni superiori di questi due valori, e l'inferiore agli inferiori. Quando la trajettoria è una retta $\gamma = \infty$, e però $\frac{v^2}{\gamma} = 0$, e però la (37) si riduce alla

(38) $\mp N = Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds}$. Si osservi che $\frac{dx}{ds}$, e $\frac{dy}{ds}$, sono i coseni degl'angoli che la tangente la trajettoria fa con gli assi coord.^i delle x e delle y; in questo caso essa si confonde colla retta, e però sono costanti tali angoli, e di conseguenza costante sono le pressioni allorchè le trajettoria è una retta.

Se la sola gravità g animi il mobile, il piano della trajettoria sarà verticale, e preso verticale l'asse delle Y ed orizzontale quello delle X si avrà $Y = g$, $X = 0$, per cui la (37) si muta nella

(39) $\mp N = -\frac{v^2}{\gamma} + g\frac{dx}{ds}$

§. 516. Allorchè la velocità v è conosciuta in funzione di x e di y, le X, Y sono date, e data sia pure l'equazione della trajettoria, si potrà calcolare il valore numerico del 2.° membro della (37); notato con A questo valore, si avrà la

(40) $\mp N = A$; ma N è sempre

positivo, dunque nel 2.° membro converrà prendere il segno superiore se A sia positivo, e l'inferiore se A negativo; nel 1.° caso si avrà $\cos N$

e nel 2.° $\cos N\hat{X} = -\frac{dy}{ds}$, $\cos N\hat{Y} = \frac{dy}{ds}$; determinati i segni di $\cos N\hat{X}$, $\cos N\hat{Y}$ si conosceranno gli angoli che fa $N\hat{X}$ che fa $N\hat{Y}$, acuti od ottusi che corrispondono a cosiffatti coseni. Dipendentemente da questi angoli si costruirà la retta dipendente da siffatti coseni. Di tal guisa i aperto com si determini la intensione e direzione di N.

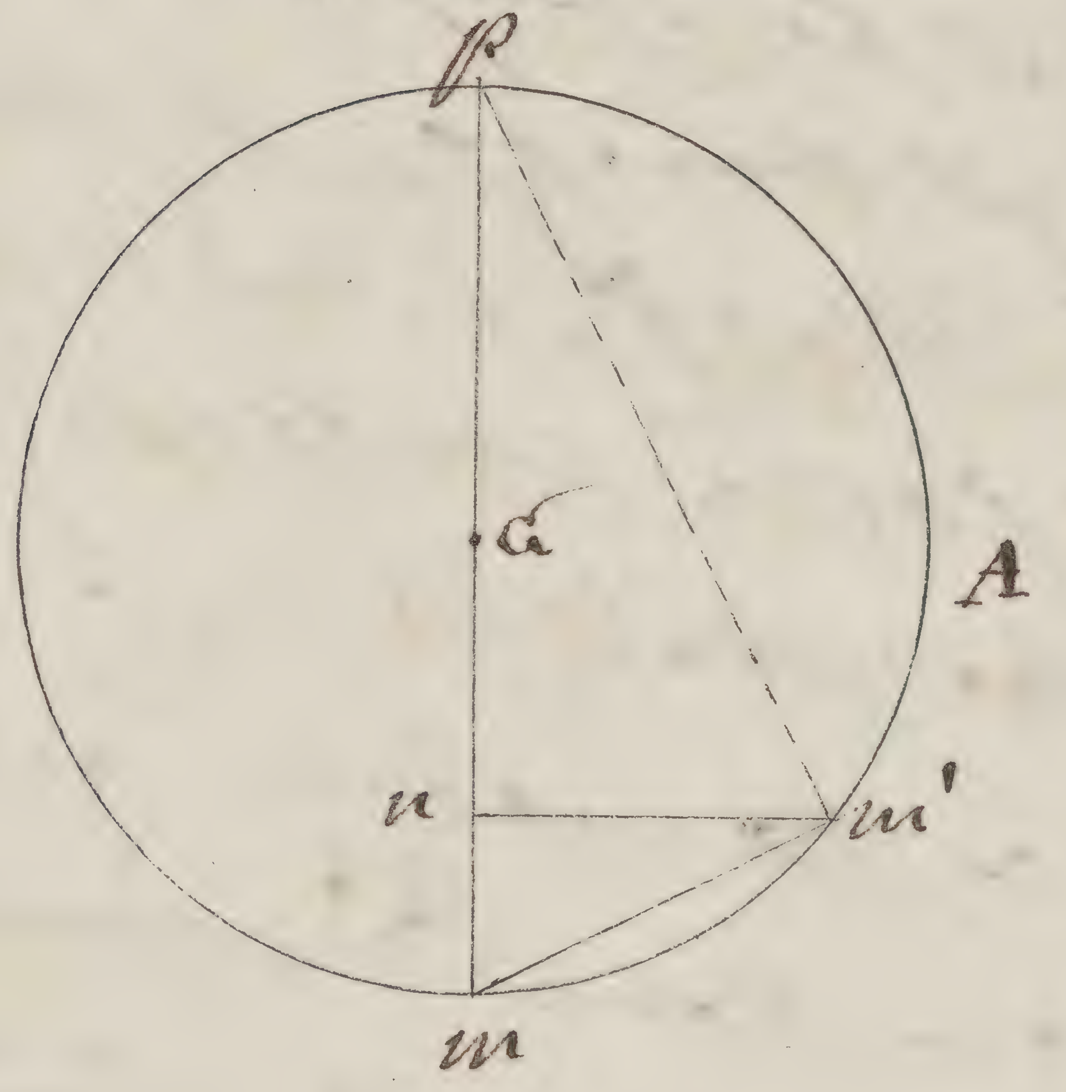
Capitolo XXXIX.

Della forza centrifuga nel Circolo

§. 511. Ugenio e i primi Geometri che hanno dato la misura della forza centrifuga la dedussero dalla considerazione del movimento circolare.

Così fatta deduzione gode del vantaggio di mettere davanti un'idea precisa di cosiffatta forza, e quindi l'esporremo qui brevemente.

(Fig. 106)



Figuriamo un punto materiale m (fig 106) attaccato ad un punto fisso c mediante un filo inestensibile cm, e supponiamo che gli si imprima con una velocità qualunque una forza perpendicolare alla direzione del filo, e supponiamo che niuna forza continua solleciti il mobile. In tali ipotesi il mobile descriverà il circolo mAm'B il cui centro sarà c e cm il raggio: il filo cm soffrirà una tensione, la quale non è altro che la forza centrifuga. Applicando al mobile una forza eguale a cosiffatta tensione, e costantemente diretta verso c, si potrà far astrazione dal filo e considerare il corpo libero. Egli è adunque che per l'ipo-

za di questa forza combinata con l'impulso primitivo che il mobile descrive la sua trajettoria.

§. 512. Poichè la forza è diretta verso il centro fisso, pel principio delle aree dimostrato al §. 425. i settori descritti in tempi eguali risulteranno eguali: dal che risulta che gli archi passati dal mobile in tempi eguali sono pure eguali, e quindi il moto sarà uniforme, e detto s lo spazio v la velocità t il tempo, si avrà

(1) $s = vt$. Sia f l'intensione della forza centrale, qualunque essa sia si può considerare costante in direzione ed in intensione durante un tempuscolo dt: laonde, allorchè il mobile descrive un archetto indeterminatamente piccolo mn, la forza f si può considerare parallela al raggio Om; dal che si deve concludere che se la forza centrale agisse sola sul mobile essa farebbe passare al mobile una retta, proiezione dell'arco sul raggio, cioè mu che è il seno verso di quest'arco.

Lezione 107

Sia φ questa forza costante, e si avrà

(2) $\varphi = \frac{dv}{dt}$, §. 129, ossia

$\varphi dt = dv$, e però integrando, la

(3) $\varphi t = v$, non si aggiunge costante perchè $v=0$ quando $t=0$. Si ha dunque

(4) $\varphi = \frac{v}{t}$, e però $\varphi = v$, quando $t=1$. D'onde, conchiudere si debbe che una forza continua costante ha per misura la velocità che imprime al mobile in un unità di tempo. —

Al §. 141, si è trovato

(5) $\varphi = \frac{2s}{t^2}$, e però si avrà

(6) $v = \frac{2s}{t^2}$; cioè la velocità impressa da una forza ad un mobile, eguaglia il doppio spazio che gli fa passare, diviso pel quad.° del tempo. —

Si è chiamata f la forza centrale, dunque la ~~$f = \frac{2Om}{t^2}$~~

$f = \frac{2Omn}{t^2}$ essendo t piccolissimo speso a descrivere l'arco mn indeterminatamente piccolo. —

Essendo l'arco indeterminatamente piccolo, si può prendere la corda a vece dell'arco, la quale è media proporzionale fra il seno verso e il diametro, e però il seno verso eguaglia il quadrato dello arco diviso pel diametro,

e però $f = \frac{2MM'^2}{2R\,dt^2}$, ovver

(7) $f = \frac{v^2}{R}$ che è altresì quello della

forza centrifuga perchè è ugua-
le ed opposta alla forza centra[le].
Ciò dimostrato, si deduce, che
in una curva qualunque la
forza centrifuga verrà mi-
surata dal quadrato della
velocità diviso pel il raggio
del circolo osculatore, avve-
gnacchè si può supporre che
in ciascun punto la curva
si confonda col circolo oscula-
tore per cui in tal situazione si
può supporre che il mobile si
muova circolarmente intorno al centro.

§. 513. Si è veduto che la velocità
di un mobile si suppone
aquistata cadendo da una
certa altezza h, e si avrà
(8.) $v^2 = 2gh$. §. ... che sost.
nella (7) si avrà

(7) $f = \frac{v^2}{R}$

(9) $f = \frac{2gh}{R}$, e però
$\frac{f}{g} = \frac{2h}{R}$, e quindi
$f : g :: 2h : R$. Vale a dire,
la forza centrifuga nel circo-
lo sta alla gravità come
la doppia altezza dovuta
alla velocità del mobile
sta al raggio del circolo
che descrive.

Se abbiasi $2h = R$, si ha
$f = g$, e il filo sarà teso
dalla forza centrifuga come
se fosse tratto dal peso del

mobile che vi è attaccato, sup-
ponendosi che il punto ma-
teriale non avesse sensibili
dimensioni perchè la forza
centrifuga non sarebbe la
stessa. Su tale ipotesi il
valore $\frac{f}{g}$ esprimerà in gene-
rale la tensione del filo
al peso del corpo che si muo-
ve alla sua estremità. —

§. 514. Sia T il tempo che il mo-
bile spende a passare la circon-
ferenza del circolo che ha
r per raggio, e sia π la rela-
zione della mezza circonfe-
renza al circolo di raggio 1.
e $2\pi.r$ rappresenterà la cir-
conferenza di raggio r.
Ora il moto è uniforme,
e perciò si avrà

(11) $v = \frac{2\pi r}{T}$, il quale valore sosti-
tuito nella (7) dà la

(r = R) (12) $f = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$; la forza centrifu-
ga nel circolo adunque è
in ragion diretta del raggio
ed inversa del quadrato del
tempo speso a passare la
circonferenza. —

§. 515. Allorchè un solido ruota
intorno un asse fisso, tutti
i suoi punti descrivono dei
circoli i cui piani sono
perpendicolari all'asse, ed
i cui centri sono sull'asse
ed hanno per raggi le perpen-

dicolari che da ciascun punto si conducono sull'asse, laonde le forze centrifughe da cui sono animati sono come i raggi. Così i corpi che si trovano alla superficie della terra sono animati da forze centrifughe proporzionali ai rispettivi raggi dei paralelli. — La gravità è dovuta all'attrazione della sfera terrestre sui corpi stessi; ma qualunque ne sia la cagione è certo che la forza centrifuga diminuisce la gravità. Diffatti, (a) all'equatore la forza centrifuga e la gravità sono dirette secondo la verticale in senso contrario l'una dell'altra. Quivi dunque la gravità eguaglia l'eccesso dell'attrazione della terra sulla forza centrifuga, e detta g la gravità, e G l'attrazione terrestre, ossia direi la gravità che avrebbe luogo se la terra non ruotasse intorno al suo asse, si avrà

(13) $g = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2}$, ove r è il raggio dell'equatore e T il tempo della rotazione della terra.

(a) ai poli ove la forza centrifuga è nulla, è sempre minore che se la terra non ruotasse.

§. 516. Per convertire in numeri

il valore della forza centrifuga è mestieri conoscere v, π, T^2; ma $\pi = 3,1415927$ circa, $v = 6'376466$ metri, e la rotazione si compie in giorni 0,99727, dunque osservando che 24 ore = 86400", avremo la proporz.e

$1^{gior.} : 0^{gior.},99727 :: 86400'' : T$, e quindi

(14) $T = 86400 . 0,99727 = 86164,12800$ ovvero, trascurate le frazioni di 1" si ha la

(15) $T = 86164''$, e poi

$$f = \frac{4 . 3,1415927^2 . 6376466}{86164^2}:$$

ma

(16) $4\pi^2 v = 251732778,997898735920[?]$

(17) $T^2 = 7424234896$, onde

(18) $\frac{4\pi^2 v}{T^2} = 0,0339$: questo numero astratto esprime la relaz.e della forza centrifuga all'equatore, ad una forza costante presa per unità che nell'unità di tempo produce una velocità = unità di lungh.

§. 129. Laonde il N.o 0,0339 esprime la relazione della forza centrifuga da noi considerata alla forza continua costante che produrebbe una velocità = 1 metro. —

L'esperienza poi ci fa chiari che all'equatore cadendo nel vuoto i gravi acquistano una velocità, per cui passano 9,78 di metri; ma le forze sono come le velocità,

dunque, posta la gravità costante, il N.º 9,78 esprime la relazione della gravità ad una forza continua costante che produrrebbe la velocità = 1. metri. Si ha dunque, 0,0339, e 9,78. che sono riferiti alla stessa unità; e però $\frac{9,78}{0,339} = 289$. che è la relazione della gravità alla forza centrifuga; e però la forza centrifuga è circa la 289.ª parte della gravità che avrebbe luogo senza il moto della terra intorno al proprio asse e però avremo la

(19) $f = \frac{4\pi r}{T^2} = \frac{1}{289} . G$. Se il moto di rotazione della terra intorno al proprio asse, aumentasse è chiaro che T diminuirebbe e f aumenterebbe differendo sempre meno da G: osservando che $289 = 17^2$; si vede che se il movimento della terra intorno al proprio asse diventasse 17 volte più rapido di quello che è realmente, la forza centrifuga eguaglierebbe la gravità G, e però la forza centrifuga la eguaglierebbe, e i corpi abbandonati a se stessi rimarebbero in equilibrio. La forza centrifuga all'equatore è secondo la verticale, e negli altri punti è

proporzionale e diretta nel prolungamento dei raggi dei paralelli. Ma la terra essendo una sferoide, la sua forza d'attrazione decresce andando ai poli, e però la gravità è dovuta alla forza centrifuga ed alla diminuzione d'attrazione.

Capitolo XI.

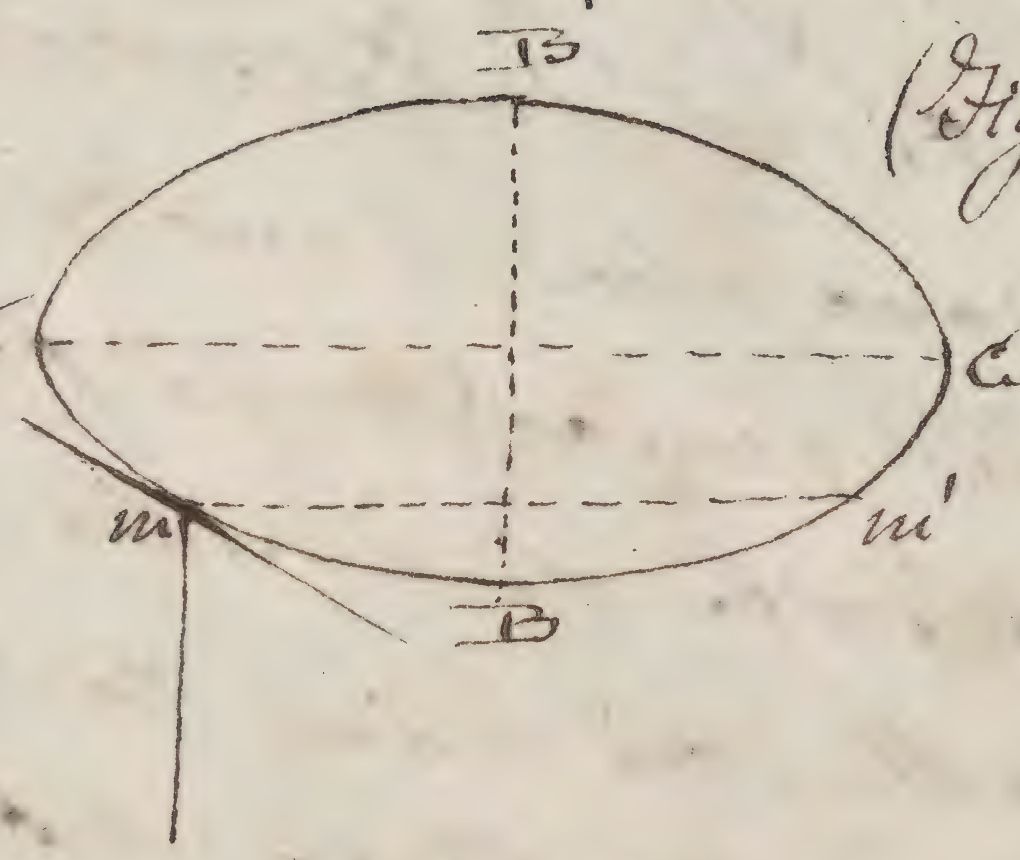
Delle oscillazioni del pendolo semplice

N.517. In generale un pendolo, si compone di un solido sospeso all'estremo di una sottile verga inflessibile ed inestensibile, essendo l'altro estremo della verga attaccato ad un'asse intorno al quale può liberamente ruotare impedito-negli ogni altro movimento. Allorchè la verticale protratta pel centro di gravità del pendolo incontra l'asse di rotazione, il pendolo è in equilibrio.

Se il solido sia nella situazione più bassa sarà l'equilibrio stabile e se sia nel punto più lontano sarà instabile l'equilibrio. Se si abbandoni a se stesso allontanato dalla posizione dell'equilibrio stabile non calcolate le resistenze che s'incontrano il numero delle oscillazioni sarà indeterminato. La durata di queste oscillazioni serve alla misura del tempo. Al confrontare le oscillazioni dei pendoli i Geometri hanno immaginato un pendolo ideale che dicesi pendolo semplice.

Questo consiste in un punto ma-
teriale attaccato ad un filo so-
speso ad un punto fisso non
calcolandosi la gravità del
filo. Di questo ci serviremo

§. 518. A maggiore chiarezza mett-
iamo davanti alcune verità
generali del moto di un pun-
to materiale sopra una data
linea. Allorchè un punto ma-
teriale si muove sopra una
data curva C'BCB' (fig. 107)
(1.)ª la sua velocità è misurata da (1.) $v^2 = A^2 + 2gz$
e diverso, avendosi fr.(a,y,z)=C2,
§. 506. e supposto che A sia la
velocità nel punto di partenza
dal punto C che prendesi per
origine delle coord.e ortogon-
ali, e z la coordinata vertica-
le del punto m, e diretta nel
senso della gravità, si avrà
fr.(a,b,c) = 0, e l'equaz.
(15) del §. 505. riducesi appun-
to alla (1.).



(Fig. 107)

Figuriamo la curva compo-
sta di due rami, CB, C'B che
si uniscono nel punto B di
cui la tangente è orizzonta-
le. La coordinata z, e la
velocità v, aumenteranno
quando il punto materiale
passa il ramo discendente
CB: esse attingeranno il loro
massimo in B ove arrivato
il mobile continuerà a muover-
si

al di là di questo punto, e sali-
rà pel BC' a cagione della ve-
locità acquistata, e non essen-
ovi resistenza di mezzi; non in
tal caso la 1.a e la 2.a diminui-
ranno, di guisa che, se per
m si protragga un piano ori-
zontale che tagli i due rami
m, m', la velocità del mo-
bile sarà la stessa in questi
due punti d'intersecazione.
E' poi chiaro, che il mobile se-
guiterà ad innalzarsi finchè
la sua velocità si annulli, quan-
do avrà attinta una tale ve-
locità zero in allora ubbidi-
rà alla gravità e salirà in-
c e così di seguito. Siccome
ciascun punto della curva è
passato colla stessa velocità,
il tempo dell'ascesa per la
curva eguaglierà quello della
discesa, e il mobile impiegherà
ra lo stesso tempo tanto ad
andare da c a c' che da c' a
c e però il tempo della 2.a
oscillazione eguaglierà quello
della 1.a e però tutte le oscilla-
zioni saranno eguali. ——
Se poi da c il mobile parte
con una velocità iniziale, il
mobile s'innalzerà sopra il
Se la trajettoria è una cur-

va chiusa, possono succedere
due casi, o che il mobile non arri-
va in B' ove la tangente
torna orizzontale, cioè abbia
perduto la sua velocità pri-
ma di arrivare in questo pun-
to, o che vi arriva con una
velocità. Nel primo caso
il mobile tornerà indietro
e si alzerà di altrettanto
nell'altro ramo, quanto nel
1.° ramo, e le oscillazioni
saranno isocrone a comin-
ciare dalla seconda (da isos
e chronos di egual durata).
Nel 2.° caso cioè che arrivi
to in B' abbia ancora una
velocità, il mobile passerà
questo punto e comincierà
a discendere per l'altro
ramo girando continuamen-
te intorno ad essa ——
—— Le accennate proprietà
sono indipendenti dalla natu-
ra della curva che può essere
piana o a ~~dd~~ doppia curvatura,
perchè sia essa continua,
e chiusa, mentre ~~poichè~~, se le tangenti for-
massero un angolo finito, si
avrebbe perdita di velocità.

Lezione 108.

§.519. Il tempo che il mobile spende
a fare una intera oscillazione
dipende dalla natura di lei.
A determinarla, sia l'arco
cm = s (fig. 107) che è compreso

fra il punto A di partenza del mobile ed un punto qualunque della trajettoria. Nella (1) poniamo $v=\frac{ds}{dt}$, e si avrà

$\frac{ds^2}{dt^2}=A^2+2gz$, e quindi

(2) $dt=\frac{ds}{\sqrt{A^2+2gz}}$; quando i data l'equazione della trajettoria se ne trarrà il valore di z in funzione di s e per converso, sostituito l'uno o l'altro dei valori nella (2) non si avrà che ad integrare una funzione ad una sola variabile in funzione di s o di z. Sarà poi facile avere il tempo speso a fare la intera oscillazione o a passare la curva.

§. 528. Si osservi che il valore di t in funzione di s non dipenderà in ciascun caso particolare dalla velocità iniziale A e dalla relaz.e fra le coordinate verticali e gli archi della trajettoria, i quali archi e coordinate hanno cominciamento dal principio del moto. Così fatte velocità e relazione restando le medesime, e cambiando la trajettoria, l'equazione fra s e t non cambierà punto, e di conseguenza neppure la legge del moto espressa da questa equazione.

Figuriamo che la trajettoria sia a doppia curvatura, e da ciascun punto di lei condotte delle perpendicolari sopra un piano orizzontale arbitrario; si avrà un cilindro verticale. Se di poi s'immagini questo cilindro sviluppato sopra un piano verticale, di maniera che ciascun punto della curva data conservi quella distanza dal piano orizzontale che avea nello spazio, la curva a doppia curvatura verrà trasformata in una curva piana, nella quale, la relazione fra gli archi e le coord.e verticali contate da un punto qualunque sarà la medesima che nella curva a doppia curvatura; laonde la legge del moto si conserverà la med.a purchè la velocità iniziale del mobile si conservi la med. per l'una e per l'altra curva. Reciprocamente, il moto conserverà le sue proprietà, se si assetti la curva piana sopra un cilindro verticale purchè non cambino le distanze dei punti da un piano orizzontale.

N. 521. Applichiamo il detto al pendolo semplice

Sia O (fig 107) il punto di sospensione, OB la verticale che passa per esso ed OC la posizione iniziale del pendolo.—

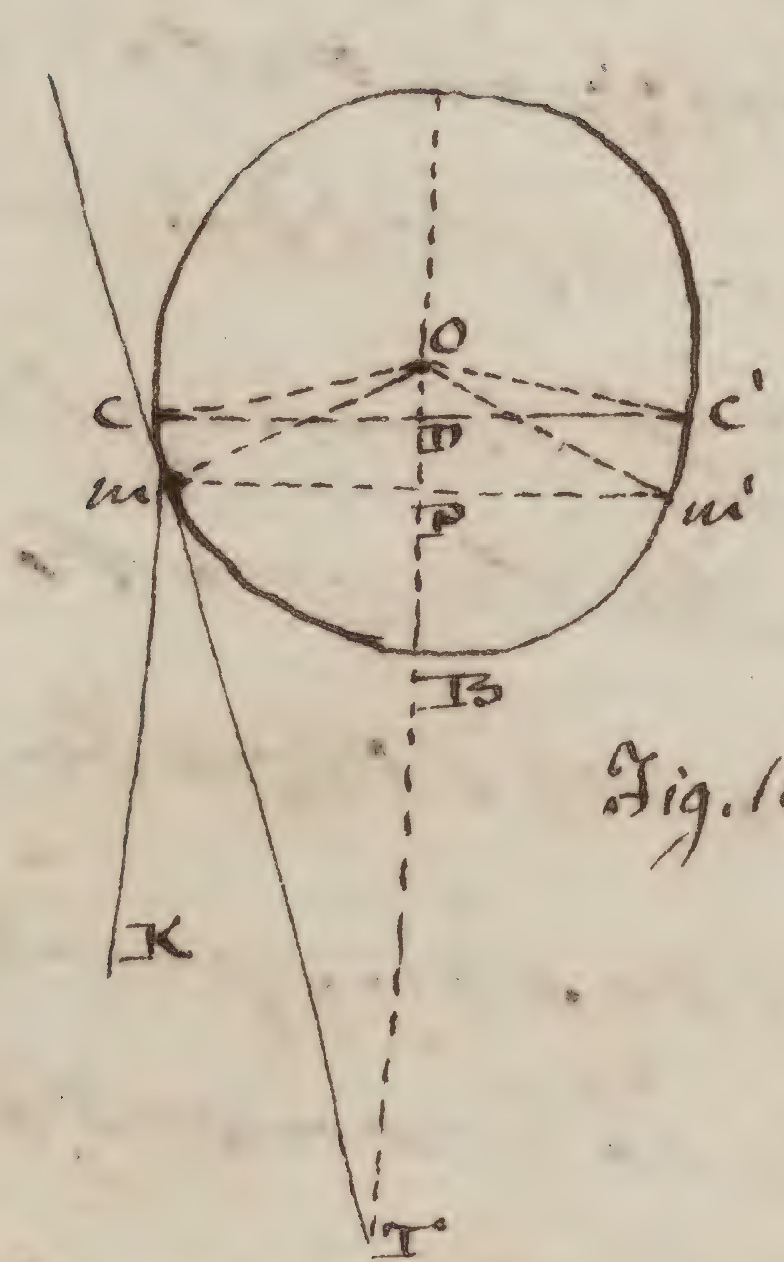


Fig. 107

Supponiamo che in tale posizione una forza venga a produrre una velocità, essendo essa perpend. alla direz. del filo e nel piano verticale. Egli è patente che il pendolo nel suo movimento non sortirà dal piano verticale, e che il punto materiale descriverà un circolo di cui è raggio il filo, e centro il punto di sospensione. Facciasi OC = a; l'angolo COB = α, l'angolo variabile compreso fra il pendolo e la verticale OB per es. mOB = δ, che sarà negativo alla destra di B.

L'angolo che fa la direzione del pendolo colla sua posizione iniziale è COm = $\alpha - \delta$.

Sia h l'altezza dovuta alla velocità iniziale; dai punti c, m, si conducano le perpendicolari CD, mP, e siano

(3) $A^2 = 2gh$

(4) $s = Cm = a.\alpha - a\delta$;

(5) $z = DP = OP - OD = a\cos\delta - a\cos\alpha$

essendo a costante, dalla (4) differenziando si avrà

(6) $ds = -a\,d\delta$; fatta sostituz. nella (2) di trovati valori si ha

(7) $dt = \dfrac{-a\,d\delta}{\sqrt{2g(h + a\cos\delta - a\cos\alpha)}}$; per le stesse sostituzioni la (1) si muta nella

(8) $v^2 = 2g(h + a\cos\delta - a\cos\alpha)$, e però

(9) $v = \sqrt{2g(h + a\cos\delta - a\cos\alpha)}$

Sieno y ed x i seni versi degli angoli δ ed α, e si avrà

$1 - \cos\alpha = y \quad 1 - \cos\delta = x$

$d\delta = \dfrac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$, il perchè la (7) e la (9) diventano la

(10) $dt = \dfrac{-a\,dx}{\sqrt{2x - x^2}\,\sqrt{2g(h + ay - ax)}}$

(11) $v = \sqrt{2g(h + ay - ax)}$. Nel circolo del raggio 1 il coseno se è positivo non è > 1, e se negativo non può superare -1, e però il massimo valore del senoverso non può superare il 2.

Laonde se abbiasi $h + ay > 2a$, la velocità non potrà mai annullarsi, nel qual caso il pendolo invece di oscillare, circola intorno a C.

Il punto materiale attingerà la stessa velocità in ogni punto da lui passato, e il moto seguiterà incessantemente.—

Se poi $h+a\gamma < 2a$, la velocità v sarà nulla nel punto della trajettoria in cui è
$\alpha = \frac{h+a\gamma}{a}$, e il pendolo oscillerà da una parte e dall'altra della verticale os.
Torna bene quando ba luogo il moto oscillatorio il determinare la durata di un'oscillazione, e specialmente quando è piccolissima l'oscillazione. Cominceremo da questo caso.

§. 522. Ci permesso il supporre nulla la velocità iniziale, il che equivale a prendere per origine del moto il principio di un'oscillazione: in tale ipotesi $h=0$, ed inoltre supponendosi piccolo l'allontanamento dalla verticale, γ, e sono altresì piccolissime. I valori adunque de' loro coseni dati per serie che procedono nelle potenze degli archi, si possono trascurare senza errore sensibile le loro quarte potenze e le superiori a queste. Ricordando tali serie, si ha

(12) $\theta\alpha = 1-\frac{\alpha^2}{2}$,

(13) $\theta\gamma = 1-\frac{\gamma^2}{2}$. Se dunque nella (7) metteremo $h=0$, e gli valori di $\theta\alpha$, $\theta\gamma$, avremo

(7) $$dt = \frac{-a\,d\delta}{\sqrt{2g(h+a\theta\delta-a\theta\alpha)}}$$

(14) $dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{d\delta}{\sqrt{d^2-\delta^2}}$, il cui integrale è la

(15) $t = C + \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot A\left(\theta = \frac{\delta}{d}\right)$.

A determinare la C si osservi che ~~alle~~ all'origine del moto si ha nello stesso tempo $t=0$, $\delta=d$, il che dà il coseno $\frac{\delta}{a}=1$. Ma il mobile non descrive l'intera circonferenza dunque adesso vi corrisponderà l'arco zero, e però $C=0$ dalla (15). L'integrale determinato della (14) sarà dunque

(16) $t = \sqrt{\frac{a}{g}}\, A\left(\theta = \frac{\delta}{d}\right)$, e quindi

$t\sqrt{\frac{g}{a}} = A\left(\theta = \frac{\delta}{d}\right)$, da cui deducesi

$\theta . \sqrt{\frac{g}{a}}\, t = \frac{\delta}{d}$, onde la

(17) $\delta = d . \theta . \sqrt{\frac{g}{a}}\, t$, il qual valore ci mette davanti il ~~del~~ ~~il~~ movimento del pendolo nel caso delle oscillazioni piccolissime.

Da questa (17) si mostra che all'aumentare di t, ~~[illegible]~~ il coseno s'impiccolisce e però il pendolo si accosta più alla verticale, e quando vi sarà dovrà essere $\sqrt{\frac{g}{a}} . t = \frac{\pi}{2}$, poichè in allora $\delta=0$. Se t aumenti ancora, dipoi δ diventa negativo, e il pendolo passa dall'altra parte e se ne scosta finchè $\sqrt{\frac{g}{a}} . t = \pi$ perchè allora si ha $\delta = -d$, e che i

l'allontanamento massimo del pendolo dalla verticale, poichè se t cresca davantaggio il pendolo si accosta alla verticale e l'attinge quando θ ... pel qual valore posto $\frac{T}{2}$ il tempo di una mezza oscillazione dalla (16) si ha

$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$; e quindi il tempo speso in una oscillazione intera nel qual tempo si ha un oscillazione α, si avrà

(18) $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ ~~...~~, dalla quale si mostra essere il valore di T indipendente dall' ampiezza delle oscillazioni; quindi se si consideri il pendolo in una posizione qualunque da una parte della verticale, essendo si troverà dalla parte opposta nello stesso ... Infatti, poniamo che δ_1 rappresenti ciò che diventi δ, allorchè t, si muta in $t+T$, e dalla (17) si avrà

$\delta_1 = \alpha\theta \cdot \sqrt{\frac{g}{a}}(t+T)$: ma $T = \sqrt{\frac{a}{g}}$

dunque

$\delta_1 = \alpha\theta \cdot \sqrt{\frac{g}{a}}\left(t + \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\right) = \dots$

$\alpha\theta\left(\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot t + \pi\right) = -\alpha\theta \cdot \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot t = \dots$ per la (17.)

§. 523. La $\delta = \alpha$, corrisponde al punto a. Perchè la (17) dia $\delta = \alpha$, è necessario che il coeff.e di $\alpha = 1$; ciò si avrà se sia $\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot t = 0$, poichè da il $\theta = 1$.

Dunque si avrà 1, se si ret-
terà l circonferenza, 2 π, e
si avranno le segg.ti

$\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot t = 2\pi$

$\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot t = 4\pi$

— — — —

$\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot t = 2n\pi$. Dunque, si
dovrà concludere che il mo-
bile attinge il punto di
partenza ove solo $\delta = a$, in
un' infinità di tempi. —
Sieno, t', t'', t''', t'''' — — $t^{(n)}$
i valori di t dati dalle pre-
cedenti, equazioni, e si avrà

$t' = 0$,

$t'' = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$,

$t''' = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$,

— — — —

$t^{(n)} = 2n\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, che differi-
scono di $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, cioè il tempo
speso a passare una oscilla-
zione, come debb' essere —

§. 526. Si è veduto al §. 522. che la
durata delle piccole oscillazio-
ni è affatto indipend.te dalla
loro ampiezza, e comunque sia
situato il punto A rispetto
a B il mobile attingerà il
punto B nello stesso tempo.
Le oscillazioni di due pen-
doli diconsi sincrone da
syn — insieme chronos — tempo
cioè si compiono le oscillazio-
ni nello stesso tempo. —

…zione, e l'angolo δ
…non farà che cangiar
…segno. —

…t',

§.525. Per due pendoli della lunghezza a, a_1, dette T, T_1 i tempi delle loro oscillazioni, si avrà

(18) $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$

$T_1 = \pi\sqrt{\frac{a_1}{g}}$, che si dividono, e pari

$T : T_1 :: \sqrt{a} : \sqrt{a_1}$, e quindi le durate delle piccole oscillazioni sono tra sè come le radici quadrate delle lunghezze dei pendoli.

---

§.526. Se nel lasso di tempo t, un pendolo faccia N oscillazioni, il tempo della durata di ciascuna oscillaz. sarà $T = \frac{t}{N}$ per cui la (18) si muta nella

(20) $\frac{t}{N} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, onde $\frac{t^2}{N^2} = \pi^2\frac{a}{g}$, e quindi la

(21) $a = \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{t^2}{N^2}$. Per un altro pendolo della lunghezza a_1 che faccia N_1 oscillazioni nel tempo t, si avrà

(22) $a_1 = \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{t^2}{N_1^2}$; dalle (21) e (22) si ha

$\frac{g}{\pi^2} = \frac{aN^2}{t^2}$

$\frac{g}{\pi^2} = \frac{a_1 N_1^2}{t^2}$, onde la

(23) $aN^2 = a_1 N_1^2$, e quindi la

$a : a_1 :: N_1^2 : N^2$; il che mostra essere le lunghezze dei pendoli fra loro in ragion reciproca dei quadrati dei numeri delle oscillazioni fatte nello stesso tempo.

---

§. 527. Il valore di T che si è osservato essere al tutto indipendente dall'ampiezza delle piccole oscillazioni, non dipende che dalla lunghezza del pendolo e dalla intensione della forza di gravità. Conosciute mediante delle osservazioni due delle tre a, g, T, dalla (18) si dedurrà la terza. Ad esempio, dati a, T, si ha la

(24) $g = \frac{a\pi^2}{T^2}$.

Lezione 109.

la 110. Ripetizione

§. 528. In generale si ha $v = \frac{ds}{dt}$, contandosi nel presente caso l'angolo δ che è nullo nel punto B avendo principio in C, e scorrendo il punto materiale sul circolo del raggio a, si avrà $s = a\delta$, e però $ds = -a\,d\delta$; si mette $-$ perchè al crescere di δ, s diminuisce; nasce quindi la

(25) $v = \frac{ds}{dt} = -\frac{a\,d\delta}{dt}$ in un istante qualunque. Il differenziale della equazione (17) ci dà

(17) $\delta = \alpha \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot t$

(26) $d\delta = -\alpha\sqrt{\frac{g}{a}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right)dt$ che moltiplicata per $-a$ si ha

(27) $-\frac{a\,d\delta}{dt} = \alpha\sqrt{ag}\,\sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right)$, e però la

(28) $v = \alpha\sqrt{ag}\cdot\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$, dalla quale mostrasi esser nulla la velocità v, quando $\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot t = \pi$, o è multiplo di π; e la velocità è nulla sopra nelle estreme posizioni del pendolo.

Il massimo valore in quantità positivo o negativo di v, è $o\sqrt{\frac{g}{a}}.t = \pm 1$, che sono i massimi valori positivi e negativi che possa avere il seno. — Ciò succede per i valori di $\sqrt{\frac{g}{a}}.t$ che sono multipli impari di $\frac{\pi}{2}$, ed allora il pendolo coincide colla verticale, poichè ivi solo ha luogo la massima velocità. —

Il massimo valore adunque in quantità della velocità verrà presentato dalla

(29) $v = \alpha\sqrt{ag} = \sqrt{\alpha^2 ag}$. Pongasi $\alpha^2 a = 2b$, e si avrà la

(30) $v = \sqrt{2bg}$: ma il mobile essendo in C la sua altezza dal punto B è $DB = OB - OD = a(1 - \cos\alpha) = a\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{2.3.4} + \ldots\right) = \frac{a\alpha^2}{2} = b$, trascurate le potenze di α a cominciare dalla 4.ª —

Si dovrà dunque conchiudere che la velocità nel punto B più basso della trajettoria è la velocità dovuta all'altezza BD come si è dimostrato al §. 300.

§. 529. La resistenza dell'aria non contribuisce sensibilmente sulle piccole oscillazioni del pendolo; ella aumenta il tempo della mezza oscillazione discendente, ma d'una quantità uguale diminuisce il tempo

della metà oscillazione ascendente, il perchè il tempo dell'intera oscillazione rimarrà il medesimo come nel vuoto. —

Considerando il moto del pendolo in un mezzo resistente e ritenute le denominazioni antecedenti, da m (fig 107) si conduca la tangente mT e la verticale mK: l'angolo KmT = mTO è complemento di mOB, e però la componente della gravità nella direzione mT sarà $g\sin\delta$. La resistenza del mezzo si eserciterà secondo la tangente medesima ma in senso opposto. Considereremo come abbiamo fatto tale resistenza proporzionale al quadrato della velocità che porremo $= m\frac{ds^2}{dt^2}$. —

La forza continua che agisce sul mobile sarà la differenza di queste due forze ossia $g\sin\delta - m\frac{ds^2}{dt^2}$ in tutta la durata dell'oscillazione.

Ma in generale la componente secondo la tangente si è veduto al §. 50 essere presentata da $\frac{d^2s}{dt^2}$, dunque avremo la

(31) $\frac{d^2s}{dt^2} = g\sin\delta - m\frac{ds^2}{dt^2}$. Dalla (25) si ha la

(25) $v = -\frac{a\,d\delta}{dt} = \frac{ds}{dt}$

(32) $ds = -a\,d\delta$, e però la

(33) $d^2 s = -a\, d^2\delta$; per cui la (31) si muta nella

$$-\frac{a\, d^2\delta}{dt^2} = g\theta\delta - ma^2\frac{d\delta^2}{dt^2},$$ ovvero

(34) $$\frac{d^2\delta}{dt^2} = -\frac{g\theta\delta}{a} + ma\frac{d\delta^2}{dt^2}.$$ Si moltiplichi la (34) per $2d\delta$, e si avrà

$$\frac{2d\delta\, d^2\delta}{dt^2} = -\frac{2g}{a}\theta\delta\, d\delta + \frac{2ma\, d\delta^2}{dt^2}d\delta$$

integrando la quale si ha

(35) $$\frac{d\delta^2}{dt^2} = \frac{2g}{a}\theta\delta + 2am\int\frac{d\delta^2}{dt^2}d\delta.$$

Pongasi

$\int\frac{d\delta^2}{dt^2}d\delta = x$, ed avremo prendendo la derivata di questa rispetto alla δ, la [essendo x funz. di δ]

(36) $$\frac{dx}{d\delta} = \frac{d\delta^2}{dt^2},$$ per cui la (35) si muta nella

(37) $$\frac{dx}{d\delta} = \frac{2g}{a}\cdot\theta\delta + 2amx;$$ o poi mettendo x' a loco di $\frac{dx}{d\delta}$

(38) $$x' - 2amx = \frac{2g}{a}\theta\delta,$$ equazione lineare che sappiamo integrare, e perciò dovremo integrare

$x'_1 - 2amx_1 = 0$, ovvero si dovrà determinare l'integrale della

(39) $$\frac{x'_1}{x_1} - 2am = 0,$$ e però l'integrale sarà

$\log x_1 - 2am\delta = 0$; onde

$\log x_1 = 2am\delta$, e passando ai numeri si avrà la

(40) $$x_1 = e^{2am\delta} = \beta;$$ si deve porre poi per applicare il metodo d'integraz. C. S.

(41) $x = \beta w$, e si avrà

(42) $x' = p'w + pw'$. Sostituiti questi valori di x e di x' nella (38) ne viene

$p'w + pw' - 2am\,pw = \frac{2g}{a}\theta\delta$; ma dalla (40) si ha

$p' = 2am\,e^{2am\delta}$ dunque fatta sostituzione e ridotta si ha

(43) $w' = \frac{2g}{a}\cdot\frac{\theta\delta}{e^{2am\delta}}$. Di questa si è ottenuta la primitiva nel calcolo sublime, ed è espressa dalla

(44) $w = \frac{2g}{a}\cdot\frac{e^{-2am\delta}}{4a^2m^2+1}(\theta\delta - 2am\theta\delta)$

onde la primitiva completa della (38) pel l. s. sarà

$x = e^{2am\delta}\cdot\frac{2g}{a}\cdot\frac{e^{-2am\delta}}{4a^2m^2+1}(\theta\delta - 2am\theta\delta) + Ce^{2am\delta}$; ossia

(45) $x = Ce^{2am\delta} + \frac{2g\theta\delta}{a(4m^2a^2+1)} + \frac{4gm\theta\delta}{4a^2m^2+1}$, ove C è la costante: prendendo il differenziale di questa si ha

$dx = 2amCe^{2am\delta} + \frac{2g\theta\delta}{a(4a^2m^2+1)}d\delta + \frac{4gm\theta\delta}{4a^2m^2+1}d\delta$, e però

(46) $\frac{dx}{d\delta} = 2amCe^{2am\delta} + \frac{2g\theta\delta}{a(4a^2m^2+1)} + \frac{4gm\theta\delta}{4a^2m^2+1}$ per la (36)

ma $\frac{dx}{d\delta} = \frac{d\delta^2}{dt^2}$, dunque avremo

(47) $\frac{d\delta^2}{dt^2} = 2amCe^{2am\delta} + \frac{2g\theta\delta}{a(4a^2m^2+1)} + \frac{4gm\theta\delta}{4a^2m^2+1}$

che è l'integrale di 1.° ord.^{e} della (34.)

Sciolta la (47) rispetto a dt si ottiene un'equazione che

che può ora presentarsi
dalla
(48) $dt = \mathcal{F}(\delta)d\delta$, per cui la questione è ridotta all'integrazione
di $\mathcal{F}(\delta)d\delta$ che generalmente
non si sa integrare; ne agevole è integrare per approssimazione la (34).

§. 530. Si osservi, che essendo nulla la velocità iniziale del mobile l'angolo δ è nullo nello stesso tempo che α.
Dunque si debbe concludere che δ esser debba una funzione di α, in modo che essa sia zero quando $\alpha = 0$. Supposto adunque α piccolissimo potremo porre la
(49.) $\delta = \alpha\delta_1 + \alpha^2\delta_2 + \alpha^3\delta_3 + \ldots$ d[illegible]
nella quale $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ [illegible] sono funzioni incognite di t che si dovranno determinare. Sostituendo nella (34) questa serie, a vece di δ, supposto che ivi non si faccia, se si svilupperanno i termini del risultamento di α, è chiaro che quest'equazione dovrà verificarsi per identità di termini, cioè si eguaglieranno allo zero i coefficienti delle stesse potenze di α.
Avremo così una serie di

equazioni che serviranno a determinare le δ_i.

Potremo dunque determinare quante delle δ_i si vorrà.

Nella presente quistione nella quale si considera α piccolissimo, si potrà limitare l'approssimazione al quadrato di α ommettendone le potenze superiori. In tale supposizione dalla (49) si ottiene

(50) $\frac{d^2\delta}{dt^2} = \alpha\frac{d^2\delta_1}{dt^2} + \alpha^2\frac{d^2\delta_2}{dt^2}$ diffe.

(51) $\frac{d\delta^2}{dt^2} = \alpha^2\frac{d\delta_1^2}{dt^2}$; inoltre

(52) $\sigma\delta = \sigma(\alpha\delta_1 + \alpha^2\delta_2) = \sigma.\alpha\delta_1 \sigma.\alpha^2\delta_2$

$\sigma\alpha\delta_1\,\sigma\alpha^2\delta_2 = \alpha\delta_1 + \alpha^2\delta_2$ poichè essendo α piccolissimo si può supporre $\sigma^2\delta_2 = 1$, ed inoltre si può prendere l'arco $\alpha\delta_1$ invece del seno. Sostituiti tali valori nella (34) ne nasce la

(34) $\frac{d^2\delta}{dt^2} = -\frac{g\sigma\delta}{a} + ma\frac{d\delta^2}{dt^2}$

(53) $\alpha\frac{d^2\delta_1}{dt^2} + \alpha^2\frac{d^2\delta_2}{dt^2} = -\frac{g}{a}(\alpha\delta_1 + \alpha^2\delta_2)$ $+ ma\alpha^2\times\frac{d\delta_1^2}{dt^2}$, che deve sussistere indipendte da α, e però avremo la

(54) $\frac{d^2\delta_1}{dt^2} = -\frac{g}{a}\delta_1$

(55) $\frac{d^2\delta_2}{dt^2} = -\frac{g}{a}\delta_2 + am\frac{d\delta_1^2}{dt^2}$. Nel l. s. si è veduto che la primitiva della (54) è la

(56) $\delta_1 = h\,\sigma\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + h_1\right)$, ove h ed h_1 sono le costanti che completano l'integ.

Se ~~comp~~ contasi il tempo t, a cominciare dall'origine del moto, si avrà $\delta=\alpha$ quando $t=0$. La velocità data dalla

(57) $v=-a\frac{d\delta}{dt}$, sarà nulla all'origine, e però $\frac{d\delta}{dt}=0$. E quando $\delta=\alpha$; dalla (49) risulta $\delta_1=1$, e per essere $\frac{d\delta}{dt}=0$, dalla (51) derivasi

$\frac{d\delta_1}{dt}=0$, pei quali valori la (56) riducesi alla

(58.) $1=h\theta h_1$; la derivata della (56) è la

(59.) $\frac{d\delta_1}{dt}=-h\sqrt{\frac{g}{a}}\,\theta\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,.\,t+h_1\right)$ la quale postovi $\frac{d\delta_1}{dt}=0$, e $t=0$ divenuta

(60) $0=-h\sqrt{\frac{g}{a}}\,.\,\theta.h_1$. Alle due equazioni (58) e (60) soddisfa $h=1$, ed $h_1=0$, sarà dunque

(61) $\delta_1=\theta\sqrt{\frac{g}{a}}\,.\,t$ l'integrale determinato della (56).

Lezione 111.

La (59) si muta nella

(62) $\frac{d\delta_1}{dt}=-\sqrt{\frac{g}{a}}\;\theta\sqrt{\frac{g}{a}}\,.\,t$; si osservi che alle (58) e (60) si soddisfa pure ponendo $h=1$, ed $h_1=n.2\pi$, n intero. Ma le (61) e (62) rimangono le stesse, perchè si ha

$\theta(x+n2\pi)=\theta x$

$\theta(x+n2\pi)=\theta x$. Dalla (62) innalzando a quadrato si ottiene

(55) $\frac{d^2\delta_2}{dt^2} = -\frac{g}{a}\delta_2 + am\frac{d\delta_1^2}{dt^2}$

(63) $\frac{d\delta_1^2}{dt^2} = \frac{g}{a}\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}$, per cui la (55) si muta nella

(64) $\frac{d^2\delta_2}{dt^2} = -\frac{g}{a}\delta_2 + gm\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}$: ma dalla trigonometria si ha la

(65) $\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}}$, dunque avremo la

(66) $\frac{d^2\delta_2}{dt^2} = -\frac{g}{a}\delta_2 + \frac{gm}{2} - \frac{gm}{2}\cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}}$

della quale la primitiva pel C. I. è

(67) $\delta_2 = K\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + K_1\right) + \frac{ma}{2} + \frac{ma}{6}\cos 2\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$

ove K e K_1 sono le due costanti arbitrarie che il rendono completo. Al determinare le costanti, al principio del moto si ha $t=0$, $\delta=\alpha$: dunque per la (49) dovrà essere $\delta_2=0$. onde la (67) si riduce alla

(68) $K\cos K_1 + \frac{ma}{2} + \frac{ma}{6} = 0$. La derivata della (67) è

$\frac{d\delta_2}{dt} = -K\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + K_1\right) - \frac{ma}{3}\sqrt{\frac{g}{a}} \times \sin 2\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$, che posto $t=0$, diventa la

(69) $\frac{d\delta_2}{dt} = -K\sqrt{\frac{g}{a}}\sin K_1$. Dalla (64), postoci $t=0$, e $\delta_2=0$, ne risulta la

(70) $\frac{d^2\delta_2}{dt^2} = 0$, il che significa che la derivata di $\frac{d\delta_2}{dt}$ è costante o zero. Ma è nulla anche δ_2; dunque è nullo nello stesso tempo δ_2 e la sua seconda derivata, e però debbono essi con-

tenere un fattore che si riduca
a zero all'origine del moto e che
si conterrà anche nella 71.a de-
rivata. La (69) si riduce alla

(71) $0 = k\sqrt{\frac{g}{a}}\,\theta k_1$, cui soddisfa $k_1=0$;
per tal valore la (68) da
$0 = k + \frac{ma}{n} + \frac{ma}{6}$, da cui derivasi

(72) $k = -\frac{2am}{3}$, si ha quindi l'in-
tegrale determinato della
(66) che sarà

(73) $\delta_n = -\frac{2am}{3}\theta\cdot\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot t + \frac{ma}{n} + \frac{ma}{6}\times$
$\theta\cdot 2\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot t$: ma $\delta = \delta_1 \alpha + \delta_n \alpha^n$, tra-
scurando gli altri termini
che ne vengono, dunque so-
stituendo avremo la

(74) $\delta = \left(\alpha - \frac{2\alpha^n am}{3}\right)\theta\cdot\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \alpha^n\frac{am}{n} +$
$\frac{\alpha^n am}{6}\cdot\theta\cdot 2\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot t$. Prendendo la
derivata della (74) si ha la

(75) $\frac{d\delta}{dt} = -\left(\alpha - \frac{2\alpha^n am}{3}\right)\sqrt{\frac{g}{a}}\,\theta\cdot\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot t$.
e sta la velocità in un istante
qualunque, si è visto essere
$-a\frac{d\delta}{dt}$, dunque avremo la

(76) $v = \left(\alpha - \frac{2\alpha^n am}{3}\right)\sqrt{ag}\,\theta\cdot\sqrt{\frac{g}{a}}\,t +$
$\frac{\alpha^n am}{3}\sqrt{ag}\,\theta\, 2\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$.

§ 531. Prendiamo ora in considera-
zione le (74) e (76) le qua-
li rappresentano le leggi
del moto.

La velocità v è nulla quan-
do $t=0$, ed aumenta fin che
t ha attinto il suo massimo

diminuisce e quando sarà nulla avrà compito la sua oscillazione. Si osservi, che α essendo piccolissimo per ipotesi, il termine $\alpha^2 am\sqrt{ag}$, sarà piccolissimo a petto di $\alpha - \frac{2\alpha^2 am}{3}$, e però bisognerà che il 2° membro della 2ª equazione per esser nullo, sarà necessario che si abbia

$\theta.\sqrt{\frac{g}{a}}\,t=0$, $\theta.2\sqrt{\frac{g}{a}}\,t=0$, dovrà dunque essere

$\sqrt{\frac{g}{a}}.t=\pi$, se diremo T il valore del tempo tratto da quest'equazione, si avrà

(77) $T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, tempo dell'intera oscillazione come nel vuoto (S. 322.)

Al determinare il tempo T_1 della mezza oscillazione discendente, si osservi, che compiuta una siffatta oscillazione si ha $\theta=0$, e però dalla (74) si avrà la

(78) $\left(\alpha - \frac{2\alpha^2 am}{3}\right)\theta T_1\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{\alpha^2 am}{2} + \frac{\alpha^2 am}{6}.$
$\theta.2T\sqrt{\frac{g}{a}}=0$. Dividendo per α, si ottiene la

(79) $\left(1-\frac{2\alpha am}{3}\right)\theta.T_1\sqrt{\frac{g}{a}}+\frac{\alpha am}{2}+\frac{\alpha am}{6}.$
$\theta\,2T\sqrt{\frac{g}{a}}=0$. Se fosse $\alpha=0$ da questa si ha

$\theta.T_1\sqrt{\frac{g}{a}}=0$, cui soddisfa il porre $T_1\sqrt{\frac{g}{a}}=\frac{\pi}{2}$; poniamo la (79), allora il valore $T_1\sqrt{\frac{g}{a}}=\frac{\pi}{2}+x$ cioè sulla la

(80) $T_1\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{\pi}{2} + x$. Nella (79) poniamo ora a vece di $T_1\sqrt{\frac{g}{a}}$, $\frac{\pi}{2}+x$, e si avrà

$$-\left(1-\frac{2\alpha am}{3}\right)\theta\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\frac{\alpha am}{2}+\frac{\alpha am}{6}\,\theta(\pi+2x)=0,$$ ovvero per Trig.

$$\left(1-\frac{2\alpha am}{3}\right)\theta x-\frac{\alpha am}{6}\,\theta.2x=0.$$

Ma per la Trig. si ha $\theta.2x = 1-2\theta^2 x$, dunque avremo la

(81) $-\left(1-\frac{2\alpha m}{3}\right)\theta x+\frac{\alpha am}{2}-\frac{\alpha am}{6}(1-2\theta^2 x)=$ (a)

I termini poi che contengono $\alpha\alpha$ sono piccolissimi rispetto ai termini che contengono α, x, trascurati adunque i primi si avrà la

(83) $-x+\frac{\alpha am}{2}-\frac{\alpha am}{6}=0$, quindi si avrà

(84) $x=\frac{\alpha am}{2}-\frac{\alpha am}{6}=\frac{\alpha am}{3}$. Posto questo valore nella (80) si ha la

(85.) $T_1\sqrt{\frac{g}{a}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha am}{3}$, e quindi

(86) $T_1=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}+\frac{\alpha am}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}$. Confrontando questa equazione che da il tempo della mezza oscillazione con la (77) che da il tempo dell'intera oscillazione, si vede che T_1 è $>\frac{T}{2}$ cioè di quello nel vuoto per la resistenza. Per conseguenza per la resistenza del mezzo il tempo della mezza oscillazione ~~resist~~ discendente aumenta di $\frac{\alpha am}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}$. Ma si è dimostrato che il tempo dell'intera oscillaz. è il med. dunque converrà che il tempo della mezza oscillaz. ascendente sia diminuito di questa quantità $\frac{\alpha am}{3}$

(a) Ma $\theta x = x + \ldots$ esprimendo il seno l'arco, dunque potremo porre la x a vece di θx, e però avremo la

(82) $-\left(1-\frac{2\alpha am}{3}\right)x+\frac{\alpha am}{2}-\frac{\alpha am}{6}=0.$

12.

§. 532. La resistenza del mezzo diminuisce l'ampiezza dell'intera oscillazione. Essendo $T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ il tempo dell'intera oscillazione, si metta nella (74) a vece di t, il valore di T, il valore di δ, che ne deriva corrisponderà all'intera oscillazione, e si avrà la

(74) $\delta=\left(\alpha-\frac{2\alpha^2 am}{3}\right)\theta\sqrt{\frac{g}{a}}t+\frac{\alpha^2 am}{2}+\frac{\alpha^2 am}{6}\theta 2\sqrt{\frac{g}{a}}t$

(87) $\delta=\left(\alpha-\frac{2\alpha^2 am}{3}\right)\theta\pi+\frac{\alpha^2 am}{2}+\frac{\alpha^2 am}{6}.\theta.2\pi$, ovvero, $\theta\pi=-1$, $\theta 2\pi=1$

(88) $\delta=-\alpha+\frac{2\alpha^2 am}{3}+\frac{\alpha^2 am}{2}+\frac{\alpha^2 am}{6}$

$=-\alpha+\frac{4\alpha^2 am}{3}$; ma α è l'ampiezza della mezza oscillazione discendente, e se fosse la stessa tanto nel mezzo resistente che nel vuoto, la seconda mezza oscillazione sarebbe $-\alpha$, ma è $-\alpha+\frac{4\alpha^2 am}{3}$, dunque è minore di $\frac{4\alpha^2 am}{3}$.

§. 533. Alla fine dell'intera oscillazione il pendolo trovasi allo stesso caso che al principio della prima oscillazione, così continuando le oscillazioni esse vanno continuamente diminuendo fino a diventare insensibili. Ma finchè hanno luogo le intere oscillazioni si fanno nel med.° lasso di tempo.

§. 534. Quantunque ne' differenti usi del pendolo si procuri che le oscillazioni siano piccolissime non riesce però sempre di determinare la loro ampiezza qualunque. Supponiamo che si facciano nel vuoto e riprendiamo la (10) del §. 521, che

(10) $dt = \frac{-a\,dx}{\sqrt{2x-x^2}\sqrt{2g(h+ay-ax)}}$,

nella quale se supporremo nulla la velocità iniziale, sarà $h=0$ e però avremo la

(89) $dt = \frac{-a\,dx}{\sqrt{2x-x^2}\sqrt{2g(ay-ax)}}$ ovvero

(90) $dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{dx}{\sqrt{yx-x^2}\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

Finora non si conosce il come integrare il 2.° membro della (90) in termini finiti, e quindi cerchiamolo per approssi. All'uopo si [illegible] in serie.

(91) $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} = \left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\frac{x}{2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{4}$ $\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{8}+$ ec., il cui termine generale è $1.3.5.7 - \frac{(2m-1)}{2.4.6.8-2}$ fatta sost.e nella (90) si avrà

(92) $dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{dx}{\sqrt{yx-x^2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{4}\right.$ $\left.\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{8}+\cdots \text{ec.}\right)$. Apparisce quindi che gl'integrali di dive[rsi] li termini che compongono il 2.° membro sono compresi nella formola

$A\int\frac{-x^n dx}{\sqrt{yx-x^2}}$, ove n è numero intero positivo, negativo o zero, e la A è un coeff.e costante che varia al variare di n. Si osservi che al punto di partenza del mobile si ha $x=k$ ~~$x=y$~~, ne[l] ha poi

$1-\theta a = y$

$1-\theta\delta = x$, e però $x=y$; al punto più basso si ha $\delta=0$, e però $\theta\delta$

e quindi $x=0$; laonde, per avere la durata della mezza oscillazione si debbono prendere gl'integrali da $x=\gamma$, ad $x=0$. — Poniamo dunque che

$\int -\frac{dx}{\sqrt{\gamma x - x^2}} = B_0$, presa fra gli limiti; che

$\int -\frac{x\,dx}{\sqrt{\gamma x - x^2}} = B_1$

- - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - -

$\int -\frac{x^n dx}{\sqrt{\gamma x - x^2}} = B_n$, presi fra i limiti indicati. Sia T il tempo dell'intera oscillazione, il quale è doppio del tempo della mezza oscillazione, e per conseguenza l'integrale della (92) darà la

(93) $T = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(B_0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}B_1 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4}B_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{8}B_3 + \text{— \&c}\right)$. Il termine generale del 2.° membro di quest'equazione sarà

$\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{1.3.5.7 \text{----} (2n-1)}{2.4.6.8 \text{----} 2n}\left(\frac{1}{2}\right)^n B_n$ a cominciare dal 2.° termine. I valori degl'integrali determinati B_0, B_1, — \&c B_n sono legati di guisa che da B_0 si ne deriovano tutti gli altri. —

Lezione 112.

Infatti, noi abbiamo per identità di termini la

(94). $\int -\frac{x^n dx}{\sqrt{\gamma x - x^2}} = \int \frac{\left(\frac{1}{2}\gamma - x\right)x^{n-1}}{\sqrt{\gamma x - x^2}}dx + \frac{\gamma}{2}\int -\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{\gamma x - x^2}}$; integrando ss

parti si ha

$$\int \frac{(\frac{1}{2} y - x) x^{n-1}}{\sqrt{yx - x^2}} dx = x^{n-1} \sqrt{yx - x^2}$$

$- (n-1) \int x^{n-2} \sqrt{yx - x^2}\, dx$; ma

$$\int x^{n-2} \sqrt{yx - x^2}\, dx = \int \frac{x^{n-2} (yx - x^2)}{\sqrt{yx - x^2}}$$

$$= y \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{yx - x^2}} - \int \frac{x^n dx}{\sqrt{yx - x^2}},$$ d'onde la

(95) $$\int \frac{- x^n dx}{\sqrt{yx - x^2}} = x^{n-1} \sqrt{yx - x^2} + (n-1) \int \frac{x^n dx}{\sqrt{yx - x^2}}$$

$$+ \frac{y(2n-1)}{2} \int \frac{- x^{n-1} dx}{\sqrt{yx - x^2}},$$ e quindi la

(96) $$\int \frac{- x^n dx}{\sqrt{yx - x^2}} = \frac{x^{n-1} \sqrt{yx - x^2}}{n} + \frac{y(2n-1)}{2n} \cdot$$

$$\int \frac{- x^{n-1} dx}{\sqrt{yx - x^2}}.$$ Gli due limiti si ha $x = y$, $x = 0$, pei quali valori $\sqrt{yx - x^2} = 0$ nell'un caso e nell'altro. Prendendo adunque gl'integrali fra i prefati limiti, si avrà

(97) $B_n = \frac{y(2n-1)}{2n} B_{n-1}$, nella quale ponendo a vece di n, 1, 2, 3 &c successivamente si avranno le seguenti equazioni

(98) $B_1 = \frac{1}{2} y B_0$

(99) $B_2 = \frac{3}{4} y B_1 = \frac{1.3}{2.4} y^2 B_0$

(100) $B_3 = \frac{5}{6} y B_2 = \frac{1.3.5}{2.4.6} . y^3 B_0$

(101) $B_4 = \frac{7}{8} y B_3 = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} y^4 B_0$

- - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - -

(102) $B_n = \frac{1.3.5.7. \ldots (2n-1)}{2.4.6.8 \ldots 2n} y^n B_0$.

Ad ottenere B_0 converrà integrare

$-\frac{dx}{\sqrt{yx-x^2}}$ da $x=y$, fino ad $x=0$, e così si avrà B_0, B_1, B_2 &c.

Poniamo l'equazione

(103) $\sqrt{yx-x^2}=\sqrt{x(y-x)}=xz$, si avrà $x(y-x)=x^2z^2$, e però la

(104) $x=\frac{y}{1+z^2}$, e la

(105) $dx=-\frac{2yzdz}{(1+z^2)^2}$, onde

$-\int\frac{dx}{\sqrt{yx-x^2}}=2\int\frac{dz}{1+z^2}=2A(\sigma=z)$
$=2A\left(\sigma=\frac{\sqrt{yx-x^2}}{x}\right)$: ma

$\theta\, 2A(\sigma=z)=\frac{1-(yx-x^2):x^2}{1+\frac{yx-x^2}{x^2}}=$
$\frac{2x-y}{y}$, onde avremo la

(106) $-\int\frac{dx}{\sqrt{yx-x^2}}=A\left(\theta=\frac{2x-y}{y}\right)+C$

Quest' integrale si debbe estendere da $x=y$, ad $x=0$, e però il suo valore sarà $A(\theta=-1)-A(\theta=1)$: ma $A(\theta=-1)=(2n+1)\pi$, ed $A(\theta=1)=2n\pi$, dunque si avrà la

(107) $B_0=\pi$. Avremo quindi

(108) $B_1=\frac{1}{2}y\pi$,

(109) $B_2=\frac{1.3}{2.4}\pi y^2$,

(110) $B_3=\frac{1.3.5}{2.4.6}\pi y^3$,

(111) $B_4=\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\pi y^4$,

— — — — — — —

— — — — — — —

(112) $B_n=\frac{1.3.5.7 --- (2n-1)}{2.4.6.8 --- 2n}\pi y^n$, per cui la (93) diventa la

(113) $T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{y}{a}+\left(\frac{1.3.}{2.4.}\right)^2\left(\frac{y}{a}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{y}{a}\right)^3 \&c\right)$

il termine generale di questa serie è

$$2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\right)^2\left(\frac{y}{2}\right)^n$$

La serie poi procedendo sempre secondo le potenze di y ed essendo sempre $y<2$ sarà convergente ($1-\cos\alpha = y$; max. $\alpha=180°$ che non può mai essere).

§. 535. Nelle piccole oscillazioni y è picolissimo, e quindi trascurati i termini che contengono y, ne viene la

(18) $T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$; valore già trovato per le piccole oscillazioni al §. 522.

L'equazione (113) ci mette davanti che la durata delle oscillazioni non è rigorosamente indipendente dall'arco passato dal pendolo; e quindi per le osservazioni nelle quali vi vuole molta precisione si conservano i due primi termini del valore di T dato dalla (113), vale a dire si pone la

(114) $T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{y}{2}\right)$; ma

$y=1-\cos\alpha$ (y è il sen. verso), e

$\cos\alpha = 1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{2.3.4}+$ ecc. dunque sostituendo, e limitandosi ai termini che contengono α alla 2ª potenza, avremo

(115) $T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right)$. Vedesi che $\pi\frac{\alpha^2}{16}\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}$ è la correzione dovuta

alla grandezza dell'arco descritto. Essa varia con l'arco quando il pendolo oscilla in un mezzo resistente. —

§. 530. Se il pendolo s'allontani indeterm.te poco dalla verticale, cioè se a suppongasi indeterm.te piccolo, egli spenderebbe a tornare sulla verticale un tempo finito che è rappresentato da $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$. Dunque il mobile percorre uno spazio indeterm.te piccolo in un tempo finito. La qual cosa ripetere si deve dalla forza continua che sollecita il mobile stesso, la quale è indeterm.te piccola. Difatti, essa è la componente della gravità secondo la tangente: ma nell'estensione dell'archetto indeterm.te piccolo e che termina al punto più basso della trajettoria, la tangente fa con la verticale un angolo che differisce da un retto di una quantità indeterm.te piccola, e però il suo coseno sarà indeterm.te piccolo; ma per avere la componente della gravità secondo la tangente conviene moltiplicarla pel suo coseno, dunque tale forza sarà indeterm.te piccola. Generalmente, allorchè un

punto materiale pesante è
costretto a rimanere su di una
data curva di forma qualun-
que egli può restare in equi-
librio in tutti i punti della
curva nei quali la tangente
è orizzontale. Se il mobile si
metta vicino oltre ogni limite
ad uno di questi punti, il peso
del mobile si scomporrà in
2 l'una perpend.e alla curva
e che resterà elisa, e l'altra
secondo la tangente che sarà
indeterm.te piccola e stante
la sua direzione tenderà a
ricondurlo alla posizione d'e-
quilibrio o ad allontanarlo
abbassandolo. Nel 1.o caso
l'equilibrio sarà stabile e il
punto oscillerà di quà e di là
dal punto più basso della
trajettoria facendo oscillazioni
piccolissime. A determinarne
la loro durata, si osservi
che la trajettoria per un'ar-
chetto piccolissimo si confonde
coll'arco del circolo osculatore
di lei per cui $T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ esprimendo
il raggio del circolo osculatore

Capitolo XLI.

Del moto di un punto materiale pesante sulla cicloide

§. 537. Nel §. 501. si sono dimostrate le proprietà generali del moto di un punto materiale pesante sopra di una data linea qualunque nello spazio. Prendiamo ora in considerazione un caso particolare e cioè il moto di un punto materiale sulla Cicloide.

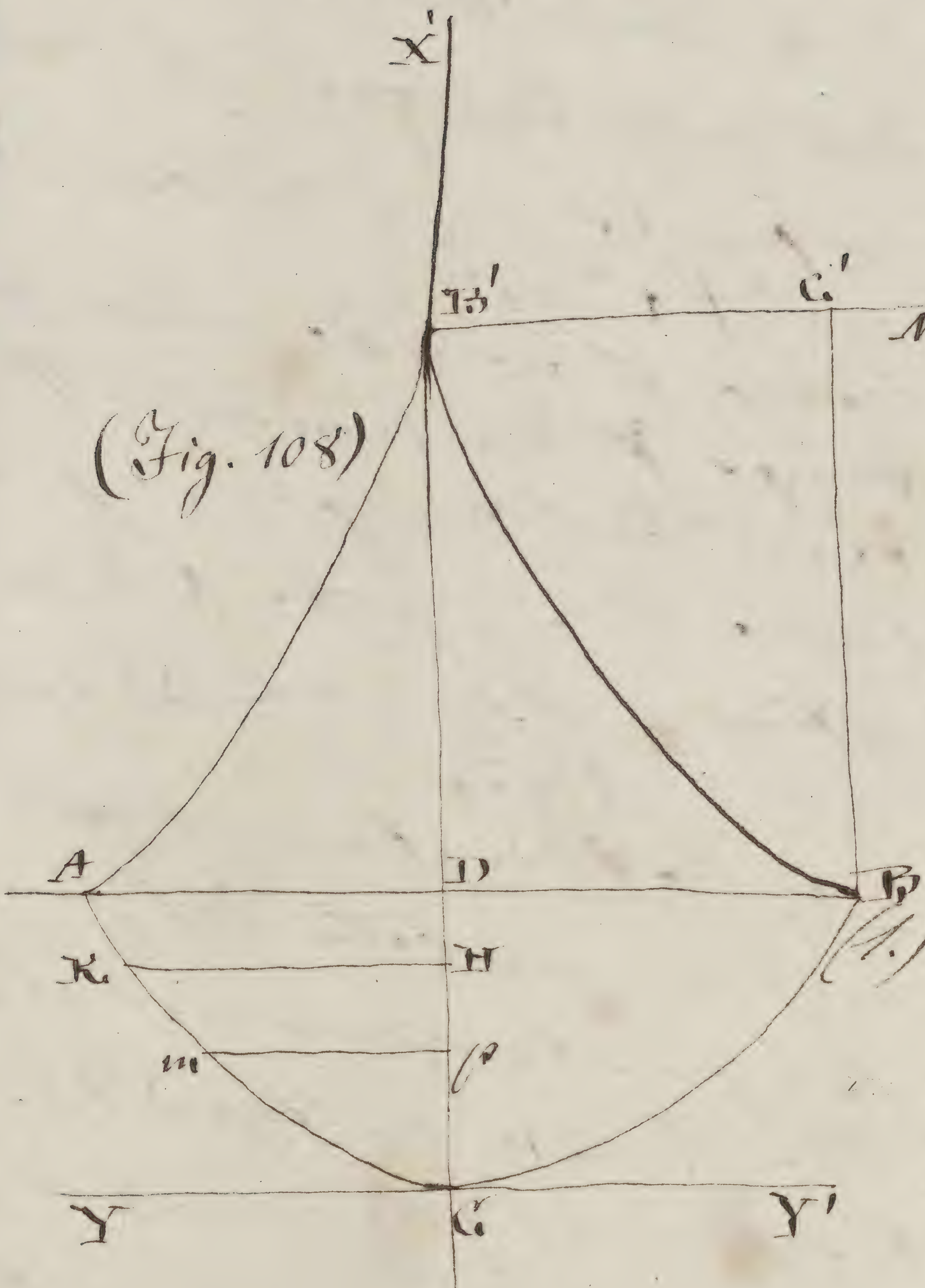
Sia (fig 108) la cicloide AGB situata sotto l'asse orizzontale AB essendo G il punto più basso di lei: Se si conduca la normale GD sarà $GD = 2r$. Si ponga $s = Gm$, arco, che a $Gp = x$ corrisponde, e si avrà la

(1.) $s^2 = 8rx$ cominciando l'arco nel punto G ove è nello stesso tempo $s=0$, $x=0$. Quando $x=2r$ si ha la mezza cicloide, e la (1) si muta nella

(2) $s^2 = 16r^2$, e però la

(3) $s = AG = 4r$. Il che mostra essere la lunghezza della mezza cicloide eguale al doppio del diametro GD del circolo generatore di essa.

Un punto materiale pesante sulla cicloide non potrà essere



(Fig. 108)

in equilibrio che in G. Se il mobile s'innalzi da G fino a K ritornerà a ricadere fino in G, dipoi salirà sull'altro ramo della cicloide indi ritornerà in G ed oscillerà da una parte e dall'altra. Non avendo riguardo al mezzo, i due rami di cicloide essendo eguali saranno pure eguali i rami ascendenti e discendenti del mobile che saranno passati in tempi eguali. A determinare il tempo dell'oscillazione si ha

$dt = \frac{ds}{\sqrt{A^2 - 2gz}}$. Si osservi che l'arco s avendo principio dal tempo t diminuisce all'aumentare del tempo, e però avremo la (posto $A = 0$, vel. iniz.)

(4) $dt = -\frac{ds}{\sqrt{2gz}}$. La variabile z è l'ordinata verticale del mobile contata dal punto di sua partenza come al §. 816. Sia $h = GH$ l'altezza del punto K sopra G; e quando il mobile è arrivato in un punto qualunque m della trajettoria sarà $z = Hp$; ma $ap = x$, dunque $z = h - x$. Prendiamo il differenziale della (1.) e dividendo per 2 avremo

(5) $sds = crdx$, d'onde la

(6) $ds = \frac{crdx}{s}$:

Messo questi valori nella (6) si ottiene la

(7.) $dt = \frac{-4rdx}{s\sqrt{2g(h-x)}}$; ma $s = 2\sqrt{2rx}$

per la (1.) dunque

$dt = \frac{-4rdx}{2\sqrt{2rx}\sqrt{2g(h-x)}}$, ovvero la

(8.) $dt = -\frac{2rdx}{\sqrt{2rx}\sqrt{2g(h-x)}} = -\sqrt{\frac{r}{g}}\frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}$

di cui l'integrale è

(9) $t = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot A\left(\theta = \frac{2x-h}{h}\right)$; §. 536

non si aggiunge costante arbitraria perchè si conta il punto di partenza del mobile dove contemporaneamente si ha $x=0$, $h=0$; ~~in tale ipotesi~~.

Sia t_1 il tempo passato quando il mobile attinge il punto C, nel qual punto $x=0$, onde dalla (9) si ha la

(10) $t_1 = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot A(\theta = -1) = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.

Dalla quale si rende aperto che il tempo della caduta del mobile lungo dell' arco della cicloide è indipendente dall'altezza da cui cade vale a dire dal punto ove comincia a muoversi; di guisa che due punti materiali pesanti che nello stesso tempo partano da due diversi punti K, K' arriveranno nello stesso tempo al punto più basso C della cicloide stessa.

§. 538. Nell' Introd.ne si è veduto che l'equazione della cicloide è

(11) $y = r\,A\left(\theta = \frac{\sqrt{2rx-x^2}}{r}\right) + \sqrt{2rx-x^2}$.

Siano x_1, ed y_1 le coord.te dell' evoluta della cicloide, ed abbiamo veduto nel calcolo sublime che sussister debbono le due equazioni

(12) $(y-y_1)y' + (x-x_1) = 0$.

(13) $(y-y_1)y'' + y'^2 + 1 = 0$. Poniamo $\sqrt{2rx-x^2} = u$, e la (11) si muta nella

(14) $y = r.A\left(\theta = \frac{u}{r}\right) + u$.

Di cui la derivata è la

(15) $y' = r.\frac{u'}{r\sqrt{1-\frac{u^2}{r^2}}} + u' = \frac{ru'}{\sqrt{r^2-u^2}} + u'$

ma $u' = \frac{r-x}{\sqrt{2rx-x^2}}$, dunque

$y' = \frac{r(r-x)}{\sqrt{2rx-x^2}\sqrt{r^2-2rx+x^2}} + \frac{r-x}{\sqrt{2rx-x^2}}$

$= \frac{r(r-x)}{(r-x)\sqrt{2rx-x^2}} + \frac{r-x}{\sqrt{2rx-x^2}}$, ovvero avremo la

(16) $y' = \frac{2r-x}{\sqrt{2rx-x^2}} = \sqrt{\frac{2r-x}{x}}$, e quindi

$y'' = -\frac{r}{x\sqrt{2rx-x^2}}$; dalla (12) e (13) si hanno la

(17) $x - x_1 = \frac{y'(y'^2+1)}{y''}$, e la

(18) $y - y_1 = \frac{-(y'^2+1)}{y''}$, nelle quali ponendo i trovati valori di y', e y'', avremo le

(19) $x - x_1 = -x\sqrt{\frac{2r-x}{x}}\left(\frac{2r-x}{x}+1\right)\frac{\sqrt{2rx-x^2}}{r}$

$= -2(2r-x)$.

Lezione 113.

la 114 Ripetiz.ne

(20) $y - y_1 = \dfrac{\left(\dfrac{2r-x}{x}+1\right)x\sqrt{2rx-x^2}}{r} = 2\sqrt{2rx-x^2}$,

onde

(21) $x = 2r - x_1$,

(22) $y = y_1 + 2\sqrt{2r(2r-x_1)+(2r-x_1)^2}$; fatte le sostituz.i nella (11) ne risulta la

(23) $y_1 = rA\left(\theta = \dfrac{\sqrt{2r(2r-x_1)-(2r-x_1)^2}}{r}\right) - \sqrt{2r(2r-x_1)\mp(2r-x_1)^2}$: poniamo la equazione

(24) $2r - x_1 = v$, ed avremo la

(25) $y_1 = rA\left(\theta = \dfrac{\sqrt{2rv-v^2}}{v}\right) - \sqrt{2rv-v^2}$.

Laonde, l'evoluta della cicloide è pure una cicloide che ha per circolo generatore un circolo che ha lo stesso raggio dell'evolvente.

La (24) ci mostra che si è trasportato l'asse delle y parallelam.e a se stesso in B' (fig. 108) essendo $CB' = 2r$.

Sia $B'B$ la evoluta della mezza cicloide CB che è l'evolvente. Vedesi quindi, che l'estremità di un filo che si sviluppi dalla mezza cicloide BC descrive la mezza cicloide $B'B$. e quando il filo si è intieram.e sviluppato si trova $B'C = 2r$.

Il raggio osculatore della cicloide è dato dalla

(26) $r = \dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, che nel caso nostro si riduce a

$r = -2\sqrt{2r}\sqrt{2r-x}$.

Il massimo di questo raggio si ha quando $x=0$, cioè al punto C. Ivi è

(27) $R = 4r$ come esser debbe.

Se dunque si prolunghi CD fino in B', di modocchè si abbia CD = BB', e si descrivano le mezze cicloidi B'A, B'B tangente le rette XX', AB eguali ad AC, BC, le AB', BB' saranno le evolute —

Figuriamo che le B'A, B'B siano formate da due ossi inflessibili che abbiano la stessa curvatura e che in B' sia fisso un filo eguale in lunghezza a B'A o B'B e che alla sua estremità sia attaccato un peso. Se esso si diparte dalla verticale, il pendolo oscillerà da una parte e dall'altra.

Durante le oscillazioni il filo si assetterà prima alla curva B'A e poscia alla B'B, e di conseguenza la sua estremità C descriverà una curva che pel dimostrato sarà una cicloide, e perciò appresso il dettato le oscillazioni di cosiffatto pendolo si faranno nello stesso tempo prescindendo dal mezzo.

Supponiamo che vi sia al principio del moto una velocità iniziale diretta nel

piano AGB il tempo dell'oscil-
lazione non sarà cambiato
poichè sarebbe lo stesso che
cadesse da una magg. altezza

§. 539. Il tempo della caduta dell'
arco GK è indipend. dalla lun-
ghezza di quest'arco, e però
il tempo della caduta non va-
rierà se tale arco sia picco-
lissimo: ma in allora il
tempo sarebbe lo stesso
che se cadesse per l'arco
del circolo osculatore in G.
§. 537. Dunque il valore
di t eguagliar deve il valo-
re del tempo che un pendo-
lo impiega ad oscillare aven-
do per raggio quello del circo-
lo osculatore in G. La
qual cosa succede poichè la
mezza cicloide AG = 4r, §. 537.
Il tempo della mezza oscil-
lazione di un pendolo della
lunghezza 4r, è $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4r}{g}} =$
$\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = t$. §. 522, quando le
oscillazioni sono piccolissime

§. 540. Dicesi Tautocrona da
αυτο = il medesimo e χρονος =
tempo, una curva sulla
quale movendosi un pun-
to materiale pesante at-
tinge sempre al punto
più basso della curva nel
med. tempo a qualunque
punto di lei abbia princi-
pio il moto. Dunque la
cicloide è tautocrona, ed dimostr.

remo che è la sola della curva piana che goda di questa proprietà.

Infatti riprendiamo la (21) $dt = -\frac{ds}{\sqrt{2az}}$; ma al §. 537 si ha $z = h - x$, dunque avremo,

(28) $dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g}\sqrt{h-x}}$. Qualunque sia la nuova Tautocrona, s è funzione di x, la quale si può supporre sviluppata secondo le potenze della x, e quindi di porre la

(29) $s = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \&c$ ove A, B, C sono indeterminati.

Siccome poi x ed s si contano dal punto più basso, così esser dee $x = 0$, ed $s = 0$ nello stesso tempo; dunque nel 2.º membro gli esponenti α, β, γ esser debbono tutti positivi. Inoltre alcuno esponente può esser zero poichè ne verrebbe s. quando $x = 0$, $s = A$ ... $= 0$,

Prendendo il diff.e della (29) rispetto ad x, si ha

(30) $ds = A\alpha x^{\alpha-1}dx + B\beta x^{\beta-1}dx + C\gamma x^{\gamma-1}dx + \ldots \&c$ e posto il valore di ds nella (28) avremo

(31) $dt = -\frac{A\alpha}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{x^{\alpha-1}dx}{\sqrt{h-x}} - \frac{B\beta}{\sqrt{2g}}\frac{x^{\beta-1}dx}{\sqrt{h-x}} - \frac{C\gamma}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{x^{\gamma-1}dx}{\sqrt{h-x}}$. Per avere il tempo t, speso dal mobile a

discendere dall'altezza h, i dunque prendere gli integrali dei termini del 2.° membro da $x=h$, ad $x=0$. Poniamo $x=hx_1$ ed allora avremo $dx=hdx_1$ ed in tal caso gli integrali dovransi prendere da $x_1=1$, ad $x_1=0$. Si ha poi da tale ipotesi

$\sqrt{h-x}=\sqrt{h}\sqrt{1-x_1}$;

$x^{\alpha-1}dx=h^{\alpha}x_1^{\alpha-1}dx_1$,

$x^{\beta-1}dx=h^{\beta}x_1^{\beta-1}dx_1$,

$x^{\gamma-1}dx=h^{\gamma}x_1^{\gamma-1}dx_1$,

— — — — — — — —, per cui

l'equazione (31) si muta nella

(32) $$dt=-\frac{A\alpha}{\sqrt{2g}}h^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{x_1^{\alpha-1}dx_1}{\sqrt{1-x_1}}-\frac{B\beta}{\sqrt{2g}}h^{\beta-\frac{1}{2}}\frac{x_1^{\beta-1}dx_1}{\sqrt{1-x_1}}-\frac{C\gamma}{\sqrt{2g}}h^{\gamma-\frac{1}{2}}\times\frac{x_1^{\gamma-1}dx_1}{\sqrt{1-x_1}}-\text{— — — —}\ \&c$$

Gli integrali di questi termini si debbono dunque prendere da $x_1=1$, ad $x_1=0$. Poniamo che $A_1=-\int\frac{x_1^{\alpha-1}dx_1}{\sqrt{1-x_1}}$ così

$$B_1=-\int\frac{x_1^{\beta-1}dx_1}{\sqrt{1-x_1}},$$

$$C_1=-\int\frac{x_1^{\gamma-1}dx_1}{\sqrt{1-x_1}},$$

— — — — —

fra i prefati limiti presi, e si avrà l'equazione

(33) $$t_1=\frac{AA_1\alpha}{\sqrt{2g}}h^{\alpha-\frac{1}{2}}+\frac{BB_1\beta}{\sqrt{2g}}h^{\beta-\frac{1}{2}}+\frac{CC_1\gamma}{\sqrt{2g}}h^{\gamma-\frac{1}{2}}+\ \&c$$

Si osservi che la somma delle quantità A_1, B_1, C_1 &c. può esser nulla; perchè A_1 è l'integrale di $\frac{x_1^{\alpha-1}dx}{\sqrt{1-x_1}}$; la $\frac{x_1^{\alpha-1}}{\sqrt{1-x_1}}$ è una funzione di x_1; e l'integrale indeterminato esprime che si debbono prendere tutti i valori da $x_1=1$, ad $x_1=0$ e farne la somma e moltiplicarla per dx_1; dunque questa somma di termini che hanno lo stesso segno non potrà mai esser zero. Lo stesso si dirà di B_1, C_1 &c; dunque nessun integrale determinato può esser zero.

Per la curva tautocrona debb'essere t_1 indipendente da h, cioè dall'altezza da cui cade. Perchè ciò sia è necessario che tutti i termini che hanno per esponente della h dei numeri divono esser nulli. Le α, β, γ &c sono tutti differenti fra loro, dunque un solo di termini della posta serie può contenere h coll'esponente zero. Supponiamo che sia il 1.° termine della (33) che abbia l'esponente di $h=0$, cioè sia $\alpha=-\frac{1}{2}$, e per gli altri converrà che sia $\frac{BB_1 f^{\beta}}{\sqrt{2g}}$ ma nè β nè B_1 ~~[illegible]~~ non sono $=0$, dunque converrà che $B=0$, così $C=0$ &c perchè la curva sia tautocrona, il valore di s, si riduce dunque

(34) $s = Ax^{\frac{1}{2}}$, d'onde la

(35) $s^2 = A^2 x$; che non è altro che la (1) se pongasi

(36) $A^2 = 8r$; ma la (1) appartiene ad una cicloide a base orizzontale di cui il punto più basso che vi è il vertice è attinto da un mobile nello stesso tempo da qualunque punto cominci a moversi; dunque la cicloide è la sola curva tautocrona nel vuoto. —

Dalla (36) si ha

(37) $A = 2\sqrt{2r}$ per cui nella (33) ponendo $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ — è

(38) $t_1 = \dfrac{2A_1\sqrt{2r}}{2\sqrt{2g}} = A_1\sqrt{\dfrac{r}{g}}$.

Posto $\alpha = \frac{1}{2}$, nel valore di A_1 si ottiene

(39) $A_1 = -\displaystyle\int \frac{dx_1}{(x_1 - x)^2} = A\left(\theta = \frac{2x_1 - 1}{}\right) = \pi$ come al §. 534 essendo da porre $\gamma = 1$. Dunque dalla (38) si ha

$t_1 = \pi\sqrt{\dfrac{r}{g}}$, come davanti si è trovato.

§. 541. Dietro l'osservaz. fatta al §. 520, riesce patente, che aspettando la cicloide AGB (fig. 108) sopra la superficie di un cilindro verticale a base qualunque la cicloide verrà cambiata in una curva a doppia curvatura la quale sarà tuttavia tautocrona, di guisa che un mobile abbandonato all'azio-

ne

ne della gravità di guisa che scorrono sulla curva arrivi sempre al punto infimo di questa curva qualunque si il punto dal quale cominci a muoversi e qualunque sia la projezione della curva sui piani coord.ti —

a doppia curv. §. 512. Tutte le curve tautocrone che possono esistere non sono che tautocrone a base orizzontali avviluppate in cilindri retti verticali. Difatti se sviluppasi la tautocrona avviluppata al cilindro, la curva risulterà piana, e le proprietà del moto si conserveranno le stesse, e però se la curva a doppia curvatura è tautocrona, il sarà pure la curva piana; ma se la curva piana è tautocrona si è dimostrato che è una cicloide, dunque —

Lezione 115.

§. 513. La Cicloide non solo è isocrona e tautocrona, è eziandio brachistocrona (brachy-breve, chronos-tempo) curva della più breve discesa.

Ponendo nella (2) del §. 510

$$(2)\quad dt=\frac{ds}{\sqrt{A^2+2gz}}$$

, $A=0$, e $z=x-x_1$, avremo la,

$$(10)\quad dt=\frac{dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2g(x-x_1)}}$$

; siccome si vuole che il tempo sia minimo converrà che la primitiva del

2° membro sia minimo. — Sia K il punto dal quale il mobile comincia a muoversi nella trajettoria e sia K' il punto della più breve discesa. In K sia $x=x_1$ $y=y_1$, $z=z_1$, e in K', $x=x_2$, $y=y_2$, $z=z_2$. Si è veduto nel C. S. che i due punti K, K' esser non debbono nella verticale, e che la brachistocrona è una cicloide a base circolare.

§. 544. A dimostrare che realmente ha luogo un minimo, trasportiamo in K l'origine delle coordinate, ed allora sarà $x_1=0$, la brachistocrona è una curva piana, e però alla (40) si debbe surrogare la

(41) $dt = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}}\,dx$; dunque avremo pel Cal. Variaz.i la

(42) $V = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}}$, la cui primitiva U dev'essere un minimo da $x_1=0$ ad x_2, converrà adunque che la variazione seconda della U sia una quantità positiva e però che abbiasi

(43) $\delta^2 U = \int \delta^2 V . dx$ che dovrà essere positiva presa fra gli stessi limiti. I limiti poi sono fissi, poichè dati, dunque dovremo prendere la derivata rispetto ad y' solamente e però avremo

(44) $\frac{\delta\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}} = \frac{y'}{\sqrt{2gx}\sqrt{1+y'^2}}\delta y'$, prendendo la variazione di questa considerando $\delta y'$ costante avremo

(45) $\frac{\delta^2\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sqrt{2gx}\sqrt{1+y'^2}}{2gx(1+y'^2)}(\delta y')^2 -$

$\frac{2gx.y'^2}{(2gx(1+y'^2))^{\frac{3}{2}}}(\delta y')^2 = \frac{1}{\sqrt{2gx(1+y'^2)^3}}(\delta y')^2$

Dovendosi prendere il segno positivo davanti al radicale, è manifesto che questa quantità sarà positiva. Moltiplicando per dx e prendendone l'integrale si avrà la somma dei valori degl' integrali presi fra i limiti, e però ha luogo un minimo. Dunque dovremo concludere che la curva della minima discesa è la cicloide a base orizzontale non essendo i due punti sulla stessa verticale.

§. 545. Se vogliasi aver rispetto alla resistenza del mezzo, che supporremo presentata da $\varphi(u)$ essendo $u = v^2$, cioè al quadrato della velocità, si avrà

(46) $V = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{u}}$, la di cui primitiva presa fra certi limiti, esser debbe un minimo, e ciò si deduce dal §. 428. Essendo $\frac{d^2s}{dt^2}$ l'espressione della forza continua secondo la tangente come si è veduto al §. 471. e $\frac{g\,dz}{ds}$, la componente della gra-

vità secondo la tangente (presa come al §. 503, e le $\varphi(u)$ agendo secondo la tangente ma in senso opposto alle $g\frac{dz}{ds}$ avremo l'infrascritta equazione di condizione

(47) $\frac{d^2s}{dt^2}=g\frac{dz}{ds}-\varphi(u)$, che moltiplicata per $\frac{2ds}{dt}$, ne verrà la

(48) $\frac{2ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=2g\frac{dz}{dt}-\frac{2ds}{dt}\varphi(u)$.

ossia

(49) $\left(\frac{ds^2}{dt^2}\right)^{\prime}=2g\frac{dz}{dt}-\frac{2ds}{dt}\varphi(u)$, ove s è funzione della t. Ma s è funzione della z; e z è funzione di t; $u=v^2$ sarà $=\frac{ds^2}{dt^2}$, dunque dovremo prendere il diff.° delle spazio considerandolo funzione di z e z funzion di t, onde a vece della (49) porremo

(50) $u'\left(\frac{dz}{dt}\right)=2g\frac{dz}{dt}-\frac{2ds}{dt}\varphi(u)$

ovvero

(51) $u'=2g-2\frac{ds}{dz}\varphi(u)$ ove u' è la derivata di u considerata funzione di z variabile indipendente. Ma $ds=\sqrt{dy^2+dz^2}$ $=dz\sqrt{1+y'^2}$, essendo z funz. di y variabile indipend. dunque avremo

(52) $u'-2g+2\varphi(u)\sqrt{1+y'^2}=0$, che è appunto la cond. che al §. si è asserito aver luogo nel problema della brachistocrona si suppone che la resist. sia proporzionale al quad.° della velocità. —

Capitolo XLII.°

Del moto di un punto materiale pesante sopra una data superficie.

§. 546. In questo movimento potremo considerare il mobile come libero, e fare astrazione alla superficie sulla quale il mobile è costretto a muoversi, purchè aggiungiamo alle forze continue una forza costante il cui effetto sia di distruggere in ogni istante la pressione esercitata dalle prefate forze, e dalla componente nella direzione normale della velocità. Questa forza rappresenterà la resistenza della superficie, e sarà eguale ed opposta alla pressione che questa superficie sopporta. Sia F questa forza incognita, che sarà normale alla superficie. Come si è vedo. al §. 502. avremo le tre equazioni del moto

(1) $\frac{d^2x}{dt^2} = X + F\theta F^x$,

(2) $\frac{d^2y}{dt^2} = Y + F\theta F^y$,

(3) $\frac{d^2z}{dt^2} = Z + F\theta F^z$, Sia

(4) $Q = f(x, y, z) = 0$, l'equazione della superficie sulla quale è costretto a restare il mobile nel suo movimento, e sia la

(5) $V = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dz}\right)^2}}$,

avremo pel §. 122 le equazioni

(6) $\theta \cdot F' X = V \frac{dQ}{dx}$,

(7) $\theta \cdot F' Y = V \frac{dQ}{dy}$,

(8) $\theta \cdot F' Z = V \frac{dQ}{dz}$.

Nel valore di V, uno de' segni è relativo alla porzione di normale che cade dalla parte concava della superficie, e l'altro dalla parte convessa. Sostituiti nelle (1), (2), e (3) i valori di questi coseni, se si eliminì F'V dalle risultanti equazioni, rimarranno due equazioni derivate di 2.° ordine, cioè sono X, Y, Z, e le derivate di Q rispetto ad x, y, z. Tali equazioni unite alla (4) serviranno a determinare le coord. x, y, z del mobile in funzione del tempo cioè la sua precisa posizione. —

§. 547. Per fare un' esempio, supponiamo che la gravità sia la sola forza continua dalla quale sia sollecitato il mobile e la superficie sferica. Sia z l'ascissa verticale nella direzione della gravità e supposto l'origine nel centro della sfera, supporremo positive le coord. sotto il med.° e posta g la gravità in questo caso si ha X=0, Y=0, Z=g, e si avrà la

(9) $x^2+y^2+z^2-a^2 = Q = 0$, e poi

(10) $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2x$,

(11) $\left(\frac{dQ}{dy}\right) = 2y$,

(12) $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 2z$, e di conseguenza

(13) $V = \pm\frac{1}{2a}$

(14) $\cos F^\wedge X = \pm\frac{x}{a}$,

(15) $\cos F^\wedge Y = \pm\frac{y}{a}$,

(16) $\cos F^\wedge Z = \pm\frac{z}{a}$; Il raggio della sfera e il prolungamento di lui sono le due parti di normali considerate cioè son le due parti che cadono l'una dalla parte concava e l'altra dalla convessa. I coseni dati dalle (14) (15) (16) sono i valori dei coseni che fa il raggio cogli assi; i segni inferiori si debbono prendere se la forza F tende ad accostare il mobile al centro della sfera; se la direzione è opposta si prendono i positivi. Le (1) (2) e (3) del moto nella presente questione diventano

(17) $\frac{d^2x}{dt^2} = \pm F\frac{x}{a}$,

(18) $\frac{d^2y}{dt^2} = \pm F\frac{y}{a}$,

(19) $\frac{d^2z}{dt^2} = g \pm F\frac{z}{a}$, ove i prendere i segni superiori si debbono alle stesso tempo considerando che Per eliminare $\pm F$, si moltiplichino le (17), (18), (19) rispettivamente per dx, dy, dz, e la somma dei

prodotti darà la

(20) $\frac{dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = g\,dz - \frac{F}{a}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$; ma dalla (9) diff.e si ha

(21) $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$, dunque la (20) si riduce alla

(22) $\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = g\,dz$,

ovvero alla

(23) $d\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2}\right) = g\,dz$, e però

(24) $d\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) = 2g\,dz$, ed integrando avremo la

(25.) $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + C$. —

Moltiplicando la (17) per y e la (18) per x, la differenza dei prodotti sarà la

(26) $y\,d^2x - x\,d^2y = d(y\,dx - x\,dy) = 0$, e però integrando avremo la

(27) $y\,dx - x\,dy = C_1\,dt$.

§. 548. La determinazione del moto del punto materiale pesante dipendente dall'integrazione delle equazioni di 1.° ord.e (21) (25) e (27) — L'integrazione delle (25) e (27) non si sa eseguire in generale sotto termini finiti, ma però si può separare le variabili e ridurre l'integraz.e a integrare funzioni. Difatti dalla (21) si ha

(28) $x\,dx + y\,dy = -z\,dz$, onde innalzando a quadrato, avremo

(29) $x^2dx^2 + 2xydxdy + y^2dy^2 = z^2dz^2$

Innalzando a quadr. la (27) avremo la

(30) $y^2dx^2 - 2xdxdy + x^2dy^2 = c_1^2dt^2$

Sommandola (29) e (30) otter[remo] la

(31) $(x^2+y^2)(dx^2+dy^2) = z^2dz^2 + c_1^2dt^2$; ma dalla (9) si ha la

(32) $x^2+y^2 = a^2 - z^2$, e dalla (25) otter[remo] la

(33) $dx^2 + dy^2 = (2gz + c)dt^2 - dz^2$,

Dunque la (31) si muta nella

(34) $(a^2-z^2)((2gz+c)dt^2 - dz^2) = z^2dz^2 + c_1^2dt^2$. Ovvero

$((a^2-z^2)(c+2gz) - c_1^2)dt^2 = a^2dz^2$

e quindi la

(35) $dt = \frac{adz}{\sqrt{(a^2-z^2)(c+2gz) - c_1^2}}$, la qu[ale] integrata per approssim[a]zione darà t in funzione di z, e reciprocamente, z in funzione di t. —

§. 519. La coordinata z non bas[ta a] determinare la posizione del mobile, e solo fa con[o]scere un piano parallelo al[l'] orizzontale nel quale [si] deve trovare il mobile [in] ciascun istante. Ma se inol[tre] sia dato l'angolo che fa co[n] l'asse delle x o con quello delle y la projezione orizzon[tale] del raggio vettore del m[o]bile, la posizione di esso m[o]-

Lezione 116.

rà conosciuta. Sia ω l'angolo che la projezione del raggio vettore sul piano orizzontale fa con l'asse delle x. Nel presente caso il raggio vettore è il raggio della sfera che si è chiamato $\underline{a}$. Se dall'estremo di questo raggio si abbassi sul piano (x,y) una perpendicolare, e si unisca con una retta il punto ov'essa incontra il piano col centro della sfera, si avrà un Δ.° rettangolo di cui il raggio vettore sarà l'ipotenusa e i due cateti saranno la z e la projezione del raggio vettore. Si avrà dunque

(36) $\rho = \sqrt{a^2 - z^2}$, e quindi

(37) $y = \sqrt{a^2 - z^2} \, . \sin\omega$,

(38) $x = \sqrt{a^2 - z^2} \, . \cos\omega$, diff.° si ha

(39) $dy = -\frac{\sin\omega \, z dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} + \sqrt{a^2 - z^2} \cos\omega \, d\omega$,

(40) $dx = -\frac{\cos\omega \, z dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \sqrt{a^2 - z^2} . \sin\omega \, d\omega$,

ossia

(41) $dy = -\frac{\sin\omega \, z dz - (a^2 - z^2)\cos\omega \, d\omega}{\sqrt{a^2 - z^2}}$,

(42) $dx = -\frac{\cos\omega \, z dz + (a^2 - z^2)\sin\omega \, d\omega}{\sqrt{a^2 - z^2}}$.

Molt.° queste ultime dai membro membro per le (38) e (37), ne nascono le

(43) $x dy = -(\cos\omega \sin\omega \, z dz - (a^2 - z^2)\cos^2\omega \, d\omega)$

(44) $y dx = -(\sin\omega \cos\omega \, z dz + (a^2 - z^2)\sin^2\omega \, d\omega)$,

la cui differenza è

$y dx - x dy = (z^2 - a^2)(\sin^2\omega + \cos^2\omega) d\omega$
$= (z^2 - a^2) d\omega$; e però avremo la

$ydx - xdy = c, dt$

(45.) $dw = \frac{ydx - xdy}{z^2 - a^2}$; la quale a cagio-
ne della (27.) si riduce alla

(46.) $dw = \frac{c, dt}{z^2 - a^2}$; sost. a vece di
dt il suo valore dato dalla
(35) essa diventerà della forma

(47) $dw = \Gamma'(z) dz$. La quale integrata per approssim. darà w in
funzione di z. Ma z è in
funzione di t, dunque si co-
noscerà w in funz. di t,
e perciò in ciascun istante si
potrà assegnare la posiz. del
punto materiale sulla data
superf. sferica.

§. 550. Dal dettato si rende palese
che il problema del moto di
un punto materiale pesante su
di una superf. sferica dipen-
de dall'integraz. di 2 fun-
zioni ad una sola variabile.
Questo problema comprende
il moto di un pendolo nel
quale la velocità iniziale
non sia non sia nel piano
del pendolo, essendo costretto il
punto a rimanere su di una
superf. sferica. Si otterrà la
soluz. del problema sviluppan-
do i valori di dt e dw in
serie convergenti, e di integra-
re. Le oscillazioni di tal pen-
dolo diconsi coniche, ma so-
no di poco uso nella pratica.

§. 551. Vediamo ora come le (17)(18)(

possano servire per determinare la Γ. Moltiplicate la (17) per x, la (18) per y, la (19) per z la somma dei prodotti sarà

(48) $\frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{dt^2}=gz\pm\Gamma(x^2+y^2+z^2)$
$=gz\pm\Gamma a$; poichè $x^2+y^2+z^2=a^2$ l'equaz. sfera.

Differenziando la (21) si ha
$xd^2x+yd^2y+zd^2z+dx^2+dy^2+dz^2=0$, e però $\frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{dt^2}=$
$-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=-v^2$, essendo v la velocità del mobile.

Dalla (48) si avrà dunque la
(49) $\pm\Gamma=\frac{-v^2+gz}{a}$, che dipende anche dalla velocità iniziale. Quindi il mobile trovasi sotto il piano orizzontale protratto pel centro della sfera, Γ dee essere positiva, e però avanti al radicale si debbe prendere il segno inferiore. Ma al segno inferiore di Γ corrispondono i segni inferiori dei coseni, ΓX, ΓY, ΓZ. In generale, potendo essere z negativa avremo $\frac{v^2-gz}{a}$ che sarà negativa o positiva dipendentemente dal numeratore. Se $\frac{v^2-gz}{a}$ sia negativa, allora il 2.º membro diventa positivo per il segno $-$ avanti la frazione, dunque davanti ad Γ in tal caso si prenderà il $+$ cioè il segno superiore e così davanti ai coseni per la corrispondenza.

Rendesi quindi aperto che la
pressione sarà $\frac{v^2-gz}{2}$ fatta astra-
zione dal segno, osservando che z
sarà positiva se sia sotto il
centro della sfera e negativa
se sopra.

§. 552. In generale, la determinaz.
nel di F dipend.° dalle (1)(2)
e (3) e dal segno di v presen.
ta gravi difficoltà. Per farsene
altro es. semplicissimo suppo-
niamo che la superficie su
quale debbe rimanere il mob.
le sia un piano presentato
dalla

(50) $Q = Ax + By + Cz - D = 0$, prenden.

$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = A$,

$\left(\frac{dQ}{dy}\right) = B$,

$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = C$, e quindi

$V = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, e però

$e\,F^2X = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

$e\,F^2Y = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

$e\,F^2Z = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Le tre
equazioni (1)(2) e (3) prese
divendano

(51) $\frac{d^2x}{dt^2} = X \pm \frac{FA}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

(52) $\frac{d^2y}{dt^2} = Y \pm \frac{FB}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

(53) $\frac{d^2z}{dt^2} = Z \pm \frac{FC}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; le quali

moltiplicate rispettivamente per A, B, C, e sommati i prodotti si ha

$$\frac{A.d^2x + Bd^2y + Cd^2z}{dt^2} = AX + BY + CZ \pm F\frac{A^2+B^2+C^2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = AX + BY + CZ \pm F\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Ma dalla (50) si ha diff.

$Adx + Bdy + Cdz = 0$, e diff. ancora

$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0$, dunque avremo la

(54) $AX + BY + CZ \pm F\sqrt{A^2+B^2+C^2} = 0$,

d'onde la

(55) $F = \mp\frac{AX + BY + CZ}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Posto che la gravità sia la sola forza continua che sollecita il mobile la (55) si riduce alla

(56) $F = \mp\frac{Cg}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Ove si deve prendere quel segno che rende F positivo. Si osservi che

$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, è il coseno dell'angolo che la perpendicolare al piano della (50) fa con l'asse delle z. Dunque il 2.do membro della (56) rappresenta la componente della gravità perpend.re al piano come esser debbe. Se il piano sia orizzontale e si prenda per l'(x, y) l'equazione di esso sarà $z = 0$, che paragonata colla (50) da $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, e $C = 1$, e però $F = \mp g$, come esser debbe.

nel valore di F dato dalla (56) non entra la velocità, e però il suo valore dipende da q.

§. 553. Riprendiamo le (1) (2) (3) e (4) e differenziando la (4) si averà la

(57) $dQ = \left(\frac{dQ}{dx}\right) dx + \left(\frac{dQ}{dy}\right) dy + \left(\frac{dQ}{dz}\right) dz = 0$. Moltiplicando le (6), (7) e (8) rispettivamente per dx, dy e dz e sommando i prodotti averemo la

(58) $\theta F^2 X . dx + \theta F^2 Y . dy + \theta F^2 Z . dz = V\left(\left(\frac{dQ}{dx}\right) dx + \left(\frac{dQ}{dy}\right) dy + \left(\frac{dQ}{dz}\right) dz\right) = V dQ = 0$. Eseguite le stesse operazioni molt.e le (1) (2) (3) per dx, dy, dz, averemo la

(59.) $\frac{dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z}{dt^2} = X dx + Y dy + Z dz + F(\theta F^2 X . dx + \theta F^2 Y dy + \theta F^2 Z . dz)$, la quale per la (58) riducesi alla

(60) $\frac{dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z}{dt^2} = X dx + Y dy + Z dz$. Poniamo che questo trinomio sia un diff.e esatto, e sia la

(61). $\int X dx + Y dy + Z dz = f(x, y, z)$ In tal caso integrando la (60) e molt.o tutta l'equaz.e per 2 averemo la

(62) $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = 2f(x, y, z) + C$. Ma $\frac{ds^2}{dt^2} = v^2$, dunque averemo la

(63) $v^2 = 2f(x, y, z) + C$. ove v esprim

la velocità del mobile nel punto (x, y, z). A determinare la C converrà che sia data la velocità V in un punto di cui si conoscano le coordinate e supponiamo che V diventi A quando $x=a$, $y=b$, $z=c$, e per determinare C avremo la

(64) $A^2 = 2f(a, b, c) + C$, e però

(65) $C = A^2 - 2f(a, b, c)$. Fatta la sostituzione nella (63) otteniamo la

(66) $V^2 = 2f(x, y, z) + A^2 - 2f(a, b, c)$, ovvero

(67) $V^2 - A^2 = 2(f(x, y, z) - f(a, b, c))$; la quale ci dice, che la differenza dei quadrati delle velocità in due diversi punti della superficie non dipende che dalla forma di f, e dalle coordinate dei due punti, ed è affatto indipendente dalla (4) $Q = 0$, della superficie sulla quale il mobile è costretto a muoversi. Il che è conforme a quanto si è veduto al §. 473 nel moto di un punto materiale libero, e al §. 505 nel moto di un punto materiale soggetto a rimanere sopra una data curva. —

Questa verità adunque ha luogo sia libero il mobile, o sia obbligato a rimanere sopra una curva, o sopra una superficie curva, purchè

$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ sia diff.e esatto. Si osservi inoltre, che la funzione f non dipende che dalle forze continue applicate al mobile, ciò sono le componenti X, Y, Z.

Se il mobile non sia sollecitato da alcuna forza continua si avrà $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ e la (67) si ridurrà alla $V^2 - A^2 = 0$. la quale ci mostra essere la velocità costante come esser debbe poichè è animato da una forza istan.

Ad un punto materiale forzato a rimanere su di una curva o superficie succede ciò che succede quando è perciò libero nello spazio.

Se la curva o la superficie sulla quale è costretto a muoversi il mobile sia chiusa, si avrà la med.a velocità allorchè il punto materiale torna al med.o punto della superf.e o della linea. Difatti il 2.o membro della (67) diventa $2f(x,y,z) - 2f(x,y,z) = 0$ e però sarà $V^2 = A^2$ cioè la velocità sarà la stessa.

La linea che descrive un mobile costretto a restare su di una data superficie ne è la sua trajettoria. Più avanti applicheremo ad un sistema di punti ciò che si è vid.o per un solo punto.

§. 556. Quando la velocità è conosciuta in funz.e di x, y, z dalle (1) (2) e (3) immediatamente deduconsi le equazioni diff.i della trajettoria. Infatti, ponendo nelle (1) (2) e (3) i valori dei coseni dati dalle (6) (7) (8) si hanno le

(68) $\frac{d^2x}{dt^2} = X + \frac{1}{2}V\left(\frac{dQ}{dx}\right)$,

(69) $\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \frac{1}{2}V\left(\frac{dQ}{dy}\right)$,

(70) $\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \frac{1}{2}V\left(\frac{dQ}{dz}\right)$. Molt.e la (68) per dy e sottraendola dalla (69) moltiplicata p. dx la diff.a dei prodotti sarà

(71) $\frac{dx\,d^2y}{dt^2} - \frac{dy\,d^2x}{dt^2} = Ydx - Xdy + \frac{1}{2}V\left(\left(\frac{dQ}{dy}\right)dx - \left(\frac{dQ}{dx}\right)dy\right)$.

Se dalla (70) molt.e per dx si sottragga la (68) molt.a p. dz, la diff.a dei prodotti sarà

(72) $\frac{dx\,d^2z}{dt^2} - \frac{dz\,d^2x}{dt^2} = Zdx - Xdz + \frac{1}{2}V\left(\left(\frac{dQ}{dz}\right)dx - \left(\frac{dQ}{dx}\right)dz\right)$.

Lezione 117.

Ma si ha

$dx\frac{d^2y}{dt^2} - dy\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2}.d\frac{dy}{dx}$,

$dx\frac{d^2z}{dt^2} - dz\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2}.d\frac{dz}{dx}$,

dove di diff.li di $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ prendere si possono relativi ad una variabile qualunque: ma si ha $v = \frac{ds}{dt}$, e però

$vdx = \frac{ds\,dx}{dt}$, d'onde

$\frac{dx}{dt} = v\frac{dx}{ds}$: dunque le (71) e (72) si muteranno nelle

(73) $v^2\frac{dx^2}{dt^2}.\, d\frac{dy}{dx} = Y dx - X dy + F'V\left(\left(\frac{dQ}{dy}\right)dx - \left(\frac{dQ}{dx}\right)dy\right)$;

(74) $v^2\frac{dx^2}{dt^2}.\, d\frac{dz}{dx} = Z dx - X dz + F'V\left(\left(\frac{dQ}{dz}\right)dx - \left(\frac{dQ}{dx}\right)dz\right)$. In generale riesce più semplice prendere i differenziali di $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ riguardando x variabile indipendente; allora si hanno

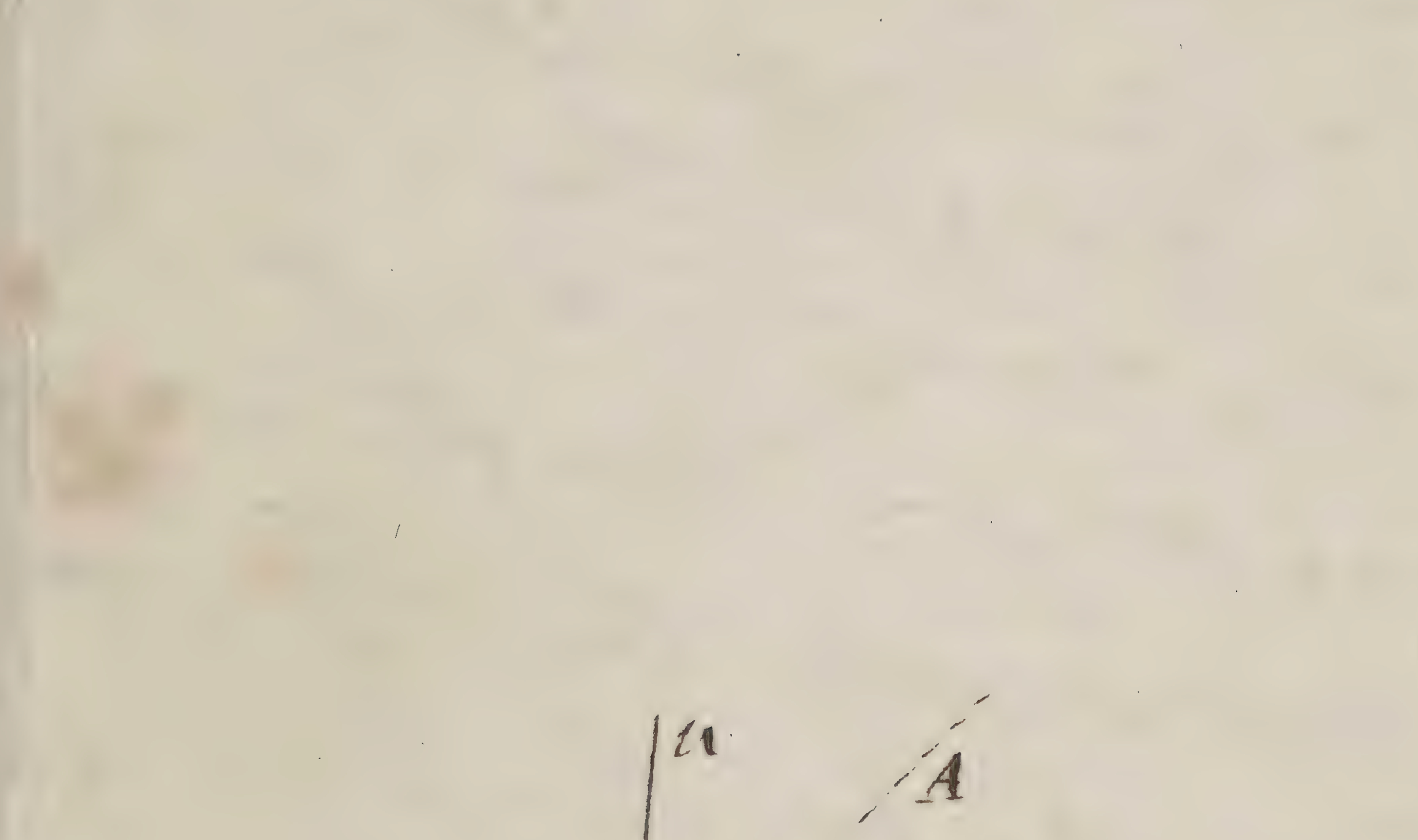
(75) $d\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx}$,

(76) $d\frac{dz}{dx} = \frac{d^2z}{dx}$. Sostituendo nelle (73) e (74) questi valori, e la funzione di (x, y, z) da cui viene rappresentata la v, si avranno due equazioni col mezzo delle quali si potrà eliminare $F'V$: la risultante dall'eliminazione sarà un'equazione di 2.° ordine in (x, y, z) che dovrebbe sussistere colla (4), e queste due equazioni, che sono di due superficie rappresentano la trajettoria colla loro intersecazione.

Se il mobile sia interamente libero, le (1) (2) (3) riduconsi alle (12) (13) (14) del §. 467, il che fatto in tal caso $F'=0$, il che fatto nelle (73) (74) (cioè $F'=0$), si hanno le due equazioni di 2.° ordine che danno il moto nello

spazio di un punto libero colla condizione che v'abbia o no una forza istantanea.

§. 555. Si è davanti al §. 552 osservato che la determinazione di P e di V mediante le (1) (2) e (3) presenta gravi difficoltà; ma si potrà attingere lo scopo in un modo semplice e diretto considerando la pressione che si esercita sulla trajettoria che descrive il mobile sulla superficie. Una sifatta pressione si determina analogamente come si è fatto al §. 407. per il moto d'un punto materiale su di una linea.



(Fig 109)

Sia (Fig 109) BmD la curva piana o a doppia curvatura descritta dal mobile, e sia nn' la normale di lei situata sul piano osculatore di lei nel punto m, dimodochè la porzione mn che cade fuori dalla concavità della curva sia la direzione della forza centrifuga (§. 407) che si è ved. in intensione essere $\frac{v^2}{\gamma}$ essendo γ il raggio d'osculo in m, e la velocità in cosifatto punto. Sia inoltre P la pressione dovuta alle forze continue X, Y, Z che agiscono sul mobile. La risultante delle 2. forze $\frac{v^2}{\gamma}$ e P perpendicolari alla trajettoria è la pressione totale

che la trajettoria stessa soppor-
ta nel punto m. Se la trajet-
toria I.m.D fosse una linea fis-
sa e data, basterebbe che la
pressione totale giacesse sul
piano normale la linea
m.d protratto in affinchè
fosse distrutto dalla resisten.
della curva. Ma in questa sup-
posizione la trajettoria non
è una linea fissa; ma è la
superficie sulla quale è la
linea che deve elidere la pres-
sione; dunque sarà necessa-
rio che la risultante delle
$\frac{V^2}{r}$ e R sia diretta secondo
la normale la superficie
nel punto m. Però m si protrag-
gano tre assi coord.i ortogona-
li mA, mC, mB: il 1.o pres-
so sulla normale in m
la superficie; il 2.o sulla
tangente la linea I.m.D in
m, e il 3.o nel piano del-
la tangente. Ciò è concesso di
fare. L'angolo Cmn compre-
so dall'asse mc, e dalla mn
direzione della forza $\frac{V^2}{r}$ è
retto avvegnacchè una è nor-
male e l'altra è tangente.
Poniamo che gli angoli che
fa la forza $\frac{V^2}{r}$ cogli altri
due assi mA, mB piano ...
cosicchè Amn = α, Bmn = β
Sia R la risultante delle for-
ze X, Y, Z, ed a, b, c gli ango-
li che la direz.e di lei fa con-

gli assi mA, mB, mC. Le componenti di R secondo cotesti assi saranno $R\theta a$, $R\theta b$, $R\theta c$, e le componenti della forza $\frac{v^2}{\gamma}$ secondo gli assi medesimi saranno $\frac{v^2}{\gamma}\theta\alpha$, $\frac{v^2}{\gamma}\theta\beta$, $\frac{v^2}{\gamma}\theta 90^\circ = 0$. La componente $R\theta c$, che sola agisce secondo la tangente la traiettoria nel punto m, produce il moto. Si osservi, che gli assi essendo ortogonali per ipotesi, la mC è perpendicolare ad mB, e però mB è normale in m la curva: la componente adunque $R\theta b$, è diretta secondo questa normale: le componenti $R\theta b$, $\frac{v^2}{\gamma}\theta\beta$ sono amendue dirette secondo una normale la traiettoria e nel piano tangente la superficie poichè mB giace su questo piano. Le componenti $R\theta a$, $\frac{v^2}{\gamma}\theta\alpha$, sono normali la superficie, laonde, se non abbiasi la

(77) $R\theta b + \frac{v^2}{\gamma}\theta\beta = 0$, componendo le ~~somma delle~~ 2 forze $R\theta\beta$, $\frac{v^2}{\gamma}\theta\beta$, $R\theta a + \frac{v^2}{\gamma}\theta\alpha$, si avrebbe una risultante che non sarebbe perpendicolare alla superficie. Ma $R\theta a + \frac{v^2}{\gamma}\theta\alpha$, rappresenta la somma delle forze che sono perpendicolari alla superficie sulla quale è costretto a rimanere il mobile, dunque necessariamente si deve aver la (77). La pressione $R\theta a + \frac{v^2}{\gamma}\theta\alpha$, è

la press.e normale che si eserci-
ta dal mobile contro la super-
ficie secondo la normale int.
o secondo il suo prolungam.
secondo che questa somma è
positiva o negativa. Si osservi
poi che la normale non giace
sul piano osculatore in m
la trajettoria, e l'asse m.B[?]
piano tangente, e però l'an-
golo R.m.n=β, non è che l'an-
golo d'inclinazione del piano
osculatore col piano tangen-
te. Laonde nella (77) cono-
sciuti R, 6, v, γ si può de-
terminare un così fatto an-
golo.

N. 556. Se veruna forza continua
sollecita il mobile, sarà R=0.
Il verificare la (77) conviene che
sia θβ=0; ma perchè ciò si[?]
conviene che β=0, cioè il pia-
no osculatore la trajettoria
è perpendicolare al piano
tangente, cioè al piano della
trajettoria. Ma nel C. d.
si è dimostrato che ciò ap-
partiene alla linea più
breve che nella superfi-
cie data si può descrivere
fra due punti; dunque in
tal caso il mobile passerà
da un punto all'altro ancan-
do per la linea più breve.
Succederebbe lo stesso se al mo-
bile si opponesse l'attrito
contro la superficie ossia in

generale fu il mobile come sollecitato da una forza continua diritta contro la tangente, o secondo essa. Sia T tale forza. L'angolo θ essendo retto si ha Tθ = 0,90° = 0 come se il corpo non fosse sollecitato da veruna forza.

Demez

S. 557. Questa proprietà della trajettoria di un mobile che non è sollecitato che da una forza istantanea non è che un caso particolare di un'altra proprietà che impropriamente dicessi principio della minima azione, e che ha luogo qualunque siano le forze.

Il farsene un'idea supponiamo che un mobile parta dal punto A e passi al punto B pure dato, che la velocità in A sia data in grandezza ed in direzione, e che le forze continue che sollecitano il mobile siano tali che $Xdx + Ydy + Zdz$ sia un diff.le esatto di una funzione a tre variabili. Si potrà determinare la velocità v in funzione delle coord.e x, y, z senza determinare la linea che descrive nel passare da A a B come al S. 475. 503, 505. Molt. la velocità v per ds elemento della trajettoria si avrà vds. e quindi ∫vds pres

da A a B rappresenta il prodot-
to dell'arco della trajettoria
compreso fra questi due ter-
mini A e B moltiplicato per
la velocità v. Quest'arco può
prendersi indeterminatam.te gran-
de. Dunque questo integrale
non è suscettivo di massimo. [illegible]
posto il principio della mi-
nima azione consiste in ciò
che se il mobile si muove
liberamente sceglierà fra
tutte le linee che prostrarre (?)
si possono da A a B quella
per la quale $\int v ds$ è minimo.
Se poi è costretto a muover-
si su di una data superfi-
cie esso sceglierà quella che
è minimo dato (?) da questo in-
tegrale, e che sono descrit-
te nella superficie da A a B.
Basterà dimostrare che la
variazione di $\int v ds$ è ~~minimo~~ nulla
essendo fissi i punti A e B.
La variazione dell'integ.
= variaz.e dell'integrale.
Dunque avremo la

(78) $\delta \int v ds = \int \delta . v ds$. Si ha

(79) $\delta . v ds = \delta v . ds + v \delta . ds$, (consid. [illegible])

(80) $v = \frac{ds}{dt}$

(81.) $ds = v dt$

(82) $\delta v . ds = \delta v . v dt = \frac{dt}{2} \delta . v^2$ Pren-
dendo la variazione della (67)

(67) $v^2 - A^2 = 2(f(x,y,z) - f(a,b,c))$

ponendo mente che A è costan-
te si avrà l'equazione

(83) $\delta . v^2 = 2 . \delta f(x,y,z) = 2\big(f'(x)\delta x + f'(y)\delta y + f'(z)\delta z\big)$; ma per ipotesi abbiamo (61) $f(x,y,z) = \int X dx + \int Y dy + \int Z dz$, dunque avremo

$f'(x) = X$,

$f'(y) = Y$,

$f'(z) = Z$, e di conseguenza avremo la

(84) $\frac{1}{2}\delta . v^2 = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$. La variazione della (4) $Q=0$, è la

(85) $\delta Q = \left(\frac{dQ}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dQ}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dQ}{dz}\right)\delta z$

moltiplicate le (68) (69) e (70) rispett.° per $\delta x, \delta y, \delta z$, la somma dei prodotti è

(68) $\frac{d^2x}{dt^2} = X + FV\left(\frac{dQ}{dx}\right)$

(69) $\frac{d^2y}{dt^2} = Y + F\left(\frac{dQ}{dy}\right)$

(70) $\frac{d^2z}{dt^2} = Z + F\left(\frac{dQ}{dz}\right)$

(86) $\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + FV\left(\left(\frac{dQ}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dQ}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dQ}{dz}\right)\delta z\right)$; e quindi

(87) $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z - FV\delta Q$. Osserviamo che il termine $-FV\delta Q$ non entra in quest'equazione perchè non vi è la superf.e quando il mobile è perfett.te libero; quando poi il mobile è costretto a muoversi su di una superf.e $Q=0$, e però $\delta Q = 0$ quindi in ogni caso sparisce questo termine.

le variaz.)

La (87) dunque si riduce alla

(88) $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z$. Ma per la (84) abbiamo $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \frac{1}{2}\delta . v^2$,

e, $\frac{1}{2}\delta . v^2 = \delta v . \frac{ds}{dt}$, per la (88).
Dunque avremo
$$\frac{\delta v ds}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z$$
ossia
(89) $\delta v . ds = \frac{dt}{2}\delta . v^2 = \frac{d^2x}{dt} . \delta x + \frac{d^2y}{dt}\delta y + \frac{d^2z}{dt} . \delta z$. Ma $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, e però $ds . \delta . ds = dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta . dz$, ovvero avremo la
(90) $$\delta . ds = \frac{dx}{ds} d . \delta x + \frac{dy}{ds} d . \delta y + \frac{dz}{ds} d . \delta z$$
Dunque avremo la
(91) $v \delta . ds = \frac{v dx}{ds} d\delta . x + \frac{v dy}{ds} d\delta . y + \frac{v dz}{ds} d\delta . z$: ma $v = \frac{ds}{dt}$, e però $v ds = \frac{1}{dt}$; Dunque avremo la
(92) $$v \delta ds = \frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{dt} d\delta y + \frac{dz}{dt} d\delta z$$
Ponendo nella (79) i valori di $\delta v . ds$, e $v \delta ds$, dati dalle (89)(92) si ha
$$\delta v ds = \frac{d^2x}{dt}\delta x + \frac{d^2y}{dt}\delta y + \frac{d^2z}{dt}\delta z + \frac{dx}{dt} d . \delta x + \frac{dy}{dt} d . \delta y + \frac{dz}{dt} d . \delta z,$$
e però avremo la
(93) $$\delta . v ds = d\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)$$
e però
(94) $\int \delta . v ds = \delta \int v ds = \frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z$. Ma questo integrale estendere si debbe da A fino a B che sono due punti fissi, dunque saranno $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, e però $\delta \int v ds = 0$, e quindi $\int v ds$ è il minimo relativamente

Lezione 118.

la 119. Ripetiz.e

alla equazione della trajettoria descritta dal mobile

§. 558. Quando il mobile non è sollecitato da alcuna forza continua ma solo da una istantanea la velocità è costante. Allora si ha $\int v ds = v \int ds = vs$: integrale che esteso da A a B. ci mostra che l'arco descritto dal mobile è un minimo. Dall'uniformità del moto si vede che il mobile scorre da un punto all'altro in un tempo più breve che se fosse costretto a passare qualunque altra linea che non fosse la trajettoria sua.

§. 559. Si è veduto al § 4 che la funzione $Xdx + Ydy + Zdz$ è differenziale esatto ogni volta che le forze sono dirette verso centri fissi e le loro intensioni sono funzioni delle distanze di così fatti centri. Dunque dovremo concludere che il principio della minima azione ha luogo allorchè il mobile è sollecitato dalle prefate forze. Quando $Xdx + Ydy + Zdz$ è differenziale esatto la velocità v, in un punto qualunque della trajettoria in funz.e delle coord.e di un punto qualunque si conosce allorchè si conosce la velocità in un punto qualunque di lei §. 473 e §. 453. Quanto se si muova nello spazio che sia costretto a muoversi in una superficie. Poniamo la

(95) $v = f(x, y, z)$, e si avrà

$\int v ds = \int f(x, y, z) \sqrt{y'^2 + z'^2 + 1}\, dx$

Le equazioni della linea che corrisponde al minimo di questa funzione tanto se sia nello spazio che descritta su di una superficie saranno le equazioni della trajettoria del mobile. La forma di così fatte equazioni dipenderà dal sistema di assi adottati. Se essi sono ortogonali si avranno essi dal §. 557. —

Capitolo XLIII.

Della Massa dei Corpi. —

§. 560. Fin qui si è preso in considerazione il moto di un punto materiale in tutti i casi che possono aver luogo. Ciò fovo allorchè il mobile è al tutto libero, quando è costretto a rimanere su di una data linea e su di una data superficie. Da tutti questi tre casi abbiamo ottenuta l'equazione diff.le del moto. Dal calcolo integrale poi si avrà la situaz.e del mobile la direz.e e la velocità.

Ora prenderemo in considerazione il moto di un corpo di finita grandezza ovveramente l'equivalente sistema di punti materiali. Ma siccome s'avranno a considerare fra se delle forze applicate a diversi corpi, porremo davanti come si misura l'effetto di una forza avendo riguardo alla massa del corpo da lei sollecitato.

Quando due forze sono applicate successiv.e al med.o corpo, le loro intensioni sono fra se come le velocità comunicate.

Ma se le forze esercitino su diff.i corpi le loro azioni

la relaz.e che hanno tra loro
dipende allora dalla veloci-
tà di essi prodotte e dalla
massa che mettesi in moto
in quel lasso di tempo in
cui suppone si posseno in-
variabili. Studiamo ciò a deter-

§.561. La massa di un corpo è la
quantità di materia in esso
contenuta sotto un dato
volume. Ne' corpi omogenei
la massa è proporzionale
al volume. Ma i corpi for-
mati da diff.i sostanze com-
prendono in generale sotto
lo stesso volume quantità
di materia più o meno grandi.
Si figurano le parti dei
corpi separate da vuoti che
diconsi pori, i quali aumen-
tati in N.o o in grandezza
fanno sì che sotto lo stesso
volume vi sia contenuta
minor materia. L'iner-
zia dei corpi ci mette davan-
ti la loro massa. Difatti
figuriamo un corpo posto
sopra un piano orizzon-
tale perfett.e liscio di ma-
niera che il corpo non soffra
attrito veruno. Il peso del
corpo resta elise dalla resi-
stenza del piano ed esso
non offre resistenza alcuna
nella dimensione se vogliamo
dargli moto ci vuole una
forza a cagione dell'inerzia

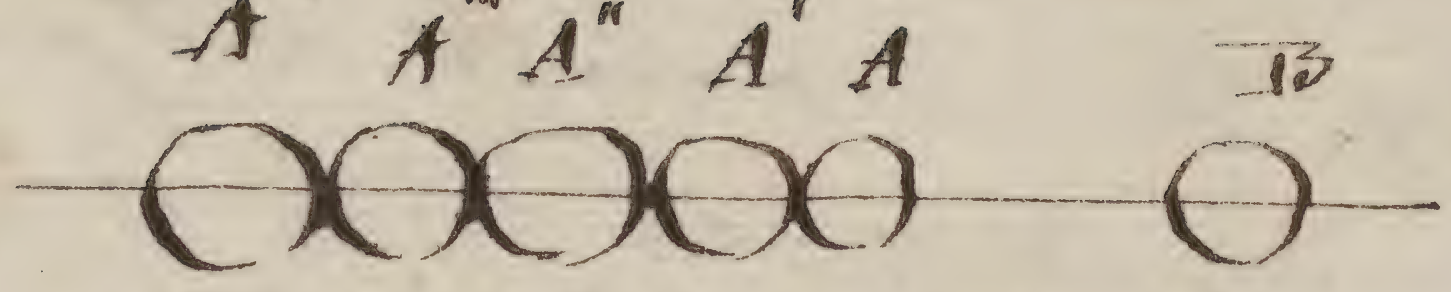
della materia. Se al corpo se ne aggiunga un altro lo sforzo sarà maggiore. In generale lo sforzo sarà tanto più grande quanto più grande sarà la massa di materia da muoversi. Il perchè quando si vuol muovere una serie di corpi sopra un piano orizzontale gli sforzi che si fanno per moverli può dare un'idea della loro massa e di conseguenza due corpi dello stesso volume che esigono diversi sforzi contengono diff. massa. Ma ciò che ne può dare un'idea è l'urto dei corpi al tutto privi di elasticità. ———

§. [illegible]. Si considerino delle sfere formate di materia diff. compressibili, ma prive di elasticità che si muovano sopra una stessa linea, e che ciascun punto (a). Se due di queste sfere eguali in volume e della med.a materia s'incontrino con velocità eguali e in opposta direzione, egli è manifesto che si comprimeranno l'una contro l'altra finchè i loro moti sien distrutti, vale a dire finchè sien ridotte alla quiete. Di leggieri si concepisce che se la velocità dell'una sia magg.e dell'altra, la più piccola velocità sarà distrutta e la più grande re-

(a) delle sfere descriva delle linee parallele e che si muovano con una velocità comune ———

sferà diminuita di una velocità eguale alla minore.

Siano A, B le due sfere (fig 110) e a, b, le rispettive velocità. Poniamo b>a: nel momento in cui A è ridotto alla quiete, B conserverà tuttavia la velocità b−a, e di conseguenza, se tolgasi di mezzo la sfera A appresso l'urto la sfera B seguiterà a muoversi nello stesso senso colla velocità b−a. Poniamo che B incontri un'altra eguale sfera A' animata anch'essa dalla velocità a; se abbiasi ancora che b−a>a: A' sarà ridotto alla quiete e la rimasta velocità di B sarà b−2a. Levato A' dopo l'urto supponiamo che B incontri successivamente una serie di sfere A''A''' ec. eguali ad A in volume e della stessa materia, e ciascuna animata dalla velocità a. Supposto che si levino sempre le sfere A', A'' ec. dopo gli urti, si avrà che dopo n urti la rimasta velocità a B sarà b−na, e sarà B in quiete dopo l'ultimo urto, se b=na. Se le sfere A, A', A'', A''' ec. di numero n formino una serie di sfere l'una aderente all'altra, ciascuna delle quali animata dalla velocità a ovunque ad



(fig 110)

urtare la B che si muova in senso opposto la velocità di B sarà distrutta immediatam.te Difatti, fra le sfere A, A', B'' si possono supporre distanze indeterm.te piccole, ed A perderà la sua velocità contro B riducendo quella di B a b-a così A' riduce quella di B a b-2a perdendo essa la sua contro la A, e così di seguito fino all'ultima sfera della serie che toglierà la rimanente velocità a B riducendola alla quiete.

In generale si vede che se due serie di sfere aderenti l'una vicina all'altra che si vengono ad incontrare, esse si faranno equilibrio quando la velocità sia in ragione reciproca del N.ro delle sfere.

§. 363. Prendiamo ora a considerare l'urto di due sfere B e C che si vengano ad incontrare e che siano di differente materia.

Poniamo che C animato dalla velocità a faccia equilibrio a B animata dalla velocità na. In tale ipotesi l'urto di C produce il med.o effetto che quello di una serie composta di un N.ro n di sfere A, A', A'' &c A(n) le sfere poste aderenti l'una all'altra di egual volume e della stessa materia di B. Per la qual cosa considerarsi debbe la C come contenente il med.o N.ro di punti materiali

che sono contenuti nella serie della sfere A, A', A'' ... A^{n-1}

L'urto de' corpi eguali in volume che si fanno equilibrio con diff.e velocità ci guida a considerare la natura del moto dei corpi eterogenei.

La ragione di queste quantità che costituiscono le masse di corpi si dedurrà dalla ragione della loro velocità di cui è reciproca, e però misurando si potranno queste masse rappresentarle con numeri.

Difatto, si prenda per unità di massa la massa del corpo A alla quale s'imprima la velocità a arbitraria ma conosciuta. A conoscere la massa di un'altro corpo B si cerchi coll'esperienza la velocità che dar devesi a B perchè urtando A vi abbia equilibrio appresso l'urto. Sia b una cotal velocità, ed essendo le velocità in ragion reciproca delle masse sarà

$A : B :: b : a$, e però

$B = \frac{a \cdot A}{b} = \frac{a}{b}$, perchè $A = 1$.

Laonde $\frac{a}{b}$ rappresenterà la massa di B. Questo mezzo è di uso assai difficile e suscettivo di poca esattezza.

Ma il peso di un corpo è proporzionale alla massa, dunque alla relaz.e fra le masse sostituir si può la relaz.e fra i pesi, la quale assai semplice.

cemente si determina facendo
uso della bilancia.

N. 564. Vediamo ora come si confrontino le intensioni delle forze che agiscono sulle diffe masse. Figuriamo un corpo di forma qualunque il quale si muova nello spazio, e di cui i punti passino delle rette parallele con una velocità comunque la quale può essere variabile o costante nella durata del moto; ma potendo che essa costante in ciascun istante per tutti i punti del corpo. Il moto di tutti i punti materiali del corpo si può riferire dall'azione di una forza che agisca nella direzione della velocità. Se figurisi questo corpo diviso in una indefinita serie di parti piccolissime ed eguali in massa, le intensioni delle forze parallele che imprimono il moto a queste forze saranno tra se eguali, e la loro risultante cioè la forza che agisce sulla massa del mobile sarà proporzionale alla massa stessa laonde il moto restando il med.° e la massa diventando doppia, tripla la forza crescerà in questa ragione: In generale l'intensione delle forze debbono crescere come le masse per avere lo stesso effetto: per cui le forze sono come le masse.

L'esperienza ci mostra che i corpi che cadon nel vuoto hanno tutti lo stesso moto. —

Dal che conchiudere si debbe che la gravità esercita la stessa azione su tutte le parti guali in massa di un corpo, e che il peso di ciascun corpo è una forza eguale alle gravità di lui.

§. 565. Dal dettato consegnita che la densità relativa dei corpi esprime sì la ragione dei loro pesi che la ragione delle loro masse sotto il med.o volume. Prendendo adunque per unità di densità la densità conosciuta di una data sostanza ad es. la densità dell'acqua distillata al massimo della sua condensaz.e e per unità di massa, la massa della stessa sostanza contenuta nell'unità di volume, egli è patente che quanto è maggiore la densità del corpo tanto più quantità di materia si conterrà nel corpo vale a dire tanto maggiore sarà la massa sotto lo stesso volume, e però detto M, V, D la massa, volume e densità di un corpo si avrà

(1) $M = VD$.

§. 566. Allorchè si trasporta il corpo da un luogo all'altro, il suo peso varia proporzionalmente alla gravità, e di consequenza rappresentato per P il peso di un corpo e g la forza di gravità, si avrà

(2) $P = Mg$, e quindi la

(3) $P = VDg$. Si osservi, che le quantità P, V, D, g, che entrano nelle (1), (2), e (3) non sono della stessa natura; ma sta(nno) a' te lettere presentarsi dei numeri astratti, vale a dire delle relazioni ad unità arbitrarie della stessa specie a ciascuno di loro. Così V mette davanti il n.° delle unità cubiche che sono contenute nel volume del corpo che si considera, D la ragione numerica della massa alla densità dell'acqua distillata al mass.° grado di condensaz.e e che si prende per unità; g la gravità relativa alla situaz.e del mobile dello spazio occupato del mobile alla gravità scelta per unità: Allora, l'unità di peso è quella dell'unità cubica dell'acqua distillata al mass.° grado di condensaz.e trasportata allo stesso luogo; e finalm.e P esprime il n.° di queste unità cubiche contenute nel corpo. Le (1) (2) (3) danno le relazioni fra P, V, D, g.

§. 567. Partendo dal principio che le forze le quali producono il medesimo movimento, sono in ragione ~~[illegible]~~ delle masse, e dall'altro che le intensioni delle forze sono proporzionali alle velocità da loro comunicate al med.° corpo, in un

tempo in cui considerare si possono come costanti, ci riuscirà agevole esprimere le intensioni delle forze per mezzo di numeri, nel caso generale che le densità e le masse siano differenti.

Supponiamo dapprima che confrontare si vogliano due forze istantanee F, F_1; m, m_1 le masse loro, e v, v_1 le velocità dei mobili stessi. Figuriamo un terzo corpo la cui massa arbitraria sia M alla quale dalla forza Φ sia impressa la velocità v, e dalla forza Φ_1 la velocità v_1. Poichè le F e Φ producono il med. moto uniforme nelle due masse m, M esse saranno tra loro come le masse med. cioè si avrà la proporzione

(a) $F : \Phi :: m : M$; per analoga ragione si ha la

(b) $F_1 : \Phi_1 :: m_1 : M$. Inoltre, le forze Φ e Φ_1 agendo sul med. corpo della massa M sono tra se come le velocità v, v_1; dunque avremo la

(c) $\Phi : \Phi_1 :: v : v_1$. Dalle (a), (b) si ha

$\Phi = \frac{F.M}{m}$, e

$\Phi_1 = \frac{F_1 M}{m_1}$, per cui la (c) si muta nella

$\frac{F.M}{m} : \frac{F_1 M}{m_1} :: v : v_1$, e però

(3) $F : F_1 :: MV : M_1V_1$.

Supponendo adunque che le velocità sieno le stesse in direz.e ed in intensione per tutti i punti del corpo, le forze stanno fra loro in ragion composta delle masse e delle velocità. I prodotti MV, MV_1 diconsi quantità di moto; laonde le forze istantanee hanno per misura le quantità di moto da loro prodotte.

Una forza istantanea dovendosi distribuire su tutta la massa del corpo, egli è patente che le velocità sono in ragion reciproca delle masse: posto v, v' le velocità delle masse m, m', si avrà $v : v' :: m' : m$, e però

(4) $mv = m'v'$. Potendo essere qualunque il 2.° corpo ne conseguita che la stessa forza istantanea comunica la med.a quantità di moto a tutti i corpi. Dalla (4) si ha la

(5) $v' = \frac{mv}{m'}$. Il che mostra che la forza capace d'imprimere una velocità v alla massa m, imprimerà la velocità $\frac{mv}{m'}$ alla massa m'.

Lezione 120.

§. 568. Sia M la massa di un corpo che si muova con un moto qualunque e del quale tutti i punti descrivono delle rette

paralelle. Sia F la forza conti-
nua che produce il moto. Sia
Q un'altra forza che solleci-
ta un'altra massa che si pren-
de per unità. Poichè le forze
sono proporzionali alle mas-
se dei corpi mossi si avrà

$F : Q :: M : 1$, e però

(6) $F = MQ$.

La Q è presentata da
$\frac{dv}{dt}$ §. 129, ovveramente
da $\frac{d^2s}{dt^2}$, ove v ed s sono fun-
zioni del tempo, le quali
rapp. in ciascun istante la
velocità acquistata e lo spa-
zio passato dal mobile.
Il prodotto MQ ridotto in nu-
meri darà la F, cioè la relaz.
di una forza F ad un'altra
presa per unità. Se voglia-
si che l'unità di forza deter-
minata sia ad es. 1 grammo
si esprimerà in grammi M.
Sia P il peso, ed essendo g
la velocità impressa dalla
gravità che è proporziona-
le alla forza g, si avrà

(7) $P = Mg$, essendo g costante. Dalla (7) si ha la

(8) $M = \frac{P}{g}$, per cui la (6) mutasi
nella

(9) $F = \frac{PQ}{g}$, la quantità $\frac{PQ}{g}$ rap-
presenterà in grammi la
forza F. Poniamo ad es. che

in cui istante determinato si trovi $\frac{FQ}{g} = 3$, si dirà che la forza applicata al mobile è capace di equilibrare il peso di 3 grammi. La forza I che agisce sulla massa M l'abbiamo chiamata forza <u>motrice</u> §. 116, e la Q forza continua. La forza motrice si dice pressione quando non produce moto, di guisa che il peso di un corpo in moto è una forza motrice ed è una pressione un corpo posto su di un piano orizzontale

§. 569. Quando il moto è uniformemente accelerato la forza continua è costante, e tale è la forza motrice. Se l'intensione di questa si mantenga costante variando la forza continua comunicherà nel med. lasso di tempo a masse diverse velocità che <u>saranno proporzionali alle masse</u> medesime.

A dare un es. suppongasi che una massa M (fig 111) posi su di un piano orizzontale sul quale non soffra attrito veruno. A questo corpo attacchiamo un' altra massa m che resti sospesa verticalmente col mezzo di una girella. La massa m discenderà in

(Fig 111)

virtù del proprio peso. Ora dovendo la massa m seco trascinare la M, le due masse M, m dee prenderanno il med.^o mo to non formeranno che un sola massa eguale alla lor somma. La velocità comune sarà minore della velocità che avrebbe m. Sia g. la velocità comune a capo dell' unità di tempo, e sia g la velocità di un grave che cade nello stesso tempo. Se la massa m fosse libera, il suo peso le imprimerebbe la velocità, g: alla somma M+m viene impressa la velocità g. dalla stessa forza motrice, e si è veduto che la stessa forza motrice imprime alle masse delle velocità reciprocamente proporzionali alla masse stesse, dunque avremo

$g : g. :: m+M : m$, e però

$$(10)\quad g. = \frac{m}{M+m} g$$

§.576. La resistenza dell'aria che si è presa in considerazione nel moto dei projettili dipende dalla densità dell'aria, dalla velocità del moto dal volume del corpo, e dalla sua densità. Due corpi simili ed eguali in volume come due sfere dello stesso raggio provano la med.^a resistenza

se le loro velocità sieno uguali. L'intensione della forza motrice supponesi ordi. è proporzionale alla superficie al quad. della velocità del mobile ed alla densità del mezzo.

Sia r, il raggio di una sfera mobile, D', la resistenza del mezzo, v la velocità

(11) $f = \mu D' r^2 v^2$ essendo μ un coefficiente numerico che rimarrà il med. per le sfere. Si osservi che r^2, è proporzionale alla superf.e della sfera. Per dedurre da f il valore della forza continua si deve dividere la f per la massa del mobile. Il volume di una sfera è proporzionale al cubo del raggio, e la massa di un corpo è = al volume della densità e però Dr^3 sarà la massa della sfera: e però dalla (11) si ha

(12) $\frac{f}{Dr^3} = \frac{\mu D' v^2}{Dr}$ che rappresenta la forza continua. Al §. 656. l'abbiamo messa $= mv^2$, e però si avrà la parag. colla (12)

(13) $m = \frac{\mu D'}{Dr}$.

Capitolo XLIV.

Di un principio generale di Dinamica

§. 571. Proponiamoci di determinare il moto di un corpo o di un sistema di corpi di quali diversi punti sono sollecitati da forze date in intensità e direz.e Questi punti in virtù del loro mutuo legame modificano l'azione delle forze che a loro sono immediatamente applicate, di guisa che, essi non si muovono in generale colle velocità che loro sono impresse dalle forze, e secondo le direzioni impresse dalle velocità stesse. È difficilissimo per lo più di trovare a priori le velocità e le direzioni dei punti che prender devono nel movimento.

Supponendo che tutte le cond.i che legano tra loro il sistema consistono in ciò che in tutte le posizioni per le quali passar possa il sistema s'abbiano delle funzioni delle coord.e dei punti stessi, le quali sempre si debbano mantenere nulle o costanti, si è ved.o al §. 213. che in virtù di

ciascheduna di esse i corpi so-
no renduti capaci nelle di-
rez.i delle coord.e di resisten-
ze proporzionali alle deri-
vate di qste funzioni relati-
vamente alle coord.e

Dietro questo principio, e
il dettato al S. 667. l'equa-
zioni del moto di un punto
determinato dalle coordi-
nate (x, y, z) saranno

$$(1)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = X - \left(\lambda\left(\frac{du}{dx}\right) + \lambda_1\left(\frac{du_1}{dx}\right) + \&\right)$$

$$(2)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y - \left(\lambda\left(\frac{du}{dy}\right) + \lambda_1\left(\frac{du_1}{dy}\right) + \&\right)$$

$$(3)\quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z - \left(\lambda\left(\frac{du}{dz}\right) + \lambda_1\left(\frac{du_1}{dz}\right) + \&\right)$$

poichè le quantità che si
sottraggono sono le resisten-
ze. Lo stesso si dica per
gli altri punti. Si vede a-
dunque che il moto reale
di ciascun punto è il risul-
tamento del moto che gli
s'imprime dalle forze e del legame
che ha il punto cogli altri
punti a cui è legato dipen-
dentemente dalle altre equa-
zioni. Da ciò ne deriva
il principio di D'Alembert
mediante il quale le quistio-
ni di Dinamica si riduco-
no a semplici quistioni
di Statica.

Se scompongasi ciascuno
de' moti impressi in due,
gli uni siano quelli che real-
mente prendono le parti

del sistema, gli altri componenti di qualunque direz.e sieno dovranno farsi equilibrio fra di loro. Vale a dire, se s'immagini ciascuno di moti impressi al sistema in altri due, uno de' quali componenti sia quello che il sistema prende, l'altro sarà il moto che effettivamente si perde dal sistema stesso. La qualcosa torna lo stesso che dire, che il moto reale di ciascun punto del sistema è il risultamento del moto che ha e dalla resistenza del legame degli altri punti. È quindi patente che il principio del d'Alembert è un conseg.a del detto al

§. 213.

Sia un sistema di punti legati fra loro in un modo qualunque, de' quali, m, m', m'' &c siano le masse: poniamo che ai punti sieno applicate delle forze le quali gli imprimano le velocità v, v', v'' &c. A motivo del mutuo legame dei punti del sistema, le velocità v, v', v'' &c saranno alterate in direzione ed intensione. Siano, u, e su le componenti, u'' e su'' &c le componenti

di v, v', v'' &c. essendo u, u', u'' &c. le velocità incognite in valore e direzione con le quali effettivamente si movono le masse m, m', m'' e β, β', β'' &c. le velocità perdute dalle masse stesse.

Affinchè le velocità delle masse m, m', m'' &c. siano effettivamente u, u', u'' &c. è necessario che le quantità di moto perdute o guadagnate, cioè sono, $m\beta, m'\beta', m''\beta''$ &c. si facciano equilibrio affinchè le velocità delle masse m, m', m'' &c. siano u, u', u'' &c.

§. 572. Questo principio adattasi al caso in cui le velocità v, v', v'' &c. siano velocità finite o acquistate dopo un lasso di tempo finito ed egualmente al caso in cui le v, v', v'' &c. rappresentano delle velocità indeterminate piccole e dovute a forze continue, e finalmente s'adatta al caso che siano in parte finite ed in parte indeterm. piccole.

Prima però di andare a sciogliere le questioni di Dinamica mediante il principio d'Alembert sotto un'altra forma. Le quantità di moto che avrebbero luogo se le masse fossero libere, queste molti-

cate per, m, m', m'' &c. ossia le $mv, m'v', m''v''$ &c. sarebbero le quantità di moto se fossero isolate: quelle che hanno luogo attualmente saranno $mu, m'u', m''u''$ &c. e le quantità di moto perdute saranno $mv - mu = mp$, $m'v' - m'u' = m'p'$, $m''v'' - m''u'' = m''p''$ &c.; ma essendo $mp + m'p' + m''p'' + \ldots$ &c. $= 0$, dunque sarà la

(2) $mv + m'v' + m''v'' + \ldots$ &c. $-$ $(mu + m'u' + m''u'' + \ldots$ &c.$) = 0$

Da questa equazione deriva che nel sistema vi ha equilibrio fra le quantità di moto impresse alle masse, e quelle che hanno luogo ~~[illegible]~~, prese queste in contrario delle prime. —

L'avvantaggio che deriva da questi enunciati si è di non essere necessario di prendere in considerazione le p, p', p'' &c. ma direttamente stabilire le equazioni d'equilibrio fra le velocità v, v', v'' &c. e le velocità incognite u, u', u'' &c. e però si hanno delle equazioni per la determinazione di codeste velocità. —

§. 573. Consideriamo il moto di due punti pesanti attaccati alle estremità di un filo inestensibile e sostenuti da due

piani inclinati come nella (fig. 71) dei quali si sono già determinate le equazioni d'equilibrio.

Sia h l'altezza comune dei due piani; l, l' le loro lunghezze rispettive; m, m' le masse dei due corpi, e g la gravità. La forza continua che agisce sopra la massa m sarà la componente della gravità secondo il piano. Ma $\frac{h}{l}$, è il coseno dell'angolo che la lunghezza del piano fa con l'altezza, dunque $\frac{gh}{l}$ è la componente secondo la lunghezza l. Della stessa guisa la componente di g secondo la lunghezza l' è $\frac{gh}{l'}$; dunque $\frac{gh}{l}$, e $\frac{gh}{l'}$ sono le forze continue che agiscono sulle masse m, m'.

Sia t il tempo passato dall'origine del moto, v, v' le velocità effettive alla fine di siffatto tempo, che saranno positive o negative secondo che i corpi ascendono o discendono. Se t diventi $t+dt$, le velocità diverranno $v+dv$, $v'+dv'$; e di conseguenza gli aumenti delle velocità nel tempuscolo dt saranno dv, e dv'. Ma durante il tempuscolo dt, le [illegible] con-

ponenti $\frac{gh}{l}$, $\frac{gh}{l'}$ imprimerebbero ai ~~vari~~ corpi supposti liberi le velocità $\frac{gh}{l}dt$, $\frac{gh}{l'}dt$, avvegnacchè in un tempuscolo indefinitamente piccolo le forze si possono considerare costanti.

Dunque, nel tempuscolo dt, la velocità che perde la massa M sarà $\frac{gh}{l}dt - dv$; e così per M', $\frac{gh}{l'}dt - dv'$ esprime la velocità perduta dalla massa M'.

Le quantità di moto corrispondenti a queste velocità perdute si debbono fare equilibrio per il principio d'Alembert: ma esse sono in senso opposto all'estremità di un filo inestensibile, dunque per l'equilibrio dovranno essere eguali; e si avrà

(5) $M\left(\frac{gh}{l}dt - dv\right) = M'\left(\frac{gh}{l'}dt - dv'\right)$:

ma v e v' sono di segno contrario, dunque esser debbe la

(6) $-v = v'$, e però

(7) $dv' = -dv$, che sostituita nella (5) si ha la

(8) $dv = \frac{(Ml' - M'l)h}{(M+M')l.l'} g\,dt$, ed integrando si avrà

(9) $v = \frac{(Ml' - M'l)h}{(M+M')ll'} gt + a$, essendo a la costante arbitraria che

Lezione 121.

rappresenta la velocità iniziale del mobile

Sia x la distanza variabile della massa M, e si avrà

(10) $v = \frac{dx}{dt}$, che posto nella (9) e moltiplicato per dt, si ha la

(11) $dx = \frac{(ml' - m'l)h}{(m+m')ll'} gt\,dt + a\,dt$, il di cui integrale è

(12) $x = \frac{(ml' - m'l)h}{(m+m')ll'} \frac{gt^2}{2} + at + b$, essendo b una nuova costante arbitraria e che è uguale ad x al principio del moto, cioè quando $t=0$. Paragonata la (12) con la (85) del §. 138. osservando che nel presente caso $x=s$, $\varphi=g$, e che nell'equazione citata $s=0$, quando $t=0$, si vedrà che il moto della massa M è analogo al moto di un punto pesante nel vuoto supposto la gravità effettiva di $(ml' - m'l)h : (m+m')ll'$; il moto di M' sarà lo stesso di quello di M ma in direzione contraria. Allorchè $a=0$, e nello stesso tempo si abbia la

(13) $ml' = m'l$, dalla (9) si ha $v=0$; il che mostra essere nulle le velocità dei due mobili nelle fatte ipotesi, e quindi ha luogo l'equilibrio. Dalla (13) si ha

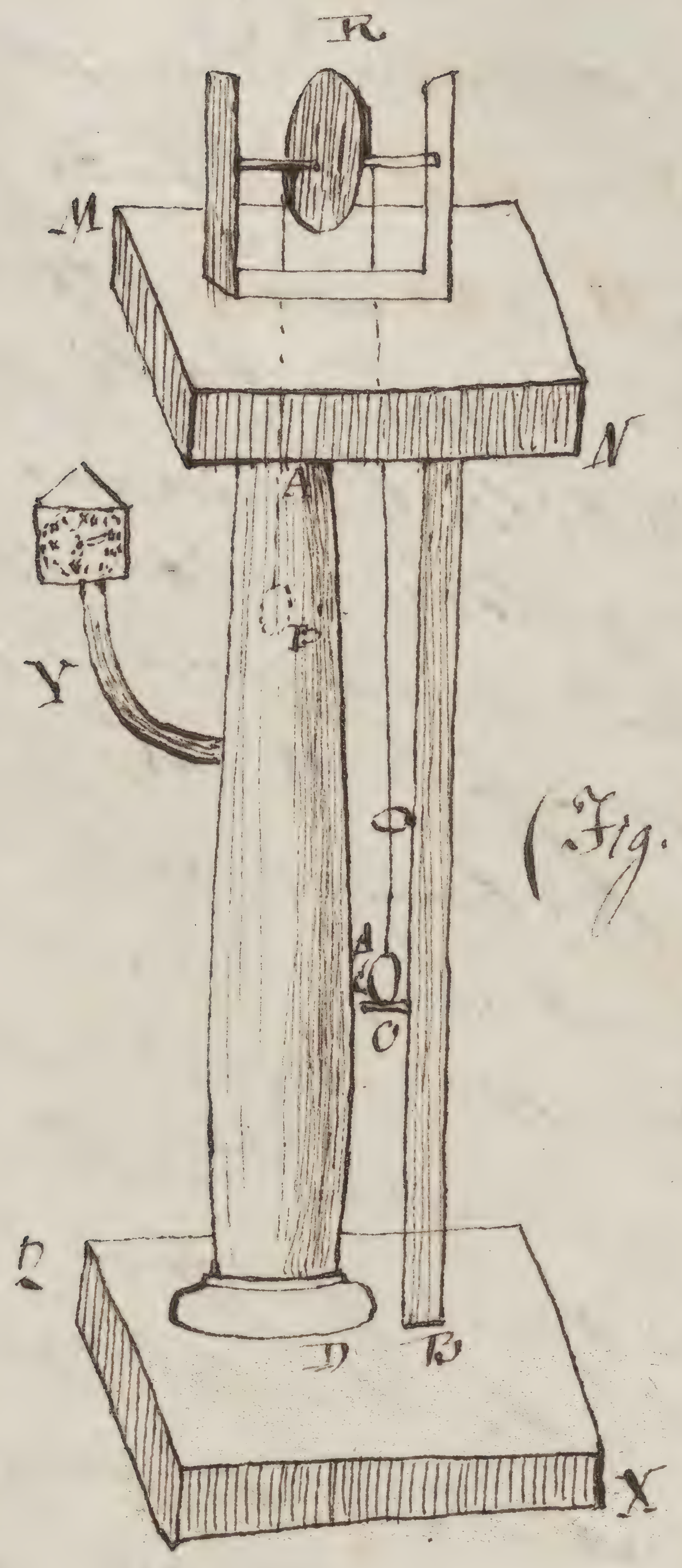
$m : m' :: l : l'$, e però le masse e quindi i pesi dei due corpi stanno fra se come le lunghezze dei piani inclinati su cui si movono; il che ricava

conforme al dettato al §. 326.
Se si volessero determinare le equazioni del moto di una massa M che discenda su di un piano inclinato della lunghezza l, prescindendo da qualunque resistenza, porre si dovrebbe $l' = h$, $M' = 0$, $a = 0$ poichè si suppone nulla la velocità iniziale, e dalla (9) si avrebbe $v = \frac{hg}{l} t$, $x = \frac{hgt^2}{2l} + b$, quando $t = 0$, si suppose $x = 0$, si avrà $b = 0$, e però $x = \frac{hgt^2}{2l}$ equazioni trovate al §. 226.
Nelle fatte ipotesi la (5) si riduce a

$\frac{gh}{l} dt - dv = 0.$

§. 57. Le trovate equazioni contengono la teorica della Macchina d'Atwood della quale si fa uso in fisica ad determinare le leggi dei corpi gravi.

Essa consiste (fig. 112) in un'asta AB, una faccia della quale è divisa in parti eguali; ad una girella è accavalciato un filo flessibile ed inestensibile alle cui estremità sono attaccati due pesi non soffrendo attrito il filo sulla scanalatura della girella. Si mettono in moto i due pesi aumentandone uno di essi. Alla colonna che unisce il piano MN col soggetto XZ è attaccato un pendolo a secondi che serve



(Fig. 112)

a conoscere i tempi impiegati a trascorrere da uno dei corpi gli spazj eguali dell'asta graduata. Con un semplicissimo mezzo si rende sensibile la velocità del mobile che discende. All'uopo si attacca un'anello O aggiungendo al peso del mobile una spranghetta più lunga del diametro di lui, per cui il mobile giunto all'anello la spranghetta si ferma, ed i due mobili rimangono dello stesso peso, e così cessa la forza continua. Fermando l'anello a diversi punti dell'asta graduata si troverà che la velocità è proporzionale alla radice quadra delle passate altezze. Il moto dei due corpi è un caso particolare del moto di due corpi considerati su due piani inclinati. (a)

$$v = \frac{m-m'}{m+m'} gt, \qquad (14)$$

$$x = \frac{m-m'}{m+m'} \frac{gt^2}{2} + b, \qquad (15)$$

col mezzo delle quali confrontare si può la teorica all'esperienza. Si vede che il moto sarà tanto più lento quanto più $m-m'$ sarà piccolo rispetto ad $m+m'$. Allentando così il moto dei due mobili in- za attivarne le leggi si rende più agevole il determinare la legge degli spazj passati; inoltre diminuisce la resistenza dell'aria per cui si può avere gli stessi risultamenti del vuoto.

§. 275. Se si trattasse di una catena pesante posta sopra i due piani inclinati, il princi-

(a) per ridurlo a questo caso basta supporre i due piani verticali, cioè porre $l = l' = h$, ed $a = 0$, che è la velocità iniziale; per cui sostit. nelle trovate equazioni si riducono alle (14) e (15)

pio d'Alembert ci condurrebbe alla (5) osservando che i corpi M, M' sono le due porzioni di catena che sono sopra i due piani: adunque tali pesi sono variabili. Poniamo il caso più semplice, cioè che la catena sia omogenea. In tal caso le masse M, M' sono tra se come le lunghezze dei due pezzi di catena. Sia c la lunghezza dell'intera catena; x la lunghezza della porzione di catena posta sul piano di cui l è la lunghezza, e sarà $c-x$ la lunghezza dell'altra parte, e quindi $M=x$, $M'=c-x$, e $M+M'=c$, per cui la (5) diventa la

(16) $dv=\frac{(xl'-cl+lx)ghdt}{cll'}$; la velocità comune in cui s'intende qualunque a tutti i punti della catena che sta sul piano di lunghezza l, è v, e di conseguenza x, è la distanza variabile del punto più basso di catena dal punto comune dei due piani, e però la velocità di tal punto sarà

(17) v, $v=\frac{dx}{dt}$ laonde

(18) $dv=\frac{d^2x}{dt^2}$; ponendo per semplicità

(19) $\frac{gh(l+l')}{cll'}=p^2$;

(20) $\frac{gh}{l'}=q$; la (16) si muta nella

(21) $\frac{d^2x}{dt^2}-p^2x+q=0$. Equaz. lineare

re a coeff.i costanti, la cui primitiva completa è

(22) $x=\frac{q}{p^2}+ae^{pt}+be^{-pt}$, ove a e b sono le costanti arbitrarie che rendono la primitiva completa.

Dalla (22) differenziando rispetto a t, avremo

(23) $\frac{dx}{dt}=v=ape^{pt}-pbe^{-pt}=p.(ae^{pt}-be^{-pt})$. Se data sia x in un'istante qualunque e la velocità v, le (22) e (23) serviranno a determinare le due costanti a, b.

Affinchè la catena sia in equilibrio su q.ti due piani è necessario che v=0, indipendente dal tempo. Dunque la (23) si debbe verificare indipendente dal tempo cioè esser debbe il 2.o membro zero; ma ciò esser non può se non è a=0, b=0, per cui la (22) si riduce a

(24) $x=\frac{q}{p^2}=\frac{cl}{l+l'}$ per le (19) e (20).

Si ha quindi $c-x=c-\frac{cl}{l+l'}=\frac{cl'}{l+l'}$, e però la proporz.e $x:c-x::cl:cl'::l:l'$. Il che mostra che le due porzioni di catena esistenti sui due piani hanno tra se la stessa ragione che le lunghezze dei piani sulle quali sono locate. Consegue quindi che la retta condotta per le estremi-

ti della catena riuscirà parallela alla base HB dei due piani inclinati che è orizzontale, vale a dire le estremità della catena sono su di una orizzontale. Per conseguenza se quest'ultima cond.e rimanga adempiuta e che i punti della catena non ricevano velocità avverrà l'equilibrio suddetto. Infatti posta la proporzione $x : c-x :: 1 : l'$, si trova $x = \frac{cl'}{1+l'} = \frac{g}{p^2}$, per cui la (22) si riduce alla

(25) $ae^{pt} + be^{-pt} = 0$, eguagliando allo zero il valore della velocità dato dalla (23) si ha

(26) $ae^{pt} - be^{-pt} = 0$. Le (25) e (26) debbono sussistere nello stesso tempo, e però dev'essere $a = 0$, $b = 0$, e però dovrà essere la catena in equilibrio come si è veduto. —

S. 570. 2.° Esempio. —

Prendiamo ora in considerazione il moto di due masse M, M' che agiscono su di loro mediante un'asse intermedio, essendo la massa M applicata al cilindro, e M' alla ruota. Da un istante qualunque siano v, la velocità di M, v' di M'; le quali velocità essendo in senso contrario saranno positive

o negative secondochè i corpi ascendano o discendono.

Allorchè il tempo diventa $t+dt$, le velocità v, v', diventano $v+dv$, $v'+dv'$, in corrispondenza di M e di M'. Ma nel tempuscolo dt, la gravità produce la velocità gdt, onde la massa M perderà la velocità $gdt-dv$, e la massa M' perderà $gdt-dv'$. (d'alcun) Per l'asse nella ruota è necessario che la ragione di $M(gdt-dv)$: $M'(gdt-dv')$ sia quella del raggio della ruota al raggio del cilindro. Sia R il raggio della ruota ed R' il raggio del cilindro: dovrà dunque essere

$M(gdt-dv):M'(gdt-dv')::R':R$

da cui

(27) $MR(gdt-dv)=M'R'(gdt-dv')$.

Ma le velocità v, v' sono in senso contrario, e per la natura dell'asse della ruota esse sono come le circonferenze cioè come i raggi del cilindro e della ruota. Dunque

$R:-R'::v:v'$, e però la

(28) $Rv'+R'v=0$, la quale differenziata osservando che R, ed R' sono costanti, dà

(29) $Rdv'+R'dv=0$, e quindi la

(30) $dv'=-\frac{R'dv}{R}$, per cui la (27) diventa la

(31) $MR(gdt-dv)=M'R'\left(\frac{gdt+R'dv}{R}\right)$

che da la

(32) $dv = \frac{(MR - M'R')R}{MR^2 + M'R'^2} g\,dt$. Troverebbesi
della stessa guisa la

(33) $dv' = \frac{(M'R' - MR)R'}{MR^2 + M'R'^2} g\,dt$. Integrando la (32) e ponendoci di poi $v = \frac{dx}{dt}$ se s'integri di nuovo si avrà un'equaz. che unita all'integrale della (32) ci mostrerà come davanti che il moto di M è analogo a quello di un grave che cada liberamente nel vuoto cioè uniformemente accelerato da cui non differisce che nella forza continua che lo sollecita. Il moto di M' è della stessa natura. In generale, se vari ruote fossero infisse ad cilindro di cui raggio fosse R, e R', R'', R''' &c i raggi delle ruote ed M', M'', M''' &c le masse ad esse applicate ed M quella applicata al cilindro, a determinare il moto di M si avrà

(34) $dv = \frac{(MR - M'R' - M''R'' - \&c)R}{MR^2 + M'R'^2 + M''R''^2 + \&c} g\,dt$

Posto che le M', M'', M''' &c tendano tutte a far ruotare l'asse nella ruota in senso contrario a quello della massa M. Se alcune masse agissero come M si dovrebbe cambiar segni ai corrispondenti termini.

Le velocità v', v'', v''' &c delle masse M', M'', M''' &c si dedurranno dalle

(35) $R'v + Rv' = 0$

(36) $R''v + Rv'' = 0$

– – – – – – –

§. 577. Pel principio di d'Alembert le quantità di moto guadagnate o perdute dai diffi. corpi fare si debbono equilibrio. –

Ma a fissare per ciascuna quistione le equazioni d'equilibrio fra le prefate forze basta il principio delle velocità virtuali; dunque il principio di d'Alembert unito a quello delle velocità virtuali bastano a sciogliere tutti i problemi di Dinamica.

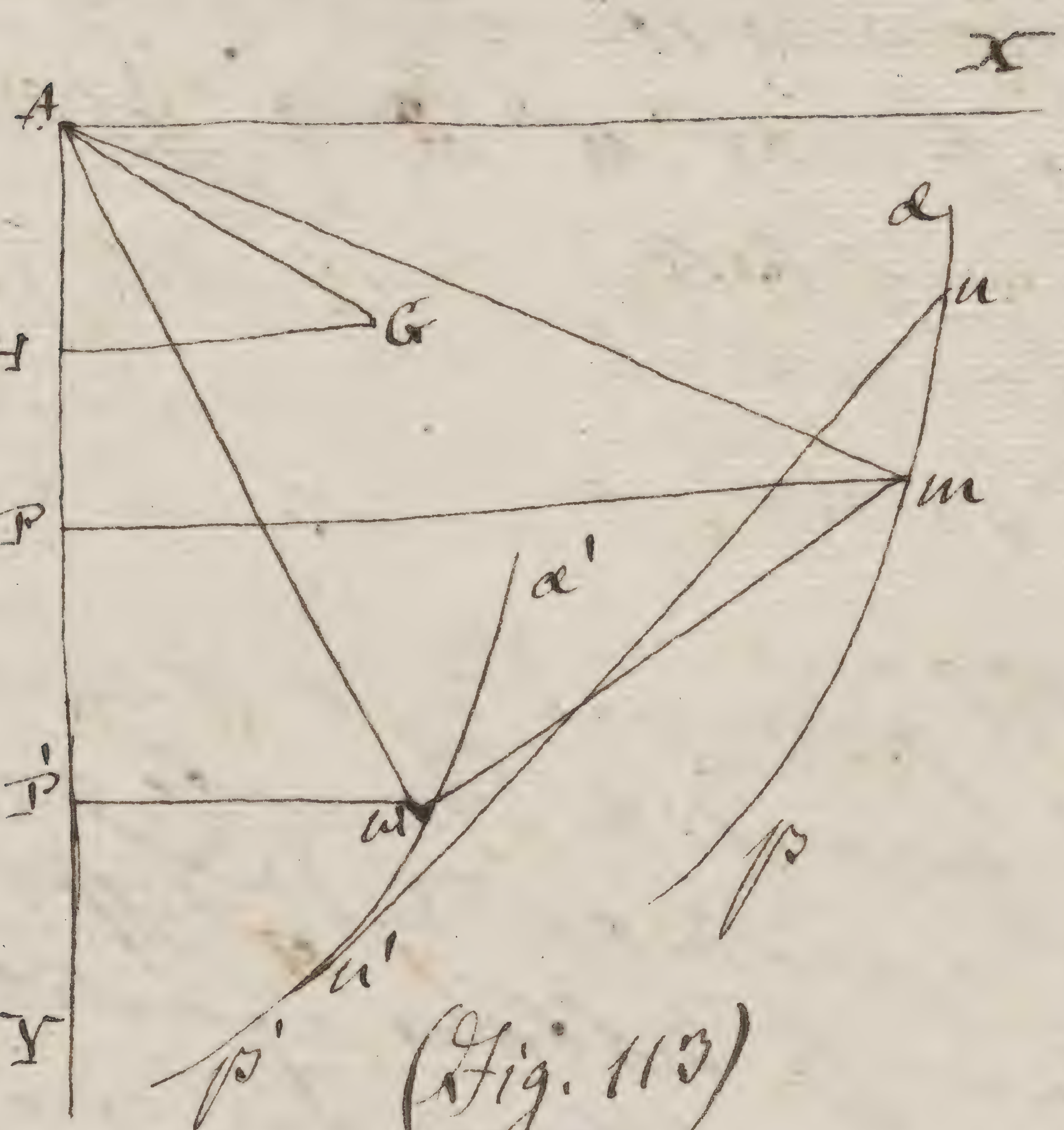
§. 578. Vediamo un'applicazione nella quale entrano le velocità virtuali.

3.° Esempio.

Determiniamo il moto di più corpi attaccati agli estremi di un filo inestensibile e costretti a muoversi sopra curve date.

Poniamo che due soli siano i mobili, e le linee sulle quali sono costretti a muoversi siano sullo stesso piano.

Il filo che unisce i due mobili rimane sempre teso e della med.a lunghezza per tutto il moto fig. 110.



(Fig. 113)

Siano (x, y), (x_1, y_1) i punti delle due linee $\alpha'\beta'$, $\alpha\beta$ ove si trovano i due mobili M, M_1 al fine di un tempo qualunque t. Per un punto qualunque A preso sul piano delle due linee si conducano i due assi AX, AY. Il valore di $\underline{a}$ distanza comune dei due punti in qualunque punto del moto è dato dalla

(37) $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=a^2$. Siano X, Y le somme delle componenti secondo gli assi coordinati AX, AY di ciascuna forza continua che sollecitano M. Le stesse rappresentanze abbiamo X_1, Y_1 per M_1. Al capo del tempo t, le velocità dei due mobili lungo i due assi sono

$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, a capo del tempo $t+dt$ diventano

$\frac{dx}{dt} + d\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt} + d\frac{dy}{dt}$

onde gli aumenti di velocità nel tempuscolo dt sono

$d\frac{dx}{dt}$, $d\frac{dy}{dt}$: ma nel tempuscolo dt si possono supporre X ed Y costanti. Dunque se M fosse al tutto libero le X ed Y imprimerebbero le velocità Xdt ed Ydt, quindi le velocità perdute nel tempuscolo dt sono

$Xdt - d\frac{dx}{dt}$, $Ydt - d\frac{dy}{dt}$, e per M_1

$X_1dt - d\frac{dx_1}{dt}$, $Y_1dt - d\frac{dy_1}{dt}$: per la qual

vi dovrà esser equilibrio fra le quantità: cosa per il principio d'Alembert ~~potenziali~~ ~~forze~~ $\left(Xdt - d\frac{dx}{dt}\right)M$, $\left(Ydt - d\frac{dy}{dt}\right)M$,

$\left(X_1dt - d\frac{dx_1}{dt}\right)M_1$, $\left(Y_1dt - d\frac{dy_1}{dt}\right)M_1$. —

Imprimendo un moto indeterminatamente piccolo ai due mobili di maniera che i due mobili passino dai punti M, M' in altri due posti sullo stesso piano, e delli, che detti N, N_1 sieno indeterminatamente vicini ai due M, M', si dovranno far variare x ed y, x_1 ed y_1 senza che le variazioni abbiano alcuna relazione fra loro ~~[illegible]~~. Poniamo che la

(38) $\varphi(x, y) = 0$,

(39) $\varphi_1(x_1, y_1) = 0$, siano le equazioni delle due linee sulle quali rispettivamente i due mobili trovare si debbono, è sarà necessario che le variazioni abbiano d'altronde delle dipendenze tali che i nuovi punti sieno sulle linee delle (38) e (39). Dunque le (38) e (39) debbono sussistere variate, cioè le loro variazioni sono

(40) $\varphi'(x)\,\delta x + \varphi'(y)\,\delta y = 0$,

(41) $\varphi'_1(x_1)\,\delta x_1 + \varphi'_1(y_1)\,\delta y_1 = 0$

Lezione 122.

Inoltre la (37) dovendo sussistere qualunque movimento farà d'uopo che sussista pure la sua variazione, cioè la

(42) $(x - x_1)(\delta x - \delta x_1) + (y - y_1)(\delta y - \delta y_1) = 0$

Si osservi, che se dai punti m, n, y si conducano delle perpendicolari sopra gli assi AX, AY, le porzioni degli assi coordinati compresi fra le prefate perpendicolari saranno le velocità virtuali projettate nelle direzioni delle forze X, Y, X_1, Y_1, le quali projezioni sono $\delta x, \delta y, \delta x_1, \delta y_1$: pel principio di D'Alembert, per l'equilibrio delle perdute forze motrici debbe aver luogo la

$$(43)\quad M\left(X dt - d\frac{dx}{dt}\right)\delta x + M\left(Y dt - d\frac{dy}{dt}\right)\delta y + M_1\left(X_1 dt - d\frac{dx_1}{dt}\right)\delta x_1 + M_1\left(Y_1 dt - d\frac{dy_1}{dt}\right)\delta y_1 = 0.$$

Fra le variazioni $\delta x, \delta x_1, \delta y_1, \delta y$ sussistono tre relazioni che sono date dalle (40)(41)(42) e però non sono al tutto arbitrarie fra loro. Per mezzo di queste relazioni, tre di esse si possono determinare in funzione di x, y, x. E i posti sostituiti valori nella (43) tutti i termini saranno moltiplicati per la variazione rimasta, onde potremo dividere l'equazione per essa e si otterrà un'equazione derivata di 2.° ordine che deve sussistere colle (37) (38), (39) dunque integrando colle (37) (38) e (39) basterà a determinare x, y, x_1, y_1 in funzione di t.

§. 579. Se un solo di mobili m fosse costretto a rimanere per tutto il suo moto sopra una linea allora sussisterebbero solo le (20), (22), per mezzo delle quali due variazioni si possono determinare in funzione delle altre due: posti questi valori nella (23) essa non verrà ridotta che a non contenere che due variazioni, che rimaner debbono indipendenti fra di loro. Dunque a verificare la (23) bisognerà eguagliare allo zero ciascun coeff.^{e} delle rimase variazioni. Avremo dunque due equazioni che unite alle (37) e (38) servono a determinare in funzione di t. x, y, x, y.

§. 580. Della stessa guisa dimostrasi che se i due mobili sono solamente attaccati l'uno all'altro per mezzo di un filo inestensibile senza esser costretti a rimanere sulle due linee, non avremo più che la (22) per mezzo della quale si può togliere dalla (23) una variazione solo, e la (23) dopo conterrà 3. variazioni che saranno indipendenti e però daran luogo a tre equazioni che unite alla (37) serviranno a determinare x, y, x, y in funz. di t.

§. 581. Se i due mobili M, M', fossero costretti a rimanere su due linee, e nemmeno fossero attaccati ad un filo, cioè fossero liberi la (43) conterrà quattro variazioni le quali rimarranno indipendenti dopo aver tolte tutte le condizioni, e però essa darà quattro equazioni col cui mezzo si determinano x, y, x_1, y_1 in funzione di t. — Osservando la (43) si scorge che da essa si hanno le equazioni del moto di due punti materiali su di un piano.

§. 582. E' quindi aperto che la (43) presenta la soluzione della prefata quistione, ed è idonea a sciogliere tutti i casi che possono aver luogo.

§. 583. Per fare un'applicazione poniamo che le linee presentate dalle (38), (39) siano due circoli aventi il centro comune nell' origine delle coordinate ortogonali, e dei quali r, r' siano i raggi: in siffatta ipotesi i due circoli verranno presentati dalle

(44) $x^2+y^2=r^2$

(45) $x_1^2+y_1^2=r_1^2$ le variazioni delle quali sono

(46) $x\delta x+y\delta y=0$

(47) $x_1\delta x_1+y_1\delta y_1=0$, d'onde si hanno le

(42) $(x-x_1)(\delta x-\delta x_1)+(y-y_1)(\delta y-\delta y_1)=0$

(43) $M\left(X dt - d\frac{dx}{dt}\right)\delta x + M\left(Y dt - d\frac{dy}{dt}\right)\delta y + M_1\left(X_1 dt - d\frac{dx_1}{dt}\right)\delta x_1 + M_1\left(Y_1 dt - d\frac{dy_1}{dt}\right)\delta y_1 = 0$

(48) $\delta y = -\frac{x\delta x}{y}$,

(49) $\delta y_1 = -\frac{x_1\delta x_1}{y_1}$. Sviluppando la (42) si ha

$x\delta x + y\delta y + y_1\delta x_1 + y_1\delta y_1 - (x\delta x_1 + y_1\delta y + x_1\delta x + y\delta y_1) = 0$; la quale a cagione delle (46) e (47) riducesi alla

(50) $x\delta x_1 + y_1\delta y + x_1\delta x + y\delta y_1 = 0$, nella quale se si pongano i valori di δy, δy_1 dati dalle (48) (49), si ha l'equaz.

$\frac{x_1 y - x y_1}{y}\delta x + \frac{x y - y x_1}{y_1}\delta x_1 = 0$, da cui deducesi la

(51) $\frac{\delta x}{y} = \frac{\delta x_1}{y_1}$. La (43) poi mutasi nella (52)

(52) $\left(My\left(X dt - d\frac{dx}{dt}\right) - Mx\left(Y dt - d\frac{dy}{dt}\right)\right)\frac{\delta x}{y} + \left(M_1 y\left(X dt - d\frac{dx_1}{dt}\right) - M_1 x_1\left(Y_1 dt - d\frac{dy_1}{dt}\right)\right)\frac{\delta x_1}{y_1} = 0$. Ma $\frac{\delta x}{y} = \frac{\delta x_1}{y_1}$, dunque levando il fattor comune la la (52) si muta nella

(53) $My\left(X dt - d\frac{dx}{dt}\right) - Mx\left(Y dt - d\frac{dy}{dt}\right) + M_1 y_1\left(X dt - d\frac{dx_1}{dt}\right) - M_1 x_1\left(Y_1 dt - d\frac{dy_1}{dt}\right) = 0$

Integrata la quale, gli integrali delle (44) (45) (46) (47) daranno di che determinare x, y, x_1, y_1 in funz. di t.

§. 581. Nel presente esempio Am, Am_1 (fig. 113) rimangono sempre costanti, ed mm_1 è pure costante, per la qual cosa egli è lo stesso che se il moto avesse luogo intorno ad un punto fisso.

Perchè A si possa considerar fis-
so è mestieri che sia nulla la
risultante di tutte le forze
X, Y, X_1, Y_1 che passano per A.
Laonde il moto che consideria-
mo esser dee quello di due punti
che agiscono l'uno sull'altro
col mezzo di una leva che
abbia il punto d'appoggio in A.
Le quattro forze X, Y, X_1, Y_1
sono applicate a sì fatta leva
essendo, x, y, x_1, y_1 i rispetti-
vi bracci di leva.

Poniamo $M\left(X dt - d\frac{dx}{dt}\right) = P$,

$M\left(Y dt - d\frac{dy}{dt}\right) = P'$,

$M_1\left(X_1 dt - d\frac{dx_1}{dt}\right) = P''$,

$M_1\left(Y_1 dt - d\frac{dy_1}{dt}\right) = P'''$,

Ed allora la (53) viene surroga-
ta dalla

(54) $Py - P'x + P''y_1 - P'''x_1 = 0$, che
fatto $y = p$, $x = p'$, $y_1 = p''$, $x_1 = p'''$
è appunto l'equazione che
al §. 73 abbiamo trovato che
debbe aver luogo per l'equilibrio
della leva.

§. 585. Se la gravità g sia la sola
forza che sollecita i due mo-
bili M ed M_1, posto che l'asse
delle Y sia verticale, avre-
mo $X = 0$, $X_1 = 0$, $Y = Y_1 = g$;
per cui la (63) mutasi nella

~~$M\left(x d\frac{dy}{dt} - Y d\frac{dx}{dt}\right) + M_1\left(x_1 d\frac{dy_1}{dt} - y_1 d\frac{dy_1}{dt}\right) - M g x dt - M_1 \ldots dt = 0.$~~ Si osservi la (fig. 113)
Sia G il centro di gravità dei

(53) $M y\left(X dt - d\frac{dx}{dt}\right) - M x\left(Y dt - d\frac{dy}{dt}\right) + M' y_1\left(X_1 dt - d\frac{dx_1}{dt}\right) - M' y_1\left(Y_1 dt - d\frac{dy_1}{dt}\right) = 0.$

(55) $M\left(x d\frac{dy}{dt} - y d\frac{dx}{dt}\right) + M'\left(x_1 d\frac{dy_1}{dt} - y_1 d\frac{dx_1}{dt}\right) - M g x dt - M' g x dt = 0.$

due pesi Mg, M_1g e dal punto G si conduca sull'asse delle Y la perpend. GH, e si ponga $GH = {}_1x$; e pel ved. al §. 163. avremo le

(56) $(M+M_1)\,{}_1x = Mx + M_1x_1$. Sia mAG $= \alpha$, m'AG $= \alpha'$, angoli costanti, poichè in ogni punto del moto G si conserva costante relativam. ad Am, Am'. Poniamo GAY $= \omega$. Dai punti m, m' pro-traendo le perpendicolari mP, m'P' sopra AY si avrà Pm $= x$, AP $= y$, P'm' $= x_1$, AP' $= y_1$: l'angolo mAP $= \omega+\alpha$, e l'angolo m'AP' $= \omega-\alpha'$, e però avremo le

(57) $AP = r\theta(\omega+\alpha)$,

(58) $Pm = r\theta(\omega+\alpha)$, onde

(59) $y = r\theta(\omega+\alpha)$,

(60) $x = r\theta(\omega+\alpha)$. Troverebbesi similmente

(61) $y_1 = r'\theta(\omega-\alpha')$,

(62) $x_1 = r'\theta(\omega-\alpha')$. La questione è adunque ridotta a determinare mediante la (56) ω in funz. di t. Dalle (59) e (60) ottiensi

(63) $\frac{dy}{dt} = -r\theta(\omega+\alpha)\frac{d\omega}{dt}$,

(64) $\frac{dx}{dt} = +r\theta(\omega+\alpha)\frac{d\omega}{dt}$, e però

(65) $\frac{x\,dy}{dt} = -r^2\theta^2(\omega+\alpha)\frac{d\omega}{dt}$,

(66) $\frac{y\,dx}{dt} = r^2\theta^2(\omega+\alpha)\frac{d\omega}{dt}$, e quindi

(67) $\frac{x\,dy}{dt} - \frac{y\,dx}{dt} = -\frac{r^2 d\omega}{dt}$. Nel modo stesso troverebbesi le

(68) $\frac{x_1 dy_1}{dt} - \frac{y_1 dx_1}{dt} = -\frac{r_1^2 d\omega}{dt}$. Differenziando le (67) e (68) rispetto a t, ed osservando che r ed r_1 e dt son costanti, si avrà

(69) $x d\frac{dy}{dt} - y d\frac{dx}{dt} = -\frac{r^2 d^2\omega}{dt}$,

(70) $x_1 d\frac{dy_1}{dt} - y_1 d\frac{dx_1}{dt} = -\frac{r_1^2 d^2\omega}{dt}$; pongasi $AG = r_2$, e si avrà la

(71) ${}_1x = {}_2r_1\,\theta\omega$, per cui la (56) mutasi nella

(72) $(M+M_1)\,r_1\theta\omega = Mx + M_1x_1$. Pei trovati valori la (55) riducesi alla

(73) $(Mr^2 + M_1r_1^2)\frac{d^2\omega}{dt} + (M+M_1)\,g\,r_1\theta\omega = 0$.

L'equazione del moto di un pendolo semplice prescindendo dalla resistenza del mezzo dalla resistenza del mezzo è la (34) del §. 529. posto $\mu = 0$, vale a dire è la

(74) $\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{g\theta\delta}{a} = 0$. Posto $\delta = \omega$, e levato il denominatore a si ha la

(75) $\frac{a\,d^2\omega}{dt^2} + g\theta\omega = 0$. Confrontata la (75) colla (73) concludesi, che il moto della retta AG, è lo stesso che quello d'un pendolo semplice, la cui lunghezza è data dalla

(76) $a = \frac{Mr^2 + M_1r_1^2}{(M+M_1)\,r}$. Le due masse M ed M_1 legate fra loro e al punto A in modo invariabile formano un pendolo composto, e quindi l'ottenuto risultamento ci mette davanti

ti la riduzione di un pendolo composto a pendolo semplice.
In seguito si farà vedere la cond.

Fine del 3°. Corso li 4. Luglio 1832.

Capitolo XIV.°

Del moto di un corpo solido intorno ad ~~[illegible]~~ un asse fisso.

Lezione 1.ª

=§.586. Nella Statica si sono trovate le equazioni d'equilibrio di un corpo solido intiero libero o da ostacoli insormontabili ~~[illegible]~~ impedito. Ci sarà facile determinare il moto di lui mediante il principio di d'Alembert o col mezzo delle velocità virtuali.

Daremo principio dalla questione, che ha per oggetto il moto di un corpo solido intorno ad un asse fisso che diremo asse di rotazione; nel qual caso non si ha che una sola equazione d'equilibrio come abbiamo veduto trattandosi delle forze. Surrogheremo a maggiore chiarezza ai corpi solidi dei sistemi di punti legati con rette inflessibili. Qualunque sieno le forze, istantanee o continue che animano i punti, questi si moveranno sulle periferie di circoli i cui piani sono perpendi. all'asse di rotazione; gli archi descritti da q.ti punti saranno si-

ugli cioè converranno la stessa
qtà di gradi.
Consideriamo degli archi indefinitamente piccoli ds, ds', ds'', appartenenti agli archi s, s', s'', che appartengono ai circoli dei raggi r, r', r'' &c, e si avrà

$$\frac{ds}{r} = \delta,$$
$$\frac{ds'}{r'} = \delta,$$
$$\frac{ds''}{r''} = \delta,$$

- - - -
- - - - ove δ è indetermiᵉ piccolo mentre r, r', r'' sono quantità finite. Ma si ha che
$v = \frac{ds}{dt}$, quindi
$ds = v\,dt$, e però sostᵒ a vece di ds, $v\,dt$, si avrà

$$\frac{v\,dt}{r} = \delta$$
$$\frac{v'\,dt}{r'} = \delta$$
$$\frac{v''\,dt}{r''} = \delta$$

- - - -, onde

$$\frac{v\,dt}{r} = \frac{v'\,dt}{r'} = \frac{v''\,dt}{r''} = \text{—— cost}$$

$$\frac{v}{r} = \frac{v'}{r'} = \frac{v''}{r''} = \text{ec} \text{——},$$ dal che si debbe concludere, che dividendo la velocità di ciascun punto per la distanza di esso dall'asse fisso, si ha sempre il medesimo quoziente che dicesi velocità angolare.

La velocità angolare per lo stesso istante sarà la stessa p. ciascun punto del sistema.
La velocità angolare può essere poi o costante o variabile passando da un' istante all'altro.
In generale, la velocità angolare sarà una funzione del tempo dipendente dalle forze applic.e al sistema.
Se i punti sieno sollecitati da sole forze istantanee le velocità anche sarà la stessa da un' istante all'altro, e il moto intorno all'asse sarà uniforme. ——

§. 558. Diamo principio dal caso in cui il mobile non è sollecitato che da forze istantanee, cioè quando il moto è uniforme ——

Siano m, m', m'' — ec. le masse dei punti componenti il sistema,(a) e sia ω la velocità angolare racquistata, e siano r, r', r'' — ec. le distanze invariabili dei punti del sistema dall' asse di rotaz.e
Le velocità delle masse che effettivam.e hanno luogo saranno $r\omega, r'\omega, r''\omega$ — ec. e di conseguenza vi avrà equilibrio fra le ~~velocità~~ quantità di moto $mv, m'v', m''v''$ ec. prese nelle direzioni loro, e le ~~[illegible]~~ forze $rm\omega, r'm'\omega, r''m''\omega$ — ec.

(a) su i quali agiscono delle forze date d' intensità e direzione le quali imprimessero ai punti stessi, se fossero liberi le velocità v, v', v'' — ec.

prese in sensi contrarj alle direzioni loro.

Per formare l'equaz. d'equilibrio dietro il veduto per i punti d'applicazione delle forze mv, $m'v'$, $m''v''$ &c si protraggano dei piani perpendicolari all'asse di rotazione; da poi si componga ciascuna forza in due una diretta nel piano perpend. all'asse di rotazione e l'altra parallela ad esso asse. Poniamo che le direzioni di quelle forze facciano coi piani figurati gli angoli $\alpha, \alpha', \alpha''$ — &c e le componenti delle forze motrici mv, $m'v'$, $m''v''$ &c in essi fatti piani saranno $mvc\alpha$, $m'v'c\alpha'$, $m''v''c\alpha''$ — &c

Si osservi, che le forze motrici mvw, $m'v'w'$, $m''v''w''$ &c sono dirette nei piani perpend. all'asse di rotazione

---

Sia ACB un piano perpend. all'asse di rotazione CD. Trasportiamo sul piano ACB tutte le forze situate nei piani perpendicolari all'asse di rotazione CD conservando le loro direzioni; allora la cond. d'equilibrio consisterà in ciò, che la somma dei momenti delle forze che tendono a far ruotare il sistema intorno a C per un verso eguaglino i momenti tendenti a farlo ruotare nel senso opposto.

In generale, una forza che imprima un moto ad un punto, è nella direzione della

tangente che il circolo descrive. Nel presente caso le forze $mrw, m'r'w$ &c sono tangenti dei circoli aventi il centro in G e i raggi r, r', r'' &c.

I momenti adunque delle forze $mrw, m'r'w$, &c si otterranno moltiplicando ciascuna forza per i raggi rispettivi r, r', r'' &c e però tali momenti saranno $mr^2w, m'r'^2w, m''r''^2w$ &c

Si osservi, che le forze $mrw, m'r'w, m''r''w$ &c tendono a far ruotare il sistema in senso opposto del moto di rotazione che ha effettivamente luogo, e però si dovrà prendere la somma di tutti questi momenti, e quindi avremo $w(mr^2+m'r'^2+m''r''^2+ - - - \&c) =$ $= w\Sigma mr^2$. Rispetto alle forze $m\upsilon\theta\alpha, m'\upsilon'\theta\alpha', m''\upsilon''\theta\alpha''$ &c può succedere che alcune tendano a produrre moto per un senso ed altre per un senso opposto: elleno dunque presenteranno due somme di momenti, e la più grande sarà quella che fa ruotare il sistema; facendo la sottrazione il residuo positivo lo presenteremo per $= I$.

Se tutte le forze $m\upsilon\theta\alpha, m'\upsilon'\theta\alpha'$ $m''\upsilon''\theta\alpha''$ &c tendessero a far

ruotare il sistema nello stesso
senso, e che p, p', p'' &c. presen-
tassero le perpendicolari protrat-
te da a sulle direzioni di queste
forze si avrebbe

(1) $I = mvp\theta\alpha + m'v'p'\theta\alpha' + m''v''p''\theta\alpha'' + \&c. = \Sigma mvp\theta\alpha$

In ogni caso poi la I sarà
composta di due somme si-
mili a questa e l'equaz.
d'equilibrio sarà

(2) $\omega \Sigma m r^2 = I$; se m, r, e v, ped α
saranno date per ciascun pun-
to del sistema, da quest'equa-
zione si avrà ω.

Siccome poi ω è costante, così
il moto sarà uniforme.

§. 588. Poniamo che le velocità v,
v', v'' &c. sieno tutte eguali
fra loro e dirette in piani
perpendicolari all'asse di ro-
tazione; allora $\alpha, \alpha', \alpha''$ &c.
saranno eguali allo zero, dun-
que si avrà $\theta\alpha = \theta\alpha' = \theta\alpha'' = \&c. = 1$
Ma si è precedentemente tro-
vato $\omega = \frac{v}{p}$ (velocità angolare), dunque si avrà

$$\frac{v}{p} m p^2 + \frac{v}{p'} m' p'^2 + \frac{v}{p''} m'' p''^2 + \&c. =$$
$$v(mp + m'p' + m''p'' + \text{--} \&c.) =$$
$v\Sigma mp$, onde avremo la

(3) $I = v\Sigma mp$.

Osserviamo, che essendo le
velocità v, v', v'' &c. fra loro
parallele per ipotesi ed esi-
stenti in piani perpendic. all'
asse di rotazione, le loro

projezioni sul piano AGB riu-
sciranno tutte parallele fra di
loro, e di conseguenza le ascisse
sono contate sulla medesima
ma retta che da G si pro-
trae perpendicolare a tutte
che sono parallele
Ora per l'asse di rotazione GB
si faccia passare un piano
parallelo alle direz.ⁿ delle velocità
parallele e per le projez.ⁱ su ACBD di
che direz.ⁱ si facciano passare dei piani
essi passeranno pei punti m, m'
m'' che sono i punti d'appl.ⁿᵉ
delle forze.

Le p, p', p'', che giacciono sul
piano AGD che è perpend.ᵉ all'
AGD sono pure al piano stesso
perpendicolari e quindi misurano
le distanze protratte dai punti
d'applicaz.ⁿᵉ delle forze dal piano AGD.
Ma tali distanze sono eziandio
misurate dalle perpend.ⁱ che
dai punti m, m', m'' si fanno
cascare sul piano AGD, dunque
que le p, p', p'' misurano ta-
li distanze.

Sia h la perpend.ᵉ che dal cen-
tro di gravità del sistema si
fa cadere sul piano AGD.
posta M la massa del siste-
ma si avrà

$M = m + m' + m'' + \&$ e però
si avrà la (centro di grav.)

(4) $\Sigma mp = Mh$, che sostituita nella
(3) si avrà la

(5.) $\Pi = Mvh$ e però

(6.) $w\Sigma mr^2 = Mvh$ per la (2)

se la velocità v, fosse impressa solo alle masse m, m', m'' &c., ed alle altre non s'imprimesse velocità, detto μ la somma delle masse animate da velocità particolari, ed f la distanza del centro di grav.

(7) $w \Sigma m r^2 = \mu v f$.

§. 589. Il sistema invariabile considerato si cambierà in un corpo continuo quando le masse m, m', &c. diventeranno indeterminatamente piccole essendo grande il loro numero. Allora m, m', m'' &c. saranno elementi del solido e ciascun elemento si potrà presentare per dM; in tal caso si cambierà m in dM, e Σ in $\int$, allora dalla (7) si avrà

(8) $w = \frac{\mu v f}{\int M r^2}$, da questa si

ha la velocità angolare di un corpo solido che ruota intorno ad un asse fisso allorchè s'imprime ad un certo sis. di punti M una velocità v il cui centro di gravità sia distante dall'asse di rotaz. dist. f.

§. 590. Per mettere davanti un es. di cosifatto moto prendiamo in considerazione due solidi uno dei quali sia trattenuto da un asse di rotazione, e l'altro sia interamente libero.

del corpo che è libero μ sia
la massa e v la velocità.
Supponiamo che il corpo libero
venga ad urtare il corpo impe-
dito, e dopo l'urto si attacchi
ad esso in modo che si abbia
una massa sola. In tale
ipotesi si è nel caso della equa-
zione (8). f quivi è la di-
stanza del centro di gravi-
tà del corpo urtante dall'
asse.

§. 591. Supporre si può che il corpo so-
lido impedito dall'asse di ro-
tazione sia urtato da più corpi
affatto liberi e che dopo
l'urto vi restino attaccati:
sieno μ, μ', μ'' &c le masse
loro, e v, v', v'' &c le loro
velocità che possono esser dif-
ferenti ma sui piani per-
pendicolari all'asse di rotaz.
Sieno f, f', f'' &c le distanze
dei centri di gravità delle masse
μ, μ', μ'' &c da piani condotti alla dire-
zioni delle forze paralelli per l'asse, e
si avrà la velocità angola-
re ω, data dalla

(9) $$\omega = \frac{\mu v f + \mu' v' f' + \mu'' v'' f'' \&c}{\int r^2 dm},$$

osservando di estendere l'in-
tegrale $r^2 dm$ alla massa
totale, cioè alla massa del
corpo urtato unito alle
masse dei corpi urtanti.

Se l'urto di una o più delle masse M, M', M'' ecc. essi della ... tendesse a far ruotare in senso contrario a quello che tendono le altre masse, si dovrebbe anteporre al corrispondente ~~segno~~ termine il segno negativo. Quando il numeratore della (9) per il prefato cambiamento di segno sia... sarà eguale a zero non vi sarà moto alcuno di rotaz.ne allora si dovrà concludere che le quantità di moto MV, $M'V'$, $M''V''$ si fanno equilibrio intorno all'asse di rotaz.ne

Lezione 2.a

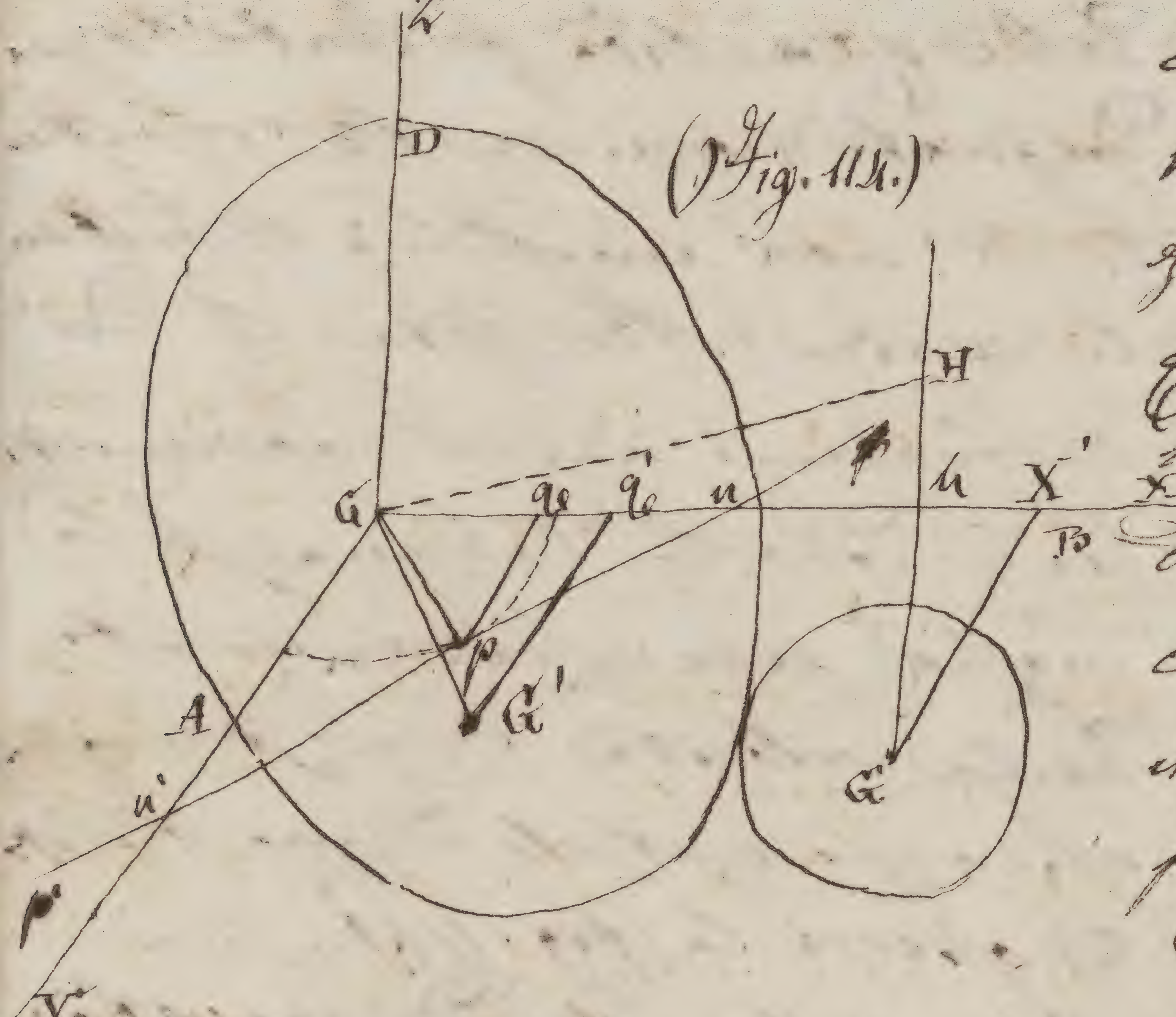
§. 592. Allorchè un corpo è trattenuto da un'asse fisso ed è posto in moto intorno a questo asse da un urto o in qualunque altra maniera, nell'istante del moto l'asse di rotazione sopporta una percossa che è importante il conoscere. Esso deriva dalle forze perdute o guadagnate in forza di ciò. — Queste forze si fanno equilibrio mediante l'asse fisso, dimodocchè esse si riducono ad altre forze che tagliano l'asse di rotazione, o sono parallele a questo asse. Dunque per avere la percossa si do-

ora trovare la risultante delle quantità perdute o guadagnate, oppure le risultanti se non ammettano risultante unica. Per fissar le idee supponiamo che il movimento sia prodotto da una sola massa μ e sia animato dalla velocità v, e si unisca al corpo urtato dopo l'urto. Si osservi la (fig. 114). —

Sia G il centro di gravità della massa μ, e sia GH la direzione ~~che la massa~~ della velocità v che essa ha ~~...~~ e la di un piano perpend. all'asse di rotazione ~~piano ...~~.
Secondo il principio d'Alembert si ha equilibrio fra la quantità di moto dell'intera massa, e la quantità di moto μv. —
Dunque nel presente caso la velocità degli interi elementi far debbe equilibrio a μv la cui direzione è GH situata nel piano ACD che supporremo (x, y). Trattasi adunque di determinare la risultante di tutte queste forze. Sia M la massa dopo l'urto, che è l'unione delle due masse, e indichiamo per dm un elemento di questa massa.

Supponiamo che l'asse CD sia quello delle z e gli altri delle x e delle y ortogonali.(a)
Poniamo al solito che ω

(a) e x, y, z le coord.e di q.to elemento. —



(Fig. 114.)

rappresenti la velocità angolare che supponiamo costante, e sia r la distanza dell'asse di rotazione GZ dall'elemento dm; la quantità di moto di quest'elemento sarà $r\omega dm$; la direzione di questa forza è tangente del circolo che ha per raggio r, e il piano di questa forza è perpend.e all'asse di rotazione GZ. Scomponiamo la $r\omega dm$ in tre rispett. parallele agli assi coord. ortogonali. Il moto di rotazione di ciascun elemento si fa in piani perpendi. all'asse di rotaz.e dunque essa farà 90° coll'asse delle z, dunque la sua componente secondo l'asse z è zero; Per ottenere le componenti rispetto agli assi delle x e delle y, sia p la sua projezione sul piano (x, y) fatto centro in G ove l'asse di rotazione incontra il piano AGB col raggio Gp si descriva un circolo sul piano (x, y): per il punto p projezione di dm si conduca la pup' che lo tocchi in p, ed incontri in u, u' gli assi delle x e y. Se il moto di rotazione ha luogo nel senso di pu, sarà mestiere prendere la forza $r\omega dm$ nel senso di pu' cioè in senso opposto

Nella fatta ipotesi, essendo pu la direzione della forza vwdm, per avere le componenti parallele agli assi delle x ed y, converrà moltiplicare vwdm per θ puX, θ pu'Y e le due componenti avremo la direzione da G verso X e da G verso Y. —

Da p projezione di du, si protragga pq parallela a GY: essendo rettangoli i due triangoli Gpu, Gqp, sarà l'angolo Gpq = Gup = 180° − puX. Dal △ retto Gqp, si ha pq = Gp sen Gpq ma pq = y, Gp = v, dunque y = v θ Gpq; ma Gpq = 180° − puX, y = −v θ puX; onde si avrà la

(10) $\theta puX = -\frac{y}{v}$. Lo stesso triangolo rettangolo Gpq, ci da

Gq = Gp θ Gpq; ma Gq = x, dunque è Gpq = 90° − qpu = 90° − Gup = 90° − pu'Y,

$\theta Gpq = -\theta pu'Y = \theta puY$

e però θ Gpq = θ pu'Y, e quindi

(11.) $\theta pu'Y = \frac{x}{v}$; onde le componenti della forza vwdm parallele agli assi delle x e delle y nelle direzioni da G verso x, e da G verso y, saranno

$-ywdm$, $xwdm$. ————

Scomposte della stessa guisa la quantità ~~di~~ di moto degli altri elementi di M, la risultante di tutte le componenti parallele a questi assi saranno le loro somme; dunque la risultan

te di tutte le forze parallele all'asse delle y, sarà l'integrale di $xwdm$ esteso a tutta la massa del corpo urtante ed urtato, cioè sarà $\int xwdm$, ossia $w\int xdm$ perchè w è costante.

La risultante di tutte le forze parallele all'asse delle x sarà $\int -ywdm = -w\int ydm$.

Poniamo che $x = x_1$, $y = y_1$ siano i valori di x e di y corrispondenti al centro di gravità della massa M. Le masse sono proporzionali ai pesi, dunque pel veduto cent. grav. si avrà

(12) $Mx_1 = \int xdm$, così si avrà

(13) $My_1 = -\int ydm$, onde Mwx_1, $-Mwy_1$ rappresentano le forze risultanti: laonde le forze che si fanno equilibrio sono le Mv, Mx_1w, $-My_1w$.

La distanza delle componenti parallele agli assi delle x e delle y della forza $vwdm$ dal piano (x, y) è z; e quindi i loro momenti relativi a questo piano saranno $-zywdm$, $+xzwdm$; e però la somma dei momenti della forze sono

$-w\int yzdm$, $w\int xzdm$, intendendo che estendere si debbono gli integrali le

Siano z_1, e z_2 le distanze delle forze $-My_1\omega$, $Mx_1\omega$ dal piano (x,y) e si avrà

(14) $My_1 z_1 = -\int yz\,dm$,

(15) $Mx_1 z_2 = \int xz\,dm$, equazioni che servono a determinare z_1, z_2. — Siano y_1, y_2 le distanze delle due forze $-My_1\omega$, $Mx_1\omega$ dal piano (x,z) e si avranno le due equazioni

(16) $My_1 y_1 = -\int y^2\,dm$,

(17) $Mx_1 y_2 = \int xy\,dm$. Se x_1, x_2 presentino le distanze delle forze stesse dal piano (y,z) si avrà

(18) $My_1 x_1 = -\int xy\,dm$

(19) $Mx_1 x_2 = \int x^2\,dm$. —

Immaginati due piani che passino per le estremità di y_1, z_1, paralleli ai piani (x,z) (x,y) rispettiv. la loro intersecazione sarà parallela all'asse delle x, e la loro intersecazione noterà la direzione della forza $-My_1\omega$. Così condotti due piani per le estremità di z_2, x_2, paralleli rispett. ai piani (x,y), (y,z) la loro intersecazione noterà la direzione della forza $Mx_1\omega$, e sarà parallela all'asse delle y. —

§. 593. Due casi presentare si possono: ciò sono

1.º Quando $\int y z dm = 0$, ed $\int x z dm = 0$

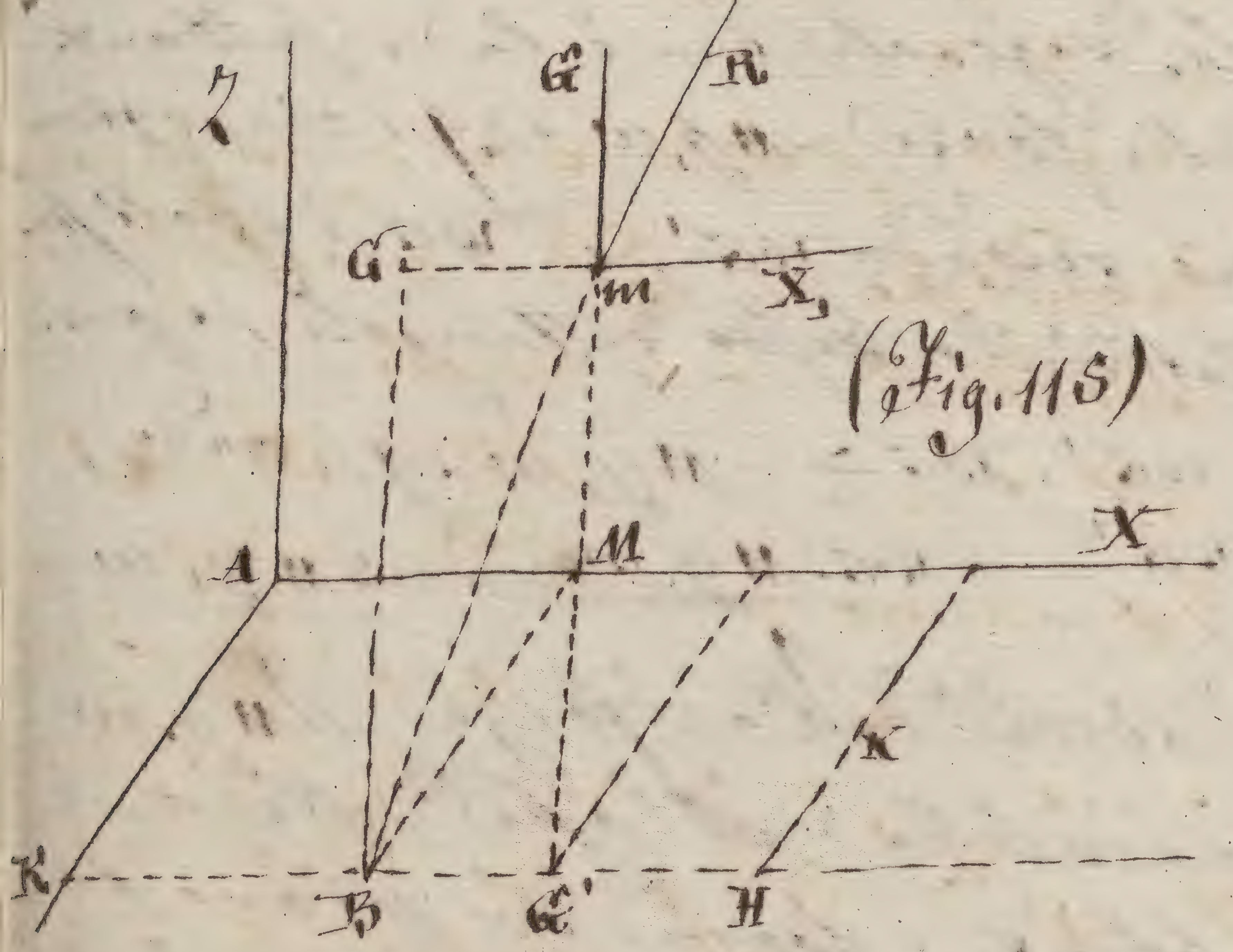
2.º Quando nessuno di questi due integrali sono nulli.

Nel 1.º caso si nelle (13) (14) si faranno zero i due integrali si avrà $z' = z'' = 0$; e però siccome le z', z'' indicano le distanze delle forze dal piano (x, y) così che forze sono nel piano (x, y) sul quale piano trovasi la quantità di moto μv. Essendo in tal caso in equilibrio le 3 forze nel piano (x, y) intorno a C, la loro risultante passar debbe per questo punto, la quale di conseguenza si otterrà trasportando in C parallelamente a se stessa ciascuna delle 3 forze e riducendole a una sola colla regola della composizione delle forze. Questa risultante sarà la percossa che sopporta l'asse nella fatta ipotesi.

§. 594. Nel 2.º caso cioè quando gl' integrali non sono eguali a zero, le forze $-My'\omega$, $Mx'\omega$ cadranno fuori di questo piano, ma però saranno situate su piani a questo paralleli.

Si osservi la (fig. 115).

Sia m un punto della direzione



(Fig. 115)

ncipio d'Alem

mX, della forza $-My,w$ che è la componente parallella all'asse delle x. Se al punto m si applicano due forze g e $-g$ eguali, e parallelle all'asse delle z e di opposte direzioni l'effetto della forza $-My,w$ non verrà alterato. Poniamo che mG sia la direzione della forza g aggiunta e componiamola colla $-My,w$ che agisce secondo $mX_,$ vale a dire in direzione parallella ad AX e figuriamo essere mR la direzione di essa che incontri in B il piano (x,y) che rispetto all'altra figura è l'AGB. Supponiamo applicata la risultante in B: scomponiamola in 2 rispett.e parallelle agli assi delle z e delle x la risultante e le sue componenti saranno g e $-My,w$. La $-My,w$ avrà la direzione KH che è la projezione di $mX_,$. Il punto B adunque d'applicaz. della risultante è un punto di questa projezione. Troviamo ora le sue coordinate. — Sia G' la projezione sul piano (xy) del punto m, e le coord. della projezione G' saranno x ed y, e quindi y ed $x - BG'$ sono le coordinate del punto B. La retta mR è nel piano $GmX_,$, e però i due punti B e G' sono sulla stessa parallela

BK all'asse delle x. Nel rett.^{lo} BG...
la diagonale BM è la risultante
delle forze $-My,w$ e g, che agisco-
no secondo BG', e BG i quali sono
lati dello stesso rettangolo, e però
$BG' : BG = -My,w : g$; onde

(20.) $BG' = -\frac{BG.My,w}{g} = -\frac{2My,w}{g}$.

Invece della forza $-My.w$
parallela all'asse delle x, e
situata sopra un piano paral-
lello a quello delle (x,y) si ha
la stessa forza $-My.w$ sul
piano (x,y) ed applicata al punto
B e dippiù le g e $-g$ parallele
all'asse delle z ed appl.^{te} in m.
Le coord.^{e} di B saranno a-
dunque y, ed $x + \frac{2My,w}{g}$.

Similmente applicando ad
un punto della forza Mx,w
parallela all'asse delle y,
~~delle y~~ le due forze g_1, e
$-g_1$ parallele all'asse delle
z ed opposte si troverà che
il punto d'incontro col piano
(x,y) della risultante delle for.
ze g_1, e $-Mx,w$ ha per coord.^{e}

x ed $y - \frac{2Mx,w}{g_1}$.

e a vece della Mx,w parallela
all'asse delle y e situata in
un piano parallello al piano
(x,z) si ha la stessa forza
Mx,w. ma sul piano (x,y)
applicata in un punto di cui
le coord.^{e} sono x, ed $y - \frac{2Mx,w}{g_1}$.
e le due forze g_1 e $-g_1$

Laonde concludere si debbe che invece delle forze $M y_1 \omega$, $M x_1 \omega$ situate in piani paralleli al (x, y) si hanno le stesse forze su questo piano e le quattro $g_1 - g_1' g_2 - g_2$ perpendicolari al piano stesso.

Componendo le due $g_1 g_2$, $-g_2 - g_1$, si avranno due risultanti uguali e in direzione contraria ma non opposte. Siano R e −R le due risultanti, e le quattro forze, $g, g_1, -g - g_1$ saranno ridotte alla coppia (R − R) che produrrà sull'asse di rotazione una percossa di specie particolare.

Lezione 3.ª

№ 595. Dal detto risulta che nel solo 1.º caso può accadere che l'asse di rotazione non sopporti percossa veruna, per la qual cosa è necessario che la risultante nel piano (x, y) sia nulla, il che non può essere se le loro componenti secondo gli assi delle x e delle y non sieno nulle separatamente, poichè sono ad angolo. Essendo (fig. 114.) GH la direzione di $u_1 M v$ sul piano (x, y) le componenti di essa rispetto agli assi x, y, saranno

$M v \theta g H \hat{x}$, $M v \theta g H \hat{y}$.

Affinchè danque la percossa

sia nulla bisogna che la forza diretta secondo l'asse delle x, sommata con $-My_1\omega$ sia $=0$, cioè

(21) $Mv\theta . GH\hat{X} - My_1\omega = 0$. ——

Similmente, le componenti secondo l'asse delle y dovrà essere $=0$, ossia si avrà

(22) $Mv\theta GH\hat{Y} + Mx_1\omega = 0$: ma abbiamo la

(8) $\omega = \frac{Mvf}{\int r^2 dm}$, dunque avremo

$$Mv\theta . GH\hat{X} - My_1 \frac{Mvf}{\int r^2 dm} = 0,$$

$$Mv\theta . GH\hat{Y} + Mx_1 \frac{Mvf}{\int r^2 dm} = 0;$$

d'onde nascono le

(23) $\theta . GH\hat{X} \int r^2 dm - My_1 f = 0$.

(24) $\theta . GH\hat{Y} \int r^2 dm + Mx_1 f = 0$. Dalle quali si deduce

$$\int r^2 dm = \frac{My_1 f}{\theta . GH\hat{X}} = -\frac{Mx_1 f}{\theta GH\hat{Y}}, \text{ onde}$$

$$\frac{y_1}{\theta . GH\hat{X}} = -\frac{x_1}{\theta . GH\hat{Y}}, \text{ e quindi avremo}$$

(25) $\frac{\theta . GH\hat{Y}}{\theta . GH\hat{X}} \times \frac{y_1}{x_1} + 1 = 0$. ——

Innalzando a quadrato le (23) (24) si ottiene

$$\theta^2 . GH\hat{X} \left(\int r^2 dm\right)^2 = M^2 y_1^2 f^2,$$

$$\theta^2 . GH\hat{Y} \left(\int r^2 dm\right)^2 = M^2 x_1^2 f^2; \text{ sommando, si avrà}$$

$$(\theta^2 GH\hat{X} + \theta^2 GH\hat{Y})\left(\int r^2 dm\right)^2 =$$

$(x_1^2 + y_1^2) M^2 f^2$: ~~ma $\theta^2 GH\hat{X} + \theta^2 GH\hat{Y}$~~

$= \theta^2 GH\hat{X} + \theta^2 GH\hat{X} = 1$, e quindi

(26) $(\int \rho^2 dm)^2 = (x_1^2 + y_1^2) M^2 f^2$.

Sarà dunque mestieri che le (25) e (26) sussistano contemporaneamente affinchè l'asse di rotazione non sopporti veruna percossa. Si unisca il centro G' di gravità della massa M (corpo urt. ed urtato) con l'origine G colla GG', e dappoi si tiri G'q' parallela a GY, e si avrà $G'q' = y_1$, $Gq' = x_1$. Dal △.° rettangolo G'Gq' si ha

$\sigma\, G'GX = \frac{G'q'}{Gq'} = \frac{x_1}{y_1}$.

Dal centro di gravità G del corpo M, si protragga GX' parallela a GY, e il △.° GHX' ci da

$\sigma\, GHX' = \sigma\, GH\hat{X} = \frac{GX'}{HX'} = \frac{\theta.\, GH\hat{X}}{\theta\, GH\hat{X}} = \frac{\theta\, GH\hat{Y}}{\theta\, GH\hat{X}}$.

Concludere adunque si debbe che le tangenti ~~che fanno~~ degli angoli che fanno G'G, GH coll'asse delle x, sono rispett. $\frac{y_1}{x_1}$, e $\frac{\theta GH\hat{Y}}{\theta GH\hat{X}}$. Ma la differenza di questi due angoli è l'angolo che fanno queste due rette, dunque quest'angolo ha per tangente (per la relazione della somma tang.)

$$\frac{\frac{y_1}{x_1} - \frac{\theta.GH\hat{Y}}{\theta.GH\hat{X}}}{\frac{\theta.GH.\hat{Y}}{\theta\, GH.\hat{X}} \times \frac{y_1}{x_1} + 1}$$

Ma per la (25) questo denominatore è zero, dunque una siffatta tangente è infinita. Dunque G'G e GH sono tra se perpendicolari.

Dunque perchè non v'abbia percossa veruna conversione che la direzione GH del corpo urtante prima dell'urto sia perpend.e alla GG' che unisce la massa M coll'origine G'. Se dunque si protragga un piano per l'asse di rotazione G'z e pel centro di gravità G della massa M, la GH che è perpend.e alla G'z sarà perpend. all'intersecaz.e GG' del predetto piano coll'(x, y) e però è perpend. al piano che passa per G'z e per G! Laonde, la direzione della velocità avanti l'urto del corpo urtante μ esser debbe perpend.e ad un piano che passi per l'asse di rotazione e pel centro di gravità della massa M.

Osserviamo che nella (26) la f rappr.a la lunghezza della perpend.e che dal centro di gravità di μ si fa cascare sul piano che passa per l'asse di rotazione parallelamente alla direzione della velocità v. (N. 589) e nel presente caso sarà $f = GH$ perpend.e che si fa cascare sulla direz.e della velocità di μ prima dell'urto —

Poniamo $GG' = \sqrt{y_1^2 + x_1^2} = r_1$, e dalla (26) avremo la

(27) $f = \frac{\int r^2 dm}{M r_1}$, laonde l'asse

di rotazione non sopporterà per-
cossa veruna allorchè la veloci-
tà del corpo urtante prima
dell'urto sarà parallella al pia-
no che passa per l'asse di rota-
zione e per G e taglierà que-
sto piano in un punto di
cui si avrà la distanza da
G col mezzo della (27.)—

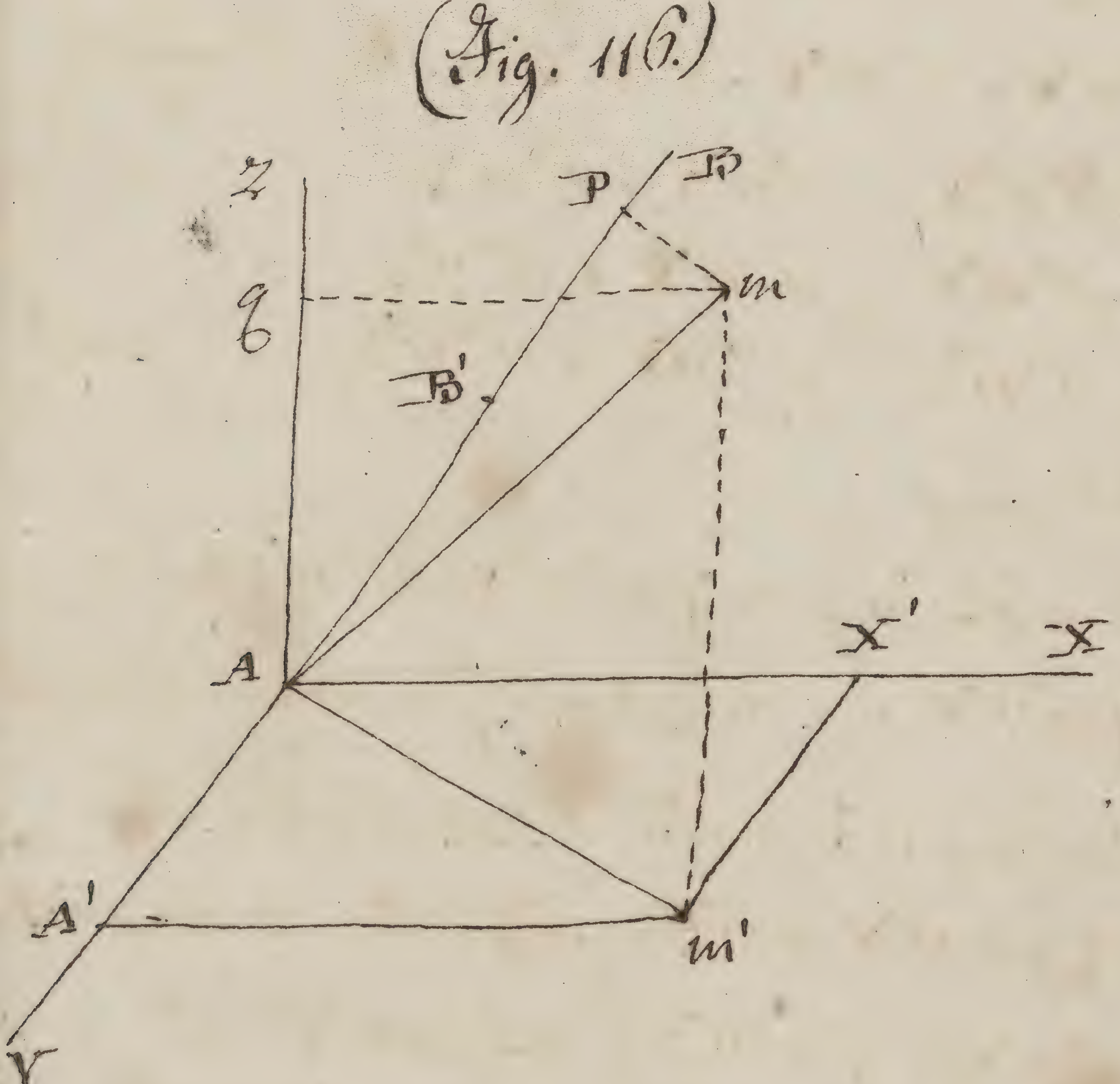
Capitolo XLVI.

Delle proprietà dei momenti d'inerzia e degli assi principali

§.596. L'integrale $\int r^2 dm$, rappresenta la somma degli elementi materiali del mobile di cui si considera il moto intorno ad un'asse rispettivamente moltiplicati pel quadrato della distanza §.589. Al §.587. si è posto
$\Sigma mv^2 = m'v'^2 + m''v''^2 + \&c$, dalla quale si passa all'altra supponendo le masse elementari e cambiando Σ in $\int$. L'espressione $\int r^2 dm$ dicesi momento d'inerzia.

Si osservi la (fig. 116).

(Fig. 116.)



Sia AB l'asse di rotaz.e che si considera, m la massa di punti indeterminat.e piccoli che si considera riferita agli assi ortogonali x, y, z, e siano x, y, z le sue coord.e

Dall'origine A si protragga la Am che diremo s, e supporremo che la rappresenti in intensità e direzione. Da m, si conduca la mP perpend.e all'asse di rotaz.e AB. La D indichi la direzione di essa AB, e si ponga $r = mP$, e dal △ rettangolo APm risulterà la

(1.) $v = s.\theta s\hat{}D$; essendo gli assi coordi. ortogonali, avremo la

(2.) $s^2 = x^2 + y^2 + z^2$; e

(3.) $\theta s\hat{}X = \frac{x}{s}$,

(4.) $\theta s\hat{}Y = \frac{y}{s}$,

(5.) $\theta s\hat{}Z = \frac{z}{s}$. Inoltre abbiamo la

(6.) $\theta.s\hat{}D = \frac{x}{s}\theta D\hat{}X + \frac{y}{s}\theta D\hat{}Y + \frac{z}{s}\theta D\hat{}Z$

come sopra. Dalla quale si ha

(7.) $s\theta s\hat{}D = x\theta D\hat{}X + y\theta D\hat{}Y + z\theta D\hat{}Z$,

quindi la

(8.) $v^2 = s^2\theta^2 s\hat{}D = s^2\theta^2 s\hat{}D$ (a) ma $s^2 = x^2+y^2+z^2$ e $\theta^2 s\hat{}D$ il suo valore dato dalla (6) si avrà

(a) $= x^2+y^2+z^2-(x\theta D\hat{}X+y\theta D\hat{}Y+z\theta D\hat{}Z)^2$

(b) $= x^2(1-\theta^2 D\hat{}X) + y^2(1-\theta^2 D\hat{}Y) + z^2(1-\theta^2 D\hat{}Z)$
$-2xy\theta D\hat{}X\theta D\hat{}Y - 2xz\theta D\hat{}X\theta D\hat{}Z$
$-2yz\theta D\hat{}Y\theta D\hat{}Z$.

Ma si ha la

(9) $\theta^2 D\hat{}X + \theta^2 D\hat{}Y + \theta^2 D\hat{}Z = 1$, dunque

$1-\theta^2 D\hat{}X = \theta^2 D\hat{}Y + \theta^2 D\hat{}Z$

$1-\theta^2 D\hat{}Y = \theta^2 D\hat{}X + \theta^2 D\hat{}Z$

$1-\theta^2 D\hat{}Z = \theta^2 D\hat{}X + \theta^2 D\hat{}Y$, e però

avremo

(c) $v^2 = s^2\theta^2 s\hat{}D = x^2(\theta^2 D\hat{}Y+\theta^2 D\hat{}Z) +$
$y^2(\theta^2 D\hat{}X+\theta^2 D\hat{}Z) + z^2(\theta^2 D\hat{}X+\theta^2 D\hat{}Y)$
$-2xy\theta D\hat{}X\theta D\hat{}Y - 2xz\theta D\hat{}X\theta D\hat{}Z -$
$2zy\theta D\hat{}Y\theta D\hat{}Z = x^2\theta^2 D\hat{}Y - 2xy\theta D\hat{}X\theta D\hat{}Y +$
$y^2\theta^2 D\hat{}X + x^2\theta^2 D\hat{}Z - 2xz\theta D\hat{}X\theta D\hat{}Z +$
$z^2\theta^2 D\hat{}X + y^2\theta^2 D\hat{}Z - 2yz\theta D\hat{}Y\theta D\hat{}Z +$
$z^2\theta^2 D\hat{}Y$, ovvero avremo la

(10) $v^2 = (x\theta D\hat{}Y - y\theta D\hat{}X)^2 + (z\theta D\hat{}X - x\theta D\hat{}Z)^2 +$
$(y\theta D\hat{}Z - z\theta D\hat{}Y)^2$

La (8.)(b) poi è equivalente alla

(11) $v^{\wedge} = s^{\wedge}\theta . s^{\wedge} D = x^{\wedge}\theta^{\wedge} D^{\wedge} X + y^{\wedge}\theta^{\wedge} D^{\wedge} Y + z^{\wedge}\theta^{\wedge} D^{\wedge} Z$
$- 2xy\,\theta . D^{\wedge} X . \theta . D^{\wedge} Y - 2xz\,\theta D^{\wedge} X\,\theta D^{\wedge} Z -$
$2yz\,\theta D^{\wedge} Y\,\theta . D^{\wedge} Z$. Dalla (8.) si ha la

(12) $v^{\wedge} = x^{\wedge}(\theta^{\wedge} D^{\wedge} Y + \theta^{\wedge} D^{\wedge} Z) + y^{\wedge}(\theta^{\wedge} D^{\wedge} X + \theta^{\wedge} D^{\wedge} Z)$
$+ z^{\wedge}(\theta^{\wedge} D^{\wedge} X + \theta^{\wedge} D^{\wedge} Y) - 2xy\,\theta D^{\wedge} X\,\theta . D^{\wedge} Y -$
$2xz\,\theta . D^{\wedge} X\,\theta . D^{\wedge} Z - 2yz\,\theta . D^{\wedge} Y\,\theta . D^{\wedge} Z$, dipendentemente dalla (c) questa equivale alla (raccogliendo)

(13.) $v^{\wedge} = (x^{\wedge} + y^{\wedge})\,\theta^{\wedge} D^{\wedge} Z + (x^{\wedge} + z^{\wedge})\,\theta^{\wedge} D^{\wedge} Y +$
$(y^{\wedge} + z^{\wedge})\,\theta^{\wedge} D^{\wedge} X - 2xy\,\theta . D^{\wedge} X\,\theta D^{\wedge} Y -$
$2xz\,\theta . D^{\wedge} X\,\theta D^{\wedge} Z - 2yz\,\theta . D^{\wedge} Y\,\theta . D^{\wedge} Z$.

Pongasi la

(14.) $K = \Sigma m v^{\wedge}$, e mettendo a vece di $v^{\wedge}$ il valore dato dalla (13) avremo la

(15) $K = \Sigma m\big((x^{\wedge} + y^{\wedge})\,\theta^{\wedge} D^{\wedge} Z + (x^{\wedge} + z^{\wedge}) \times$
$\theta^{\wedge} D^{\wedge} Y + (y^{\wedge} + z^{\wedge})\,\theta^{\wedge} D^{\wedge} X - 2xy\,\theta . D^{\wedge} X .$
$\theta . D^{\wedge} Y - 2xz\,\theta D^{\wedge} X\,\theta D^{\wedge} Z - 2yz\,\theta D^{\wedge} Y\,\theta D^{\wedge} Z\big)$

Poniamo

$A = \Sigma m(x^{\wedge} + y^{\wedge})$,
$B = \Sigma m(x^{\wedge} + z^{\wedge})$,
$C = \Sigma m(y^{\wedge} + z^{\wedge})$,
$E = \Sigma m xy$,
$F = \Sigma m xz$,
$G = \Sigma m yz$,
$H = \Sigma m x^{\wedge}$,
$L = \Sigma m y^{\wedge}$,
$M = \Sigma m z^{\wedge}$; e dalla (15) si avrà la

(16.) $K = A\,\theta . D^{\wedge} Z + B\,\theta . D^{\wedge} Y + C\,\theta . D^{\wedge} X$
$- 2E\,\theta D^{\wedge} X . \theta . D^{\wedge} Y - 2F\,\theta D^{\wedge} X\,\theta D^{\wedge} Z$
$- 2G\,\theta D^{\wedge} Y . \theta D^{\wedge} Z$.

Ponendo nella (14) il valore di $v^{\wedge}$ dato dalla (11.) se ne dedurrà

(17.) $K = H\theta^2 D\hat{X} + L\theta^2 D\hat{Y} + M\theta^2 D\hat{Z} - 2E\theta D\hat{X} \cdot \theta D\hat{Y} - 2F\theta D\hat{X}\theta D\hat{Z} - 2G\theta D\hat{Y}\theta D\hat{Z}$.

Dal punto m si faccia cascare su AZ la perpend. mq, e poniamo che m' sia projezione sul piano (x, y) del punto m. —

Dall' origine A ad m' si conduca la Am', e condotto m'X', parallela ad AY, si avrà $AX' = x$, $m'X' = y$, onde $Am' = \sqrt{x^2+y^2} = mq$; e di conseguenza $\Sigma m(x^2+y^2)$ è il momento d'inerzia relativo all'asse coordinato della Z. Troverebbesi della stessa guisa essere $\Sigma m(x^2+z^2)$, $\Sigma m(y^2+z^2)$ i momenti d'inerzia relativi agli altri due assi delle y e delle x.

Lezione 4.

§. 597. Siano x_1, y_1, z_1 le coordinate riferite agli assi ortogonali di un punto B' preso sull'asse di rotazione AB e poniamo $AB' = K$, ed avremo la

(18) $K = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$, avendo le x_1, y_1, z_1 le stesse direzioni che le (x, y, z) e K avendo la stessa direzione della D avremo le equazioni

(19) $\theta D\hat{X} = \frac{x_1}{K}$,

(20) $\theta D\hat{Y} = \frac{y_1}{K}$,

(21) $\theta D\hat{Z} = \frac{z_1}{K}$; se questi valori si sostituiscano nella (16), se ne deduce la

(22) $k^2 K = Az_1^2 + By_1^2 + Cx_1^2 - 2Ex_1y_1 - 2Fx_1z_1 - 2Gy_1z_1$, ove K rappresenta il momento d'inerzia

Poniamo che l'asse di rotazione AB si muova intorno ad A origine delle coord. e nello stesso tempo K varii di guisa che sia costantemente rappresentato da una funzione di K; quindi potremo rappresentare K per una funzione di k, ossia per una funzione di $k=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$. Il punto B' mobile, che si move per un movimento proprio e per quello dell'asse descriverà una superficie di rotazione. Osservo, che la (16) fissa una relazione fra il momento d'inerzia K e la posizione dell'asse di rotazione AB, per le funzioni in essa contenute di angoli.

Per una situazione particolare di B' presso sull'asse di rotazione, la prefata relazione viene presentata dalla (22). Se dunque supporremo variabili x_1, y_1, z_1, la (22) rappresenterà la superficie sulla quale si move questo punto.

La relazione fra k e K è affatto arbitraria; poniamo che sia rappresentata dalla

(23) $k=\frac{1}{\sqrt{K}}$, d'onde avremo la

(24) $Kk^2=1$. Per questo valore, la (22) si riduce alla

(25.) $Az_1^2 + By_1^2 + Cx_1^2 - 2Ex_1y_1 - 2Fx_1z_1 - 2Gy_1z_1 = 1$, che rappresenta una superficie di second'ordine che per l'eq.ne ha centro, ove trovasi l'origine delle coordinate (a).

(a) Perchè mancano i termini delle coord.e alla 1.a dimensione.

Ma $A = \Sigma m(x^2+y^2)$,
$B = \Sigma m(x^2+z^2)$,
$C = \Sigma m(y^2+z^2)$ } queste sono quantità positive perchè somme di quadrati, e però
$E = \Sigma mxy$,
$F = \Sigma mxz$
$G = \Sigma myz$

tutte positive: ma quando i tre primi termini della (25) sono positivi la (25.) è l'equazione di una ellissoide: dunque la superf.e che descrive il punto in tal ipotesi è un'elissoide.

Ma si ha la

(14) $K = \Sigma mr^2$ nella quale il secondo membro è una somma di quantità positive, e però non potrà mai essere $K = 0$. ~~Se tutti i punti~~ materiali del sistema fossero sull'asse di rotaz.e allora $K = 0$, perchè v, v', v'' ... in tal caso sono $= 0$. Ma $k = \frac{1}{\sqrt{K}}$, dunque k conserverà generalmente un valor finito fuori dell'accennato caso. Dunque in tutte le posizioni dell'asse di rotazione AB intorno ad A, k conserverà in generale un valor finito. Dunque posto x_1, y_1, z_1 variabili la (25) rapp.ta un elissoide.

Nasce quindi l'infrascritto

Teorema

"Siano m, m', m'' - - - ed i punti materiali componenti il sistema; e per un punto preso arbitrariamente nello spazio si protragga un' infinità di assi, e dipoi si determinino i momenti d'inerzia del sistema riferiti agli assi medesimi. Se a partire dal prefato punto arbitrario, si noti sopra ciascheduno degli assi protratti una lunghezza equivalente all'unità, divisa per la radice quadrata del momento d'inerzia rispetto all'asse sul quale è notata la lunghezza, l'estremità di esse saranno su di una superficie di un ellissoide, della quale sarà centro il punto preso ad arbitrio." —

Se i punti materiali del sistema esistano sul med.o asse i momenti d'inerzia relativi all'asse stesso sono nulli e quindi $K=0$, e però $u=\infty$, e la superficie dell'ellissoide si cambierà in una superficie cilindrica. —

Si osservi, che i momenti d'inerzia non sono nulli

che quelli sugli assi de' quali
stanno, e per gli altri assi
estremamente vicini a questo
sarà $\mathfrak{K}$ piccolo e k grande
oltre ogni limite; sarà poi
$\mathfrak{K}$ finito per gli altri assi. —

§. 598. La direzione degli assi coordinati ortogonali è del tutto arbitraria. Se gli assi coordinati ortogonali si facciano coincidere coi diametri principali dell'ellissoide, la (25) si riduce alla

(26) $Az_1^2 + By_1^2 + Cx_1^2 = 1$, equazione dell'ellissoide riferita ai diametri principali. — Dunque, nelle fatte ipotesi avremo le seguenti equazioni

(27). $E = \Sigma m\, xy = 0$,

(28). $F = \Sigma m\, xz = 0$,

(29) $G = \Sigma m\, yz = 0$, quindi ancora

(30) $E = \int dm\, xy = 0$,

(31) $F = \int dm\, xz = 0$,

(32) $G = \int dm\, yz = 0$.

I momenti d'inerzia

$A = \Sigma m (x^2 + y^2)$,

$B = \Sigma m (x^2 + z^2)$,

$C = \Sigma m (y^2 + z^2)$, se saranno relativi ai diametri principali, si diranno <u>momenti d'inerzia principali</u>. Ma si è dimostrato nell'§. che siccome l'ellissoide non à che un solo sistema di diametri

principali; dunque in generale non esiste che un solo sistema di assi coord.i ortogonali pei quali abbiamo le regole (27) --- fino alla (32): e però le E, F, G non potranno essere = 0 che in quella sola circostanza

$(9)\ \theta^{\wedge}D^{\wedge}X+\theta^{\wedge}D^{\wedge}Y+\theta^{\wedge}D^{\wedge}Z=1$

$(16)\ K=A\theta^{\wedge}D^{\wedge}Z+B\theta^{\wedge}D^{\wedge}Y+C\theta^{\wedge}D^{\wedge}X-2Ex_1y_1-2Fx_1z_1-2Gy_1z_1$ &c.

N. 599. Dipendentemente dalla (9) si ha

$\theta^{\wedge}D^{\wedge}X=1-\theta^{\wedge}D^{\wedge}Y-\theta^{\wedge}D^{\wedge}Z$ che sostituita nella (16) ed avendo riguardo alle (30) (31) e (32) cioè supponendo E, F, G ciascuno = 0, avremo la

$(33)\ K=A\theta^{\wedge}D^{\wedge}Z+B\theta^{\wedge}D^{\wedge}Y+C(1-\theta^{\wedge}D^{\wedge}Y-\theta^{\wedge}D^{\wedge}Z)=C-(C-B)\theta^{\wedge}D^{\wedge}Y-(C-A)\theta^{\wedge}D^{\wedge}Z$. Poniamo essere $C>A$, $C>B$, dimodochè sia $C-A>0$, $C-B>0$, avremo $K<C$ qualunque siano gli angoli che fa $D^{\wedge}Y$ e $D^{\wedge}Z$. Se $C<A$, e $C<B$, poniamo la (33) sotto la forma della

$(34)\ K=C+(B-C)\theta^{\wedge}D^{\wedge}Y+(A-C)\theta^{\wedge}D^{\wedge}Z$

i termini consecutivi a C sono positivi, e però $K>C$. —

Supponiamo che a, b, c siano i semidiametri principali dell'ellissoide, e l'ellissoide stessa per 3.° versi rappresentata dalle

$(35)\ b^{\wedge}a^{\wedge}x^{\wedge}+a^{\wedge}c^{\wedge}y^{\wedge}+b^{\wedge}c^{\wedge}z^{\wedge}=a^{\wedge}b^{\wedge}c^{\wedge}$; ma

posto $E=0$, $D=0$, $G=0$ e la (25) si riduce alla (26),

(25) $Az_1^2+By_1^2+Cx_1^2-2Ex_1y_1-2Dx_1z_1-2Gy_1z_1=1$,

(36) $Az_1^2+By_1^2+Cx_1^2=1$

che confrontata colla (35) che rappresenta l'ellissoide si ha

$C=b^2c^2$,

$B=a^2c^2$,

$A=a^2b^2$,

$1=a^2b^2c^2$, se $C>A$, $C>B$, avremo $b^2c^2>a^2b^2$, e $b^2c^2>a^2c^2$, ossia $a<b$, $a<c$; ma a, b, c sono rispettivamente i diametri principali delle x, y, z, e C è il momento d'inerzia relativo all'asse delle x; dunque il momento principale massimo corrisponde al diametro principale minimo. —

Se $C<A$, $C<B$, avremo

$b^2c^2<a^2b^2$, $b^2c^2<a^2c^2$, e quindi

$a>c$, $a>b$.

Il che mostra, che il minimo momento d'inerzia è relativo al diametro principale massimo. —

Se l'ellissoide sia di rivoluzione, cioè sia una sferoide essa viene presentata dall'equaz.e

(37) $a^2y^2+b^2(x^2+z^2)=a^2b^2$. —

Se pel centro della sferoide si figuri protratto un piano perpend.e all'asse di rotazione che è quello delle y, e se su questo piano si tirino due rette comunque perpend.i passanti pel centro della sferoide

e qualunque sia la posizione di tali rette che si prendono per assi delle z e x, la sferoide sarà sempre rapp.ᵃ dalla (37). Dunque vi ha un'infinità di assi principali, uno dei quali è di rivoluzione, e gli altri 2 sono tra sé perpendicolari, e situati nell'immaginato piano.

(36) $Az_1^2+By_1^2+Cx_1^2=1$
(37) $a^2y^2+b^2(x^2+z^2)=a^2b^2$

Paragonata la (37) colla (36) si ha $A=C$, onde $\Sigma m(x^2+y^2)=\Sigma m(y^2+z^2)$: vale a dire, sono uguali tra loro i momenti d'inerzia relativi agli assi delle z e delle x, essendo y l'asse di rotazione.

Se si figuri una retta qualunque che passi pel centro della sferoide, e sia ugualmente inclinata all'asse di rivoluzione, essa in qualunque posizione sarà egualmente locata rispetto ai punti della sferoide, e perciò i momenti d'inerzia relativi a rette che facciano sempre gli stessi angoli coll'asse di rotaz.ᵉ sono eguali fra loro.

Allorchè la sferoide si cambia in un cilindro, uno dei momenti principali è nullo, come si vede dalla (37)

Se l'ellissoide diventi

una sfera essa verrà presentata dalla

(38) $x^2+y^2+z^2=r^2$, il che ci dà $A=B=C$, ovvero $\Sigma m(x^2+y^2) = \Sigma m(y^2+z^2) = \Sigma m(x^2+z^2)$; vale a dire sono eguali tutti e tre i momenti principali.

Ma la superficie è sempre presentata dalla (38) a qualunque sistema di assi si riferisca, dunque nella sfera tutti i diametri principali sono assi coord.$^{\text{inati}}$

§. 600. Allorchè gli assi coord.$^{\text{ti}}$ sono principali, si ha

$D=0$, $F=0$, $G=0$, e però le (15) (17) e (25) si cambiano nelle

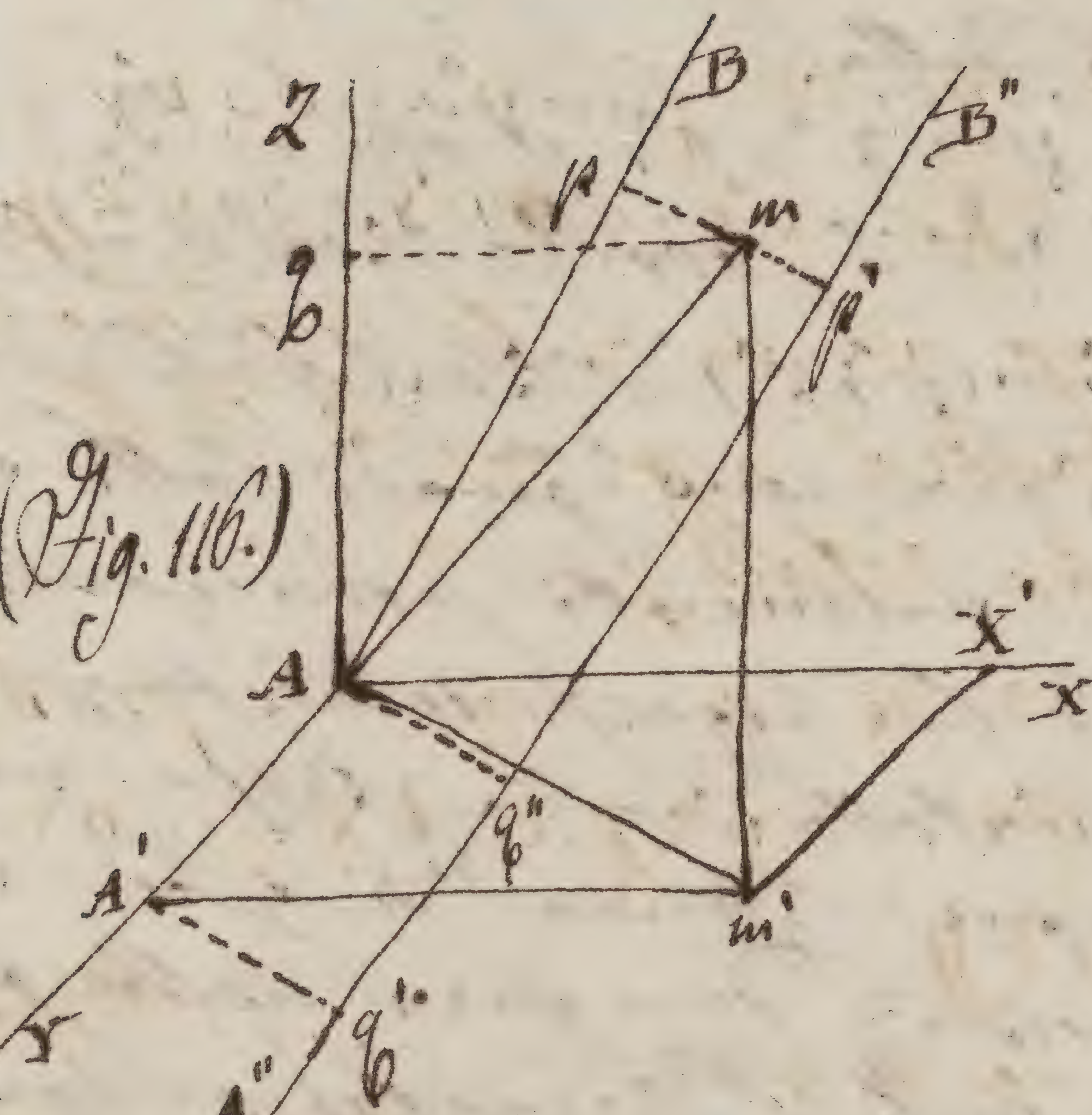
(39) $K=A\theta^2 D^2 Z+B\theta^2 D^2 Y+C\theta^2 D^2 X$,

(40) $K=H\theta^2 D^2 X+L\theta^2 D^2 Y+M\theta^2 D^2 Z$, e la

(36) $Az_1^2+By_1^2+Cx_1^2=1$, ove A, B, C rapp.$^{\text{no}}$ i momenti principali relativi agli assi principali coniugati delle z, y, x; e la (39) serve a determinare il momento d'inerzia relativo ad un asse D qualunque che passa per A in funzione dei momenti d'inerzia principali posta l'origine in A, e gli angoli che l'asse D fa con gli assi delle (x, y, z). —

Lezione 5.

§. 601. Poniamo ora che vogliasi determinare il momento d'inerzia K di un sistema di punti di cui m, m', m'' &c sono le masse relative all'asse



(Fig. 116.)

(10) $r^2=(x\cos Y-y\cos X)^2+(z\cos X-x\cos Z)^2+(y\cos Z-z\cos Y)^2$

(8) $r^2=x^2+y^2+z^2-(x\cos X+y\cos Y+z\cos Z)^2$

A″B″ (fig. 116) parallelo ad AB. Supponiamo che a, b, c siano le coordinate di A″, e siano Aq'' mp, le distanze dell'origine A e del punto m dal novello asse A″B″ ed avremo l'equaz.

(11) $R^2=\Sigma m v^2$; ove il valore di v'^2 si è dato dall'equazione (10) sostituendo r'^2 a v^2 trasportando l'origine A in A″ e tenuti i novelli assi paralleli ai primi. Dunque all'uopo porre si debbe x−a, y−b, z−c, a vece di x, y, z. Dalla (8) adunque si otterrà il valore di r'^2 sostituendo x−a, y−b, z−c a vece di x, y, z, e però avremo

(12) $r'^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-(x\cos X+y\cos Y+z\cos Z-a\cos X-b\cos Y-c\cos Z)^2$

Il nuovo asse è parallelo al primo, e però gli angoli che fa l'asse novello cogli assi coordinati non sono che i primi. Per ottenere il valore di R che è la distanza di questo punto m dall'origine far si dovrà x = 0, y = 0, z = 0, e quindi le

(13) $R^2=a^2+b^2+c^2-(a\cos X+b\cos Y+c\cos Z)^2$; per l'(8) [illegible]

$r^2=x^2+y^2+z^2-(x\cos X+y\cos Y+z\cos Z)^2$, e si ha r'^2 dato dalla $r'^2=x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2-(x\cos X+y\cos Y+z\cos Z)^2+$

$(a\theta D^\wedge X + b\theta D^\wedge Y + c\theta D^\wedge Z)^\wedge -$
$2(ax + by + cz - (a\theta D^\wedge x + b\theta D^\wedge Y + c\theta D^\wedge Z)(x\theta D^\wedge X + y\theta D^\wedge Y + z\theta D^\wedge Z))$, e

~~"Siano x_1, y_1, z_1 le coordinate "del centro di gravità della "massa totale sarà la~~

(44) $r'^\wedge = r^\wedge + R^\wedge - 2(ax + by + cz - (a\theta D^\wedge X + b\theta D^\wedge Y + c\theta D^\wedge Z)(x\theta D^\wedge X + y\theta D^\wedge Y + z\theta D^\wedge Z))$.

Siano x_1, y_1, z_1 le coord.e del centro di gravità della massa totale dei punti m, m', m'' &c e si avranno le

(45) $\Sigma mx = Mx_1$

(46) $\Sigma my = My_1$

(47) $\Sigma mz = Mz_1$. Se si sostituisca il valore di $r'^\wedge$ dato dalla (44) nella (14) si avrà

(48) $K' = \Sigma mr^\wedge + \Sigma mR^\wedge - 2(a\Sigma mx + b\Sigma my + c\Sigma mz - (\theta D^\wedge X\Sigma mx + \theta D^\wedge Y\Sigma my + \theta D^\wedge Z\Sigma mz)(a\theta D^\wedge X + b\theta D^\wedge Y + c\theta D^\wedge Z))$: ma si ha

$\Sigma mr^\wedge = K$

$\Sigma mR^\wedge = R^\wedge\Sigma m = R^\wedge M$. Dunque per le (45) (46) e (47) e (14), avremo la

(14) $K = \Sigma mr^\wedge$,

(49) $K' = K + R^\wedge M - 2M(ax_1 + by_1 + cz_1 - (x_1\theta D^\wedge X + y_1\theta D^\wedge Y + z_1\theta D^\wedge Z)\cdot(a\theta D^\wedge X + b\theta D^\wedge Y + c\theta D^\wedge Z))$;

Poniamo che il centro di gravità del sistema dei punti materiali sia all'origine delle coord.e allora $x_1 = 0$ $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, pei quali valori la

(49) riducesi alla

(50) $K' = K + R^2 M$, che mette davanti l'infrascritto

Teorema

"Ad ottenere il momento d'inerzia di un sistema di punti materiali relativo ad un'asse qualunque basta aggiungere al momento d'inerzia di un'asse a questo parallelo che passi pel centro di gravità del sistema, la somma delle masse moltiplicate pel quadrato della distanza dei due assi."

Questo teorema è il dimostrato al N. 507 vale per un sist. indeterm. grande di punti materiali cioè per un corpo solido.

Si osservi, che se il solido sia omogeneo, ed un piano protratto per A lo tagli in due parti simmetriche supposto che tal piano sia l'(x,y) si ha

$\Sigma mxz = 0$.

$\Sigma myz = 0$

poichè per un elemento m, da una parte del piano si ha mxz, $-mxz$ dall'altra parte, e però tali due somme sono $= 0$. Nel qual caso

gli assi delle y e x sono diametri principali dell'ellissoide dato dalla (25) poichè essi sussistono quelle due equazioni. Un piano adunque contiene due diametri principali dell'ellissoide presentata dalla (25.)

Il detto del piano precedente si può dire per piani perpendicolari al supposto. Concludere adunque si debbo, che se pel centro di gravità di un solido omogeneo si possano condurre tre piani perpendi. i quali dividano ciascuno in due parti simmetriche il solido, in ciascun piano vi sono due diametri principali che passano pel centro o origine.

Così in un parallelepipedo rettangolo gli assi sono le tre rette che passano (a)

(a) pel centro di gravità paralelle ai lati.

Nell' ellissoide omogenea i tre assi principali coincidono coi diametri principali.

§. 602. Conosciuti i tre momenti d'inerzia A, B, C relativi agli assi principali trovare si può la relaz. degli assi stessi: poichè tenuta la stessa origine essi sono diametri principali dell'ellissoide data dalla (36). Ma nell' Σ.

si è veduto che per questi ellissoidi si può avere la lunghezza e la direzione degli assi principali, dunque dati i tre momenti si possono avere essi. Si è pure dimostrato allora che un solo sistema di diametri principali può aver luogo, e però sapremo dimostrare che vi ne ha un sol sistema poiché si confondono, il che è dovuto a Poinsot.

§. 613. ~~Moti di~~ Riprendiamo la (25) del §. 517. che è

(25) $Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 - 2Ey_1z_1 - 2Fx_1z_1 - 2Gy_1x_1 = 1$. Si è trovato all' d.º che l'equazione del piano tangente questa superficie al ~~piano~~ punto (x, y, z) è la

(51) $(Cx - Ey - Fz)(x_1 - x) + (By - Ex - Gz)(y_1 - y) + (Az - Fx - Gy)(z_1 - z) = 0$ equaz.º del piano tang.º l'ellissoide.

Una retta che passa pel centro dell'ellissoide che è pure origine delle coordinate verrà presentata (essendo nelle spazio)

(52) $u = mt$

(53) $v = m't$. Se questa retta passar debba pel punto (x, y, z) verrà presentata dalle due equazioni

(54) $(u - y) = m(t - x)$,

(55) $(v - z) = m'(t - x)$; ma dalle (52) e (53) si ha

(56) $m = \frac{y}{x}$,

(57) $m' = \frac{z}{x}$, dunque la retta che

passa per l'origine dovrà posti davanti dalle

(58) $(u-y)=\frac{y}{x}(t-x)$,

(59) $(v-z)=\frac{z}{x}(t-x)$. Perchè poi la retta presentata da queste due equazioni sia perpend. al piano tangente l'ellissoide nel punto x, y, z il qual piano viene dato dalla (51) vale a dire perchè il raggio vettore condotto al punto (x, y, z) sia normale alla superf. stessa si è ved. nell' Ep. che debbono aver luogo due equazioni di cond. date dalle

(60) $(By-Ex-Gz)=\frac{y}{x}(Cx-Ey-Fz)$,

(61) $Az-Fx-Gy=\frac{z}{x}(Cx-Ex-Fz)$,

da cui derivansi le altre due

(62) $\frac{Cx-Ey-Fz}{x}=\frac{By-Ex-Gz}{y}$,

(63) $\frac{Cx-Ey-Fz}{x}=\frac{Az-Fx-Gy}{z}$,

(64) $\frac{By-Ex-Gz}{y}=\frac{Az-Fx-Gy}{z}$;

Si osservi, che nelle (19) (20) e (21) X, Y, Z, appartengono ad un punto dell' ellissoide poichè sono coord.e di P estremo di K: ma quando x, y, z, sono variabili come nel nostro caso, possono essere presentate per le x, y, z dunque avremo le

(65) $\theta D\hat{X}=\frac{x}{K}$,

(66) $\theta D\hat{Y}=\frac{y}{K}$,

(67) $\theta D\hat{Z}=\frac{z}{K}$, e quindi le

(68) $x=K\theta D\hat{X}$,

(69) $y=K\theta D\hat{Y}$,

(70) $z=K\theta D\hat{Z}$, per cui le (62) (63)

e (64) si mutano nelle

(71) $\frac{G\theta D\hat{X}-E\theta D\hat{Y}-F\theta D\hat{Z}}{\theta D\hat{X}}=\frac{B\theta D\hat{Y}-E\theta D\hat{X}}{\theta D\hat{Y}}$

(72) $\frac{G\theta D\hat{X}-E\theta D\hat{Y}-F\theta D\hat{Z}}{\theta D\hat{X}}=\frac{A\theta D\hat{Z}-F\theta D\hat{X}-G\theta D\hat{Y}}{\theta D\hat{Z}}$

(73) $\frac{B\theta D\hat{Y}-E\theta D\hat{X}-G\theta D\hat{Z}}{\theta D\hat{Y}}=\frac{A\theta D\hat{Z}-F\theta D\hat{X}-G\theta D\hat{Y}}{\theta D\hat{Z}}$

Alle (16') si può dare la forma

(16') $K=A\theta^2 D\hat{Z}+B\theta^2 D\hat{Y}+G\theta^2 D\hat{X}-2E\theta.D\hat{X}\,\theta D\hat{Y}-2F\theta.D\hat{X}\,\theta D\hat{Z}-2G\theta D\hat{Y}\,\theta D\hat{Z}.$

(74) $K=\theta D\hat{Z}(A\theta D\hat{Z}-F\theta D\hat{X}-G\theta D\hat{Y})+\theta D\hat{Y}.(B\theta D\hat{Y}-E\theta D\hat{X}-G\theta D\hat{Z})+\theta D\hat{X}(G\theta D\hat{X}-E\theta D\hat{Y}-F\theta D\hat{Z})\overset{(a)}{=}\theta^2 D\hat{Z}\frac{G\theta D\hat{X}-E\theta D\hat{Y}-F\theta D\hat{Z}}{\theta D\hat{X}}+\theta^2 D\hat{Y}\frac{G\theta D\hat{X}-E\theta D\hat{Y}-F\theta D\hat{Z}}{\theta D\hat{X}}+\theta^2 D\hat{X}(G\theta D\hat{X}-E\theta D\hat{Y}-F\theta D\hat{Z})=$

$\left(\frac{\theta^2 D\hat{Z}}{\theta D\hat{X}}+\frac{\theta^2 D\hat{Y}}{\theta D\hat{X}}+\theta D\hat{X}\right)(G\theta D\hat{X}-E\theta D\hat{Y}-F\theta D\hat{Z})=\frac{G\theta D\hat{X}-E\theta D\hat{Y}-F\theta D\hat{Z}}{\theta D\hat{X}}$

(a) per le (72) (71) ~~(73)~~

poichè

$\theta^2 D\hat{X}+\theta^2 D\hat{Y}+\theta^2 D\hat{Z}=1.$ —

Troverebbesi della stessa guisa

(75) $K=\frac{B\theta D\hat{Y}-E\theta D\hat{X}-G\theta D\hat{Z}}{\theta D\hat{Y}}$

(76) $K=\frac{A\theta D\hat{Z}-F\theta D\hat{X}-G\theta D\hat{Y}}{\theta D\hat{Z}},$

d'onde

(77) $(K-G)\theta D\hat{X}+E\theta D\hat{Y}+F\theta D\hat{Z}=0$

(78) $(K-B)\theta D\hat{Y}+E\theta D\hat{X}+G\theta D\hat{Z}=0$

(79) $(K-A)\theta D\hat{Z}+F\theta D\hat{X}+G\theta D\hat{Y}=0$

Poniamo $K-A=\alpha$, $K-B=\beta$, $K-G=\gamma$, $\theta D\hat{X}=\omega$, $\theta D\hat{Y}=\omega'$, $\theta D\hat{Z}=\omega''$, e si avranno le tre equazioni

(80) $\gamma\omega+E\omega'+F\omega''=0,$

(81) $\beta\omega'+E\omega+G\omega''=0,$

(82) $\alpha\omega''+F\omega+G\omega'=0;$ dalle (81) e (82) si deducono le

(83) $\omega' = \frac{FG - \alpha E}{\alpha\beta - G^2}\,\omega$,

(84) $\omega'' = \frac{EG - \beta F}{\alpha\beta - G^2}\,\omega$. Questi valori sostituiti nella (80) riducendo al lo stesso denom.e e divid.o per $\frac{\omega}{\alpha\beta - G^2}$ ne viene la

(85) $\gamma(\alpha\beta - G^2) + E(FG - \alpha E) + F(EG - \beta F) = 0$, ovveramente

(86) $(K-A)(K-B)(K-C) - E^2(K-A) - F^2(K-B) - G^2(K-C) + 2EFG = 0$.

Sia K_1 un'altro momento d'inerzia relativo ad un'altro asse D', e siccome la (86) è indipendente dagl'angoli, così dalle equazioni che si hanno dalle (77) (78) e (79) prendoci $K_1, \theta D_1 X, \theta D_1 Y, \theta D_1 Z$, a vece di $K, \theta D X, \theta D Y, \theta D Z$, si deriverà la (86) mutato k in K_1.

Lo stesso si dice di un nuovo asse D_2, a cui corrisponda il momento d'inerzia K_2. Dunque K, K_1, K_2 sono radici della (86) la quale essendo di 3° grado avrà per lo meno una radice reale.

Lezione 6a

§. 604. A dimostrare che l'equazione (86) ha tutte tre le radici K, K_1, K_2 reali si metta sotto la forma

(87) $(K-C) = \frac{E^2(K-A) + F^2(K-B) - 2EFG}{(K-A)(K-B) - G^2}$.

La (86) deve sussistere ponen-

dà a vece di K, K_1, K_n; dunque la (87) darà luogo alle

$$(88)\quad (K_1 - G) = \frac{E^2(K_1-A) + F^2(K_1-B) - 2EFG}{(K_1-A)(K_1-B) - G^2}$$

$$(89)\quad (K_n - G) = \frac{E^2(K_n-A) + F^2(K_n-B) - 2EFG}{(K_n-A)(K_n-B) - G^2}$$

La differenza fra la (88) e la (89) è la

$$(90)\quad K_1 - K_n = \frac{E^2(K_1-A) + F^2(K_1-B) - 2EFG}{(K_1-A)(K_1-B) - G^2} - \frac{E^2(K_n-A) + F^2(K_n-B) - 2EFG}{(K_n-A)(K_n-B) - G^2},$$ ovvero

$$(91)\quad (K_1-K_n)\big((K_1-A)(K_1-B)-G^2\big)\big((K_n-A)(K_n-B)-G^2\big)$$
$$= \big(E^2(K_1-A)+F^2(K_1-B)-2EFG\big)\big((K_n-A)(K_n-B)-G^2\big) - \big(E^2(K_n-A)+F^2(K_n-B)-2EFG\big)\big((K_1-A)(K_1-B)-G^2\big) =$$
$$E^2(K_1-A)(K_n-A)(K_n-B) - G^2E^2(K_1-A) + F^2(K_1-B)(K_n-A)(K_n-B) - F^2G^2(K_1-B) - 2EFG(K_n-A)(K_n-B) - F^2G^2(K_1-B) -$$
$$2EFG(K_n-A)(K_n-B) + 2EFG^3 - E^2(K_n-A)\cdot(K_1-A)(K_1-B) + E^2G^2(K_n-A) - F^2(K_n-B)\cdot(K_1-A)(K_1-B) + F^2G^2(K_n-B) + 2EFG\cdot(K_1-A)(K_1-B) - 2EFG^3 = E^2\big((K_1-A)\cdot(K_n-A)(K_n-B) - (K_n-A)(K_1-A)(K_1-B)\big)$$
$$+ F^2\big((K_1-B)(K_n-A)(K_n-B) - (K_n-B)\cdot(K_1-A)(K_1-B)\big) + E^2G^2\big((K_n-A) - (K_1-A)\big) + F^2G^2\big((K_n-B) - (K_1-B)\big) + 2EFG\big((K_1-A)(K_1-B) - (K_n-A)(K_n-B)\big) = E^2\big(K_1K_n^2 - A(K_1K_n + K_n^2)$$
$$+ A^2K_n - BK_1K_n + AB(K_1+K_n) - A^2B - \big(K_nK_1^2 + A(K_1K_n + K_1^2) - A^2K_1 + BK_1K_n - AB(K_1+K_n) + A^2B\big) + F^2\big(K_1K_n^2 -$$
$$B(K_1K_n + K_n^2) + B^2K_n - AK_1K_n + AB(K_1+K_n) - AB^2 - K_nK_1^2 + B(K_1K_n + K_1^2)$$

$-B^2K_1 + AK_1K_2 - AB(K_1+K_2) + AB^2) +$
$(E^2G^2+F^2G^2)(K_2-K_1) + 2EFG((K_1+K_2)(K_1-K_2)$
$+(A+B)(K_2-K_1)) = (E^2+F^2)(K_1-K_2)K_1K_2$
$+AE^2(K_1+K_2)+BF^2(K_1+K_2)(K_1-K_2)$
$-(A^2E^2+B^2F^2)(K_1-K_2)-(E^2G^2+F^2G^2)\cdot$
$(K_1-K_2)+2EFG((K_1+K_2)(K_1-K_2)-$
$(A+B)(K_1-K_2))$. Dividendo adunque per K_1-K_2 e trasportando nel 1.° membro avremo

(92) $((K_1-A)(K_1-B)-G^2)((K_2-A)(K_2-B)-G^2)$
$+(E^2+F^2)K_1K_2-(AE^2+BF^2+2EFG)\cdot$
$(K_1+K_2)+(E^2+F^2)G^2+A^2E^2+B^2F^2+$
$2EFG(A+B)=0$, alla quale dare si può la forma seguente

(93) $((K_1-A)(K_1-B)-G^2)((K_2-A)(K_2-B)$
$-G^2)+(E(K_1-A)-FG)(E(K_2-A)-FG)$
$+(F(K_1-B)-EG)(F(K_2-B)-EG)=0$

Bisogna dunque verificare che una delle radici della (86.) sia reale, sostituendo delle quantità immaginarie si dimostrerà che si ottengono dei termini positivi indipendenti dalle quantità immaginarie ~~che non si riducono~~ al 1.° membro.

Poniamo che
$K_1 = m+n\sqrt{-1}$; ma si è dimostrato nell'Alg.e che se v'ha questa ve n'ha un'altra della forma
$K_2 = m-n\sqrt{-1}$, dunque bisognerà che queste due espressioni riducano

a zero il 1.° membro della (93) si avrà

$K_1 - A = m' + u\sqrt{-1}$,

$K_2 - A = m' - u\sqrt{-1}$,

$K_1 - B = m'' + u\sqrt{-1}$,

$K_2 - B = m'' - u\sqrt{-1}$; mettendo alla (93) queste espressioni a vece della (93) equivalenti; la (93) si debbe verificare, onde esser debbe la

(94) $((m'+u\sqrt{-1})(m''+u\sqrt{-1}) - G^2)((m'-u\sqrt{-1})\cdot(m''-u\sqrt{-1}) - G^2) + (E(m'+u\sqrt{-1}) - FG)\cdot(E(m'-u\sqrt{-1}) - FG) + (F(m''+u\sqrt{-1}) - GE)(F(m''-u\sqrt{-1}) - GE) = 0.$ —

Ma $((m'+u\sqrt{-1})(m''+u\sqrt{-1}) - G^2)\cdot((m'-u\sqrt{-1})(m''-u\sqrt{-1}) - G^2) = (m'm'' + (m'+m'')u\sqrt{-1} + u^2 - G^2)\cdot(m'm'' - (m'+m'')u\sqrt{-1} + u^2 - G^2) = (m'm'' - m^2G^2 + (m'+m'')u\sqrt{-1})(m'm'' - G^2 - (m'+m'')u\sqrt{-1}) = (m'm'' + m^2 - G^2)^2 + (m'+m'')^2u^2$, che è quantità positiva. Inoltre

$(E(m'+u\sqrt{-1}) - FG)(E(m'-u\sqrt{-1}) - FG) = (Em' - FG + uE\sqrt{-1})(Em' - FG - uE\sqrt{-1}) = (Em' - FG)^2 + u^2E^2$, che è pure quantità positiva. Nella stessa maniera si dimostra che il terzo prodotto è positivo. Dunque, la (93) non può essere verificata da valori immaginarj di k_1, k_2, dunque la (86) ha tutte le radici reali

Dall'eseguito calcolo si

mostra che K, K', K'' rappresentano tre momenti d'inerzia relativi ad assi che passano per punti dell'ellissoide ne' quali il piano tangente è perpend.re agli assi stessi. Ma così fatti punti sono estremi dei diametri principali dell'ellissoide, dunque le tre radici della (86) rappresentano i tre momenti d'inerzia principali.

N. 605. Ritenute le denominazioni del N. 603, abbiamo la

(95) $w^2+w'^2+w''^2=1$, nella quale messi i valori di w' ed w'' sopra trovati, dati dalle (83)(84), avremo

$$(83)\quad w'=\frac{FG-\alpha E}{\alpha\beta-G^2}w$$

$$(84)\quad w''=\frac{EG-\beta F}{\alpha\beta-G^2}w$$

$$w^2+\frac{(FG-\alpha E)^2}{(\alpha\beta-G^2)^2}w^2+\frac{(EG-\beta F)^2}{(\alpha\beta-G^2)^2}w^2=1,$$

ovvero

$$w^2\left((\alpha\beta-G^2)^2+(FG-\alpha E)^2+(EG-\beta F)^2\right)=(\alpha\beta-G^2)^2,$$ ossia

$$w^2\left(((K-A)(K-B)-G^2)^2+(FG-(K-A)E)^2+(EG-(K-B)F)^2\right)=((K-A)(K-B)-G^2)^2$$

onde

$$(96)\quad w=\frac{(K-A)(K-B)-G^2}{\sqrt{((K-A)(K-B)-G^2)^2+(FG-(K-A)E)^2+(EG-(K-B)F)^2}}$$

Posto questo valore di w nella (83) e rappresentando per P il denominatore del valore di w, si avrà

$$(97)\quad w'=\frac{FG-\alpha E}{\alpha\beta-G^2}\cdot\frac{(K-A)(K-B)-G^2}{P}=\frac{FG-\alpha E}{P}=\frac{FG-(K-A)E}{P},$$ della stessa

guisa dalla (86) si ha la

(98) $\omega' = \frac{EG - pF}{F} = \frac{EG - (K-E)F}{F}$.

Le (96), (97), (98) mettono davanti i coseni degli angoli che fanno le direzioni degli assi principali cogli assi coord. di mettendovi le radici della (86) reali come.

§. 600. Si è veduto che i tre momenti d'inerzia $\Sigma m(x^2+y^2)$, $\Sigma m(x^2+z^2)$, $\Sigma m(y^2+z^2)$ relativi agli assi z, y, x, i quali sono diametri principali siano tutti disuguali fra di loro esiste un solo sistema di assi principali come si è veduti ai §. 598, 99 e 600. e la determinazione dei momenti principali d'inerzia relativi agli assi stessi è sempre possibile pel dimostrato ai §. 604 e 605. Cerchiamo ora di determinarli.

Riprendiamo la (40) del §. 600 che è

(40) $K = H\cos^2 DX + I\cos^2 DY + M\cos^2 DZ$

ove

(99) $H = \Sigma m x^2$;

(100) $I = \Sigma m y^2$;

(101) $M = \Sigma m z^2$, questi H, I, M rappresentano i momenti d'inerzia relativi ai piani (y, z), (x, z), (y, x).

Prendiamo a considerare la (99) e figuriamo prolungati due piani fra loro vicini oltre ogni limite, e che siano perpendicolari all'asse delle x, cioè paralleli al piano (y, z).

Poniamo che dx sia la distanza di questi piani, e che δ sia la densità del corpo. L'intersecazione di uno di questi piani e il corpo sia presentata per U (sezione) si avrà che $U dx$ sarà l'elem.º del volume di questo corpo. Messo adunque nella (99) $U dx$ a vece di m si dovrà cambiare Σ in $\int$, e però avremo la

(102) $H = \int_{x_0}^{x_1} \delta U x^2 dx$. Similmente, se chiamiamo V la sezione di un piano parallelo al (x, z) nel corpo, e W la sezione con un piano parallelo al (x, y) avremo le due equazioni

(103) $I = \int_{y_0}^{y_1} \delta V y^2 dy$,

(104) $M = \int_{z_0}^{z_1} \delta W z^2 dz$, che se il corpo è omogeneo si riducono alle

(105) $H = \delta \int_{x_0}^{x_1} U x^2 dx$,

(106) $I = \delta \int_{y_0}^{y_1} V y^2 dy$,

(107) $M = \delta \int_{z_0}^{z_1} W z^2 dz$, ove x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1 sono i valori di x, y, z, minimo e massimo relativamente al corpo.

Lezione 7.

§. 607. D'altra guisa si può ottenere il momento principale d'inerzia, ricordando che $\Sigma m(x^2+y^2)$, $\Sigma m(x^2+z^2)$ $\Sigma m(y^2+z^2)$ rappresentano i momenti d'inerzia relativi agli assi delle z, y, x rispettivamente.

La m massa dell'elemento, è presentata da $m = dxdydz$, dunque avremo le equazioni

(108) $\iiint \delta(x^2+y^2)\,dxdydz = A$,

(109) $\iiint \delta(x^2+z^2)\,dxdydz = B$,

(110) $\iiint \delta(y^2+z^2)\,dxdydz = C$, presi gl'integrali determinati dietro la forma del corpo per l'estensione.

(39) $K = A\theta D^2 Z + B\theta D^2 Y + C\theta D^2 X$ Dalla (39). §. 600 si otterrà il valore di K.

§. 608. Per fare un'applicazione sia da determinarsi il momento principale d'inerzia di un parallelepipedo rettangolo ed omogeneo di cui il centro di gravità coincide coll'origine degli assi ortogonali paralleli agli spigoli del parallelepipedo.

Sia M la massa di esso, a, b, c i tre spigoli, e la sezione U del solido sarà data dalla

(111) $U = bc$; l'estensione degli integrali debbesi porre da $x_0 = -\frac{1}{2}a$ ad $x_1 = \frac{1}{2}a$, ed $M_1 = \delta abc$, essendo M_1 la massa del parallelepipedo. Dalla (102) avremo

(112) $H = \delta\int_{x_0}^{x_1} Ux^2dx = \frac{M_1}{a}\int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} x^2dx = \frac{1}{12}a^2M_1$. Similmente si troverebbe

(113) $L = \frac{1}{12}b^2M_1$,

(114) $M = \frac{1}{12}c^2M_1$: quindi dalla (40) si

(40) $K = H\theta^2 D^2X + L\theta^2 D^2Y + M\theta^2 D^2 Z$, dedurrà la

(115) $K = M_1 \frac{a^2 \cos^2 DX + b^2 \cos^2 DY + c^2 \cos^2 DZ}{12}$, che sarà il valore del momento d'inerzia di un parallelepipedo rettangolare relativamente ad un asse che passa pel centro di gravità e fa con gli spigoli di lui gli angoli DX, DY, DZ, essendo essi paralleli agli assi coordi.
Se a vece del parallelepipedo si avesse un cubo cioè fosse $a=b=c$, si avrebbe la (dall. 115)

(116) $K = \frac{\cos^2 DX + \cos^2 DY + \cos^2 DZ}{12} . M_1 a^2$.
Ma nell' Ige si è dimostrato che la somma dei quadr. dei seni $=2$, dunque si ha
$= \frac{1}{6} M_1 a^2$ valore indipend. dagli angoli DX, DY, DZ.
Applicando alla soluzione del problema le (108) (109) e (110) onde far uso della
(39) $K = A \cos^2 DZ + B \cos^2 DY + C \cos^2 DX$, si ha

(integ. rispº. a dz) $C = \delta \int (x^2 + y^2) dx dy dz = \ldots$
$\delta \int z(x^2 + y^2) dx dy = \delta \int (z x^2 y + \frac{z y^3}{3}) dx$
$= \delta (\frac{z x^3 y}{3} + \frac{z y^3 x}{3})$: facendo l'estensione Integ. $= \frac{8\delta (a^3 bc + ab^3 c)}{3 . 32} =$
$\delta abc \frac{a^2 + b^2}{3 . 4} = M_1 \frac{a^2 + b^2}{3 . 4}$.
Si troverebbe similmente
$B = M_1 \frac{b^2 + c^2}{3 . 4}$,
$A = M_1 \frac{a^2 + c^2}{3 . 4}$ che sostª. nella (39) si avrà la

(117) $K = M_1 \frac{(a^2+b^2)\theta^2 D^2 Z + (a^2+c^2)\theta^2 D^2 Y + (b^2+c^2)\theta^2 D^2 X}{3.4}$

se $a=b=c$, avremo

$K = \frac{2M_1 a^2}{3.4}$, essendo $\theta^2 D^2 X + \ldots = 1$.

Egli è facile dimostrare che i valori di K dati dalle (116) e (117) sono gli stessi. Per far ciò basterà che la differenza di questi due valori sia zero. Una tal diff.za è

Si sostituisca $1-\theta^2$

$(a^2+b^2)\theta^2 D^2 Z + (a^2+c^2)\theta^2 D^2 Y + (b^2+c^2)\theta^2 D^2 X$

$a^2\theta^2 D^2 X - b^2\theta^2 D^2 Y - c^2\theta^2 D^2 Z = \ldots$

$2(a^2+b^2+c^2) - (a^2+b^2)\theta^2 D^2 Z - (a^2+c^2)\theta^2 D^2 Y - (b^2+c^2)\theta^2 D^2 X - a^2\theta^2 D^2 X - b^2\theta^2 D^2 Y - c^2\theta^2 D^2 Z$

$\theta^2 D^2 X + \theta^2 D^2 Y + \theta^2 D^2 Z = 1$ dunque

$= 2(a^2+b^2+c^2) - (a^2+b^2+c^2)\theta^2 D^2 Z - (a^2+b^2+c^2)\theta^2 D^2 Y - (a^2+b^2+c^2)\theta^2 D^2 Z =$

$2(a^2+b^2+c^2) - 2(a^2+b^2+c^2) = 0.$

= Esercizio: =

N. 689. Determinare il momento d'inerzia ~~dato~~ dall'ellissoide data dall'equazione

$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$

Il calcolo del momento d'inerzia di un corpo solido omogeneo terminato da una superficie di rivoluzione si riduce

il calcolo ad una sola integrazione, dipendentemente dalla linea piana generatrice allorchè si prende il momento relativo all'asse di rotazione.

Per ciò dimostrare, immaginiamo due piani perpendicolari all'asse di rotazione due

prenderemo p. asse delle x, e siano distanti di dx. Poniamo l'origine delle coord. in uno dei punti ove l'asse incontra la superficie; in tal guisa il solido verrà diviso in tante anella, ciascuna delle quali sarà di grossezza e larghezza indeterminatamente piccola ed avrà il centro sull'asse di rotazione.—

n.8 Le basi di queste anelle saranno circoli i cui raggi differiranno di una quantità indeterminatamente piccola, per cui se dicasi r il raggio interno, $r+dr$ sarà il raggio del circolo esterno, e dx sarà l'altezza dell'anello: la solidità di esso sarà la differenza di due cilindri che hanno p. base i circoli $r+dr$, ed r, laonde $\pi(r+dr)^2dx$ sarà la solidità del 1°, e πr^2dx sarà quella del 2°, e la diff.za sarà.

$$\pi(r+dr)^2dx - \pi r^2dx =$$
$$\pi(r^2+2rdr+dr^2)dx - \pi r^2dx$$
$$= \pi r^2dx + 2\pi rdrdx + \pi dr^2dx$$
$$- \pi r^2dx = 2\pi rdr.dx + \pi dr^2dx$$
$$= 2\pi rdrdx$$

poichè trascurare si può πdr^2dx. La solidità dell'anello elementare vien dunque presentata da $2\pi rdr.dx$. La solidità dell'anella sarà $2\pi r\,dr\,dx$.

La distanza dei punti della
massa dall'asse di rotazione
è presentato da r, e da ordi
essendo dr piccolissimo, quindi si
può ritenere che r esprime la
distanza dell'asse di rotazio-
ne della curva che genera il
solido; avremo dunque che il
momento di inerzia (mr^2) sarà
$2\pi r^3 \delta\, dx\, dr$; prendiamo l'in-
tegrale rispetto alla r, che si
estenderà da $r=0$, ad $r=y$,
essendo y l'altra coordinata
della linea generatrice; dun-
que si dovrà integrare e porre
per la (y) e si avrà integ.

(A) $\frac{2\pi\delta y^4 dx}{2} = \frac{1}{2}\pi\delta y^4 dx$. Dall'
equazione della generatrice
piana ora trarre si deve
il valore di y in funzione
di x, e poscia fattane sosti-
tuzione nella formola trovata
integrare da $x=0$ fino ove
l'asse di rotazione incontra
la superficie. L'integrale
così trovato mette davanti
il momento d'inerzia di un
solido di rivoluzione: estenden-
do l'integrale da $x=0$, ad
$x=m$, si avrà il momento
d'inerzia della porzione di
solido compresa dall'origine
e da un piano la cui di-

stanza dall'origine i' m_1.
Si otterrà pure il momento d'inerzia di una porzione di solido compresa fra due piani paralleli uno distante dall'origine m, e l'altro m_1.

Allorchè un corpo è formato da un vano terminato da due superficie di rivoluzione aventi il med.° asse, si otterrà il momento d'inerzia relativo a questo asse considerando il solido come composto da due solidi di rivoluzione e sottraendo il momento dell'uno da quello dell'altro.

Se poi si voglia il momento d'inerzia di un segmento di solido di rivoluzione compreso entro l'angolo fatto da due piani protratti per l'asse di rotazione e che facciano fra loro un angolo. Si vede, che il momento totale d'inerzia sta al parziale, come la circonferenza sta alla porzione compresa fra i due piani qualora il solido sia omogeneo.

§. 616. Per fare un'applicazione poniamo che la linea generatrice sia un circolo del diametro $2a$, il quale posta l'origine alla circonferenza verrà presentato dalla

(118) $y^2+x^2-2ax=0$, da cui
$y^2=2ax-x^2$, e però

(119) $y^4=4a^2x^2-4ax^3+x^4$, onde

(A) $\frac{1}{2}\pi\delta y^2 dx$

$\frac{1}{2}\pi\delta y^2 dx = \frac{1}{2}\pi\delta(4a^2x^2 - 4ax^3 + x^4)dx$, e quindi

$\frac{1}{2}\pi\delta\int(4a^2x^2 - 4ax^3 + x^4)dx =$

$\frac{1}{2}\pi\delta\left(\frac{4a^2x^3}{3} - ax^4 + \frac{x^5}{5}\right) = \frac{1}{2}\pi\delta\,\frac{20a^2x^3 -}{}$

integrale che estendere si debbe da $x=0$ fino ad $x=2a$, onde avrassi

(120.) $K = \frac{1}{2}\pi\delta\,\frac{160a^5 - 240a^5 + 96a^5}{15} = \frac{8\pi\delta a^5}{15}$.

Ma la massa che diremo m; della sfera è $m = \frac{4}{3}\pi a^3\delta$; dunque

$K = m\frac{2a^2}{5}$.

§. 611. Per esercizio. Se si avesse una retta invece del circolo. —

§. 612. Gli assi principali dei corpi godono di un'importante proprietà meccanica d'onde diconsi assi principali di rotazione. —

Prendiamo a considerare un solido rotante intorno ad un'asse fisso, ponendo la rotazione generata da un impulso primitivo istantaneo senza che dovesse una forza continua sollecitare il solido.

Sia (fig. 117.) AZ l'asse fisso di rotazione; (x, y, z) le coordinate di una molecola elementare del corpo, le quali siano riferite agli assi AX, AY, AZ. Sia r la distanza di essa dall'asse di rotazione, cioè il raggio del circolo dalla molecola descritto ed ω la velocità angolare comune a tutti i punti che è costante.

Sia f la forza centrifuga dell'elemento dm e v la velocità di lui

$\frac{15ax^4+3x^5}{15}$,

e pel detto al §. 512. avremo la

(121) $f=\frac{v^2}{r}$; ma essendo ω la velocità angolare si ha

(122) $v=r\omega$, e sostituendo nella (121) si ha la

(123) $f=r\omega^2$, che sarà diretta secondo il prolungamento di r. La corrispondente forza motrice sarà $r\omega^2 dm$, che diretta sarà nel prolungamento di r. Dunque l'asse fisso è tirato da una forza $r\omega^2 dm$ perpendicolare ad esso, per un elemento; per tutti gli elementi, la risultante o le due risultanti costituite in diversi piani esprimono la pressione totale sopportata dall'asse di rotazione durante il moto del solido.

Ripetiz.^e 8.
Lezione 9.

§. 613. Si è detto che ha luogo una pressione; cerchiamo di determinarla. All'uopo applichiamo la $r\omega^2 dm$ al punto in cui la direzione di lei taglia l'asse AZ, la quale direzione (fig 117) sia $pq=r$. Se si trasporti pq parallelamente a sè stessa nel piano (x,y), gli angoli che farà coi piani (x,z), (z,y) si manterranno li stessi. Ma gli angoli che fa pq con questi assi sono gli stessi che quelli che la sua projezione Ap' fa con gli assi medesimi, e $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ sono i coseni degli angoli che fa Ap' con gli assi delle x e y.

(Fig. 117)

e però, le componenti della forza $r\omega^2 dm$ lungo gli assi delle x e delle y, saranno $x\omega^2 dm$, $y\omega^2 dm$. e però le componenti di $r\omega^2 dm$ applicate in z saranno le stesse parallele agli assi x e y. —

La risultante adunque di tutte le componenti parallele all'asse delle x, e diretta nel piano (x,z) è data da $\omega^2 \int x dm$. Sia M la massa totale del solido, ed $,x$ il valore di x che corrisponde al centro di gravità di questa massa, e si avrà la

(124) $\omega^2 \int x dm = \omega^2 M_{,}x$. Della stessa guisa, la risultante delle forze parallele all'asse delle y e diretta nel piano (y,z) è presentata da $\omega^2 M_{,}y$. Sono dunque $,x$, $,y$ le distanze del centro di gravità della massa M dai piani (y,z) (x,z). —

Siano $z_{,}$, $z_{,,}$ le distanze delle risultanti $\omega^2 M_{,}x$, $\omega^2 M_{,}y$ dal piano (x,y), e si avranno le seguenti equazioni

(125) $M_{,}x_{,}z_{,} = \int xz dm$,

(126) $M_{,}y_{,}z_{,,} = \int yz dm$, le quali servono a determinare $z_{,}$ $z_{,,}$.

Dal che risulta, che sarà

cognita l'intensione di qualunque forza sui piani (x,z) ed (y,z) che sono tra se perpendicolari.

Se $z_1 = z_0$, le due forze $\omega^2 M x_1$, $\omega^2 M y_1$ sono applicate al medesimo punto dell'asse, e di conseguenza la loro risultante verrà presentata da $\omega^2 M \sqrt{y_1^2 + x_1^2}$ che perciò esprimerà la pressione sopportata dall'asse di rotazione in conseguenza del moto rotatorio che ha luogo intorno di lui.

§.614. Poniamo che Az sia uno degli assi principali di M i quali si tagliano nel centro di essa essendo a la distanza del centro di gravità dall'origine A. Nel presente caso $x_1 = 0$, $y_1 = 0$.

Trasportata l'origine da A in G si dovrà porre $z-a$, a vece di z, e però avremo le 2. equazioni

(127) $\int x(z-a)dm = \int xz\,dm - a\int x\,dm = 0,$

(128) $\int y(z-a)dm = \int yz\,dm - a\int y\,dm = 0$

Ma si ha

$\int x\,dm = M x_1 = 0$, perchè $x_1 = 0$;

così,

$\int y\,dm = M y_1 = 0$, poichè $y_1 = 0$.

A verificare le (127) e (128) si debbe avere $\int x\,dm = 0$, $\int y\,dm = 0$.

Si dovrà dunque conchiudere che la risultante $\omega^2 M x_1$, delle forze nel piano (x,z), e la somma $\omega^2 \int xz\,dm$ sono nulle, e perciò siffatte forze si equilibrano e però cosiffatte forze si fanno equilibrio dipendentemente dall'asse fisso. Per analoga ragione si fanno equilibrio le componenti nel piano (y,z). Nelle fatte supposizioni le forze centrifughe del solido non eserciteranno pressione contro l'asse di rotazione, di maniera che se esso asse cessasse di essere fisso il moto continuerebbe come prima.

§. 615. Se l'asse principale Az non passi pel centro di gravità della massa M, allora non sarà più $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, ma però si avrà $\int xz\,dm = 0$, $\int yz\,dm = 0$, dal che conseguita, essere z_1 e z_2 ciascuno $= 0$, dipendentemente dalle equazioni (125) e (126), e l'asse di rotazione sopportare una pressione $= \omega^2 M \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, applicato ad A. Nel qual caso basterà che questo punto sia fisso finchè rimanga distrutta la pressione, di maniera che, se figurisi che Az cessi di essere interamente fisso, ma ruoti intorno ad

A il moto non sarà cambiato, e il solido seguiterà a ruotare intorno all'asse come se fosse fisso; per la qualcosa esistono sempre tre assi in un corpo intorno ai quali il corpo può liberamente ruotare, come se fossero immobili e senza che si distacchino.

Se ~~pe~~ l'asse ~~non~~ che passa per A è un'asse principale, esso sopporterà una pressione, la direzione della quale non passerà per A, e quindi se l'asse fosse in libertà di ruotare intorno ad A fisso, la pressione non sarebbe distrutta, e di conseguenza questa forza farebbe cambiare di posizione l'asse di rotazione.

Quando un solido trattenuto da un punto fisso vien posto in moto dall'urto di un'altro corpo o in qualsiasi altra maniera, basterà che cominci a ruotare intorno ad un'asse che si taglia in quel punto affinchè il suo moto continui come se l'asse fosse fisso. All'uopo sarà dunque sufficiente che la percossa sopportata dall'asse di rotazione all'origine del moto, si riduca ad una

perpendicolare all'asse che
passi pel punto fisso. —

Capitolo XLVIII

Del moto vario di un corpo solido intorno ad un asse fisso, e delle oscillazioni del pendolo composto

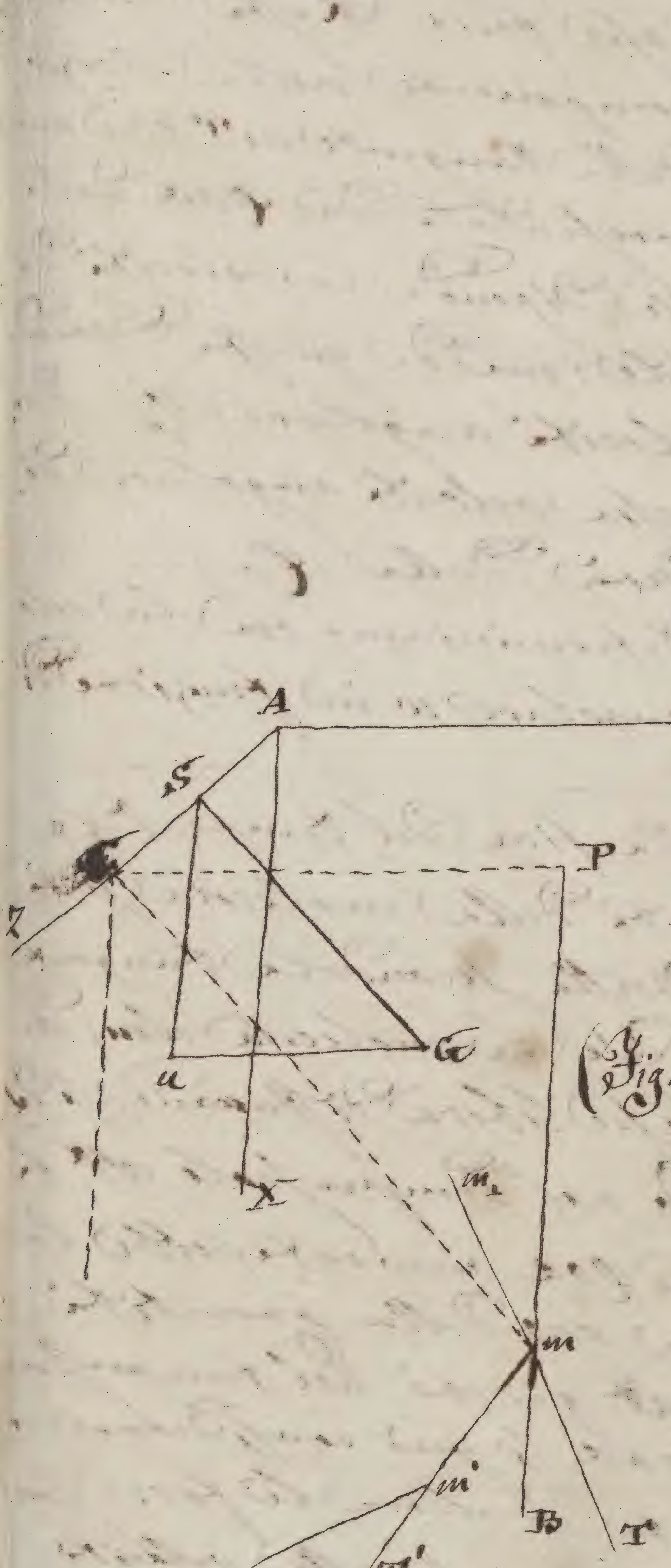
§. 616. Poniamo ora che tutti i punti del corpo siano sollecitati da forze continue costanti. —

Sia dm una molecola della massa, ed r la sua distanza dall'asse fisso, ovveramente il raggio del circolo che essa descrive, e che è situato in un piano perpend.^re all'asse di rotazione —

Figuriamo che al circolo sia surrogato un poligono infinitilatero (fig. 118), e siano $m_1 m$, ed $m m'$ due latercoli consecutivi. I loro prolungamenti mT, $m'T'$ siano nel senso del moto del solido, che saranno due tangenti.

Prendiamo in considerazione la molecola dm nel punto che raggiunge il punto m della sua trajettoria. —

Sia Q l'intensione della forza continua che su essa agisce in questo istante; e l'angolo acuto ovveram.^e ottuso che la direzione Q fa con mT. ω la velocità angolare, t il tempo passato dal principio del moto fino all'istante che si osserva. —



(Fig. 118.)

Se si scomponga la Q in tre forze, l'una parallela all'asse fisso, l'altra secondo il raggio r e la terza secondo mT; le due prime componenti verranno distrutte dall'asse fisso e però non contribuiranno al moto, e quindi se ne potrà prescindere volendo esaminare solo il moto, e se ne terrà solamente conto per la pressione sull'asse fisso. Resta dunque la componente nella direzione della tangente mT che verrà presentata da Qoa dalla quale dipende la velocità del mobile: ma da questa dipende la velocità angolare $\left(\frac{v}{r}\right)$ dunque essa velocità angolare dipenderà dalla Q.

§.617. Determiniamo ora la velocità angolare ω in funzione di Q.

Alla fine del tempo t la velocità della molecola sarà $r\omega$ diretta secondo la tangente mT. Se la molecola dm, diventasse libera distaccandosi dal solido nel tempuscolo dt, la forza Qoa aumenterebbe la forza $r\omega$ della quantità $Qoa\,dt$ perchè nel tempuscolo dt, Qoa si può considerare costante, e allora le forze sono proporzionali alle velocità.

Onde, alla fine del tempo $t+dt$, la velocità della molecola verrà presentata da $r\omega + q\sigma\alpha dt$ che sarà tuttora nella direzione MT. Se la molecola continui a far parte del corpo, alla fine del tempo $t+dt$ sarebbe $\omega + d\omega$, e diretta secondo la tangente $m'T'$.

In virtù adunque del principio di d'Alembert vi avrà equilibrio nel sistema se s'imprimeranno a ciascuna molecola due velocità le quali rispetto a ciascuna dm, sieno ~~$r\omega dm + q\sigma\alpha dt$~~ e $r(\omega + d\omega)$

$r\omega + q\sigma\alpha dt$ la prima diretta secondo $m'T'$ e nel senso del moto del corpo; la seconda diretta secondo $m'T'$ in senso contrario del moto stesso. Moltiplicate per le loro masse si avranno le due quantità che si dovranno fare equilibrio, e moltiplicate per la distanza di dm dall'asse fisso, avremo i momenti di tali forze che entrano nell'equazione d'equilibrio intorno all'asse fisso.

I quali momenti saranno
$r^2\omega dm + r q\sigma\alpha dt\, dm$,
$r^2(\omega + d\omega) dm$.

L'equazione poi dell'equilibrio

si forma eguagliando la somma dei momenti delle forze le quali tendono a far ruotare i loro punti ~~il punto~~ d'applicazione nel senso del moto del solido, alla somma dei momenti delle forze che tendono a farlo ruotare in senso opposto. La prima somma è data da

$\int r^2 \omega dm + rQ\alpha dt dm$ la 2.a da

$\int r^2 (\omega + d\omega) dm$ per la qual cosa l'equazione d'equilibrio sarà

(1.) $\int r^2 \omega dm + dt \int rQ\alpha dm =$

$\int r^2 \omega dm + d\omega \int r^2 dm$, ovvero

(2.) $dt \int rQ\alpha dm = d\omega \int r^2 dm$, la quale si acconcia a determinare ω in funzione del tempo, quando Q ed α sono dati per tutti i punti del corpo.

§. 618. Per fare un'applicazione prendiamo il caso particolare in cui ciascuna molecola del solido sia sollecitata dalla sola gravità.

Siano (x, y, z) le coord.e ortogonali di dm relative agli assi AX, AY, AZ, essendo AZ di rotazione orizzontale come pure Y, essendo quello delle x, verticale dall'alto al basso.

In tal caso sarà $q = g$, e quando l'elemento dm si troverà in m si avrà ~~...~~ $\alpha = BmT$. Da m si conduca la perpendicolare mG all'asse orizzontale AZ, e dal triangolo rettangolo mGP si avrà

$mG : GP :: 1 : \cos GmP$; ma $mG = r$, $GP = y$

$r : y :: 1 : \cos GmP$; ma Gm è perpendic.a MT onde, (a)

$GmP = 90^\circ - Pmm_1 = 90^\circ - BmT$, e però

$\cos GmP = \cos BmT = \cos\alpha$.

Dunque $r : y :: 1 : \cos\alpha$, d'onde la

(3) $y = r\cos\alpha$, per cui si ha la

(4) $\int rq\cos\alpha\, dm = g\int y\, dm$. Ma presentato per M la massa del corpo, e per y_1 la distanza del suo centro di gravità dal piano verticale (x, z) si ha

(5) $\int y\, dm = My_1$, e però

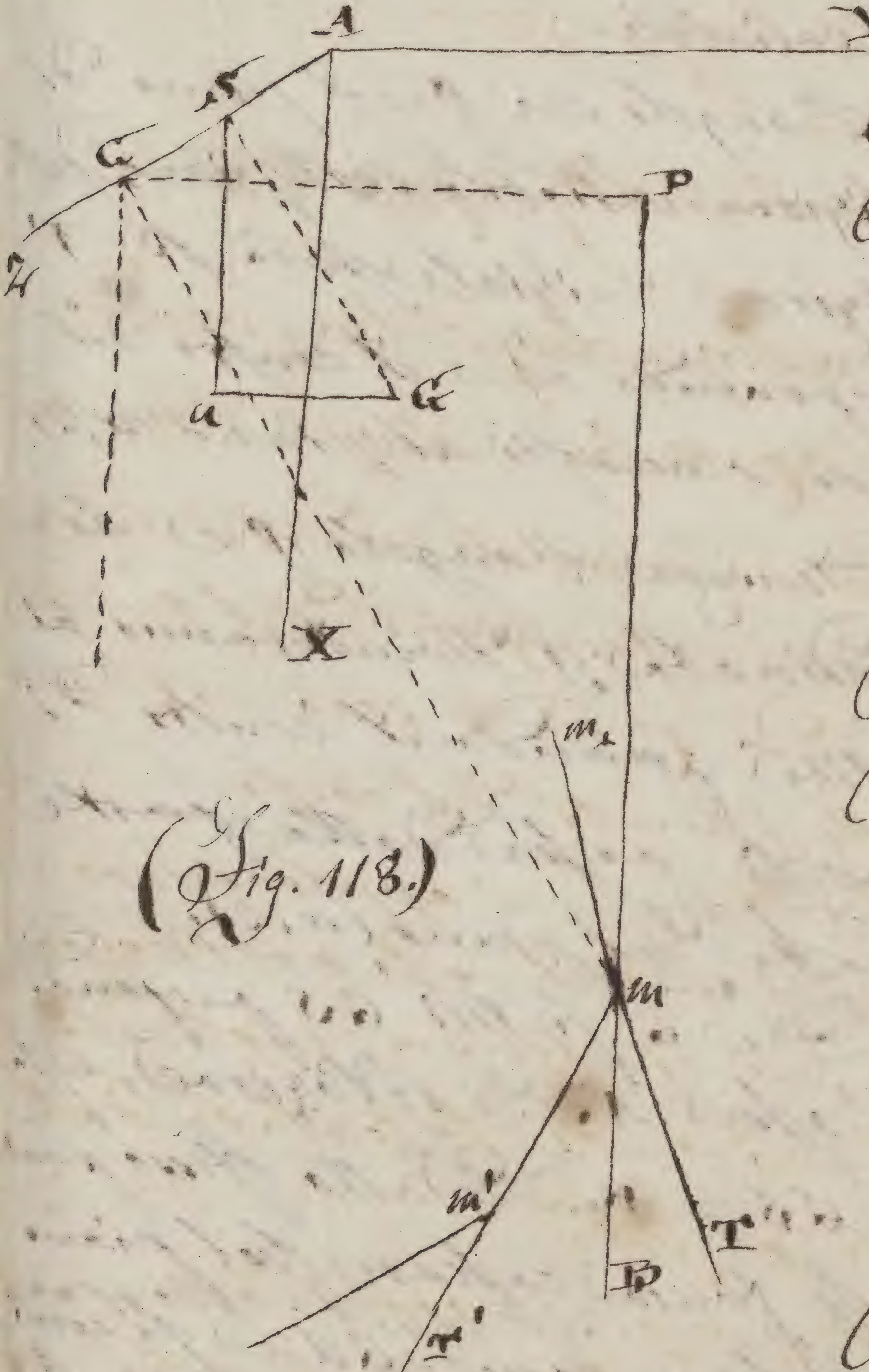
(6) $\int rq\cos\alpha\, dm = gMy_1$. Sia K il momento d'inerzia di M relativo ad un'asse che passa pel centro di gravità di lui e parallello ad AZ e sia K' il momento rispetto ad AX, e per il § 601. si avrà

(7) $K' = \int r^2 dm = K + R^2 M$: pongasi $\frac{K}{M} = k$, e sarà $K = Mk$, e però

(8) $\int r^2 dm = M(k + R^2)$, sostituiti nella (2) i valori di r, $\int rq\cos\alpha\, dm$ e $dt\int r^2 dm$ si ottiene

$gMy_1 dt = M(k^2 + R^2)dw$, ossia la

(a) perchè mT è tangente il circolo in m



(Fig. 118.)

Lezione 10.

$(9)\quad g y_1 dt - (K+\mathrm{M}^2)d\omega = 0.$

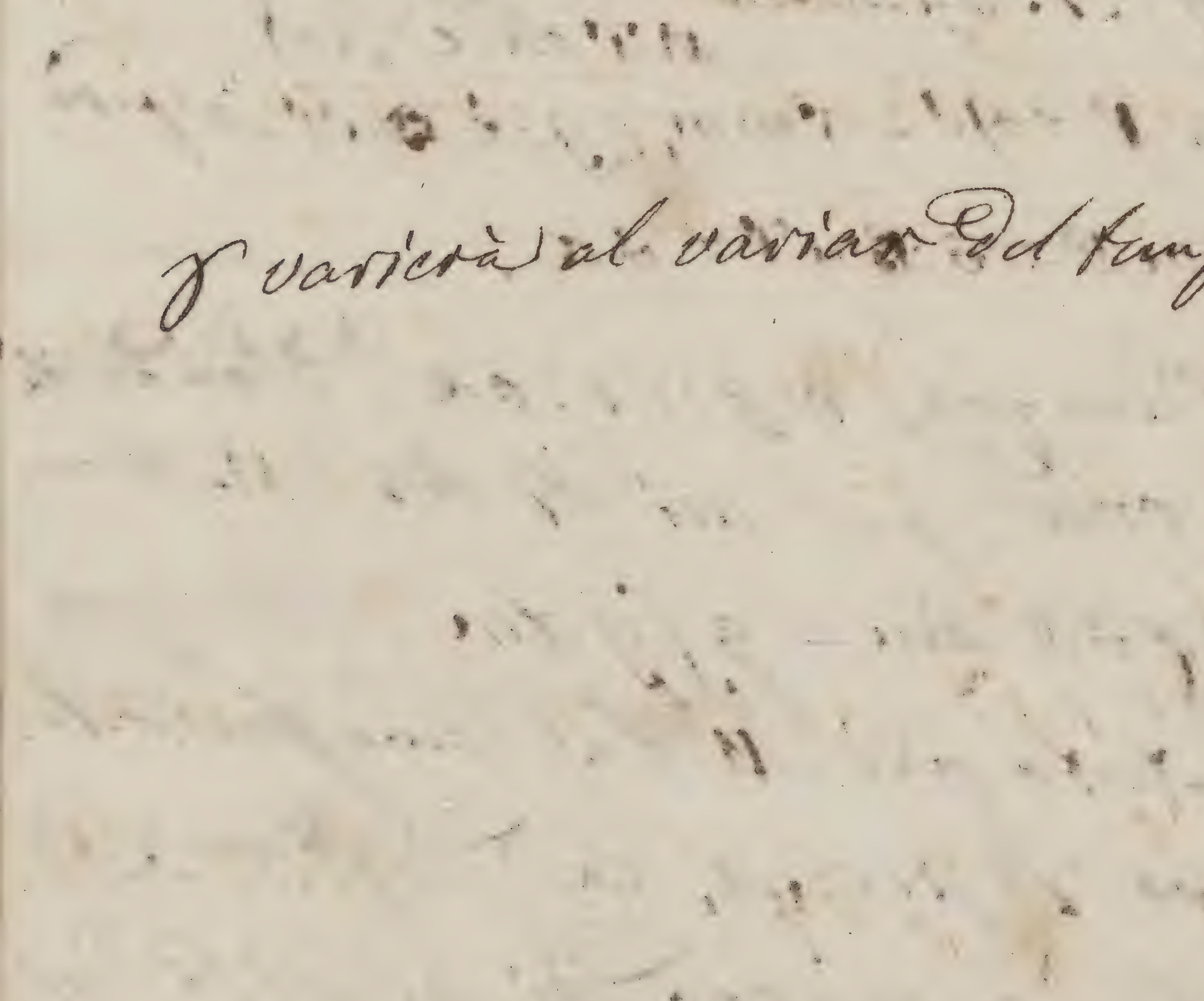
Sia G il centro di gravità della massa M, e figurato un piano che passi per G e per l'asse di rotazione, questo piano varierà di posizione al variare del centro di gravità. Al principio del moto questo piano faccia un angolo β col piano (x,z), e faccia con (x,z) un angolo γ in un istante qualunque. Dunque β è costante, γ è variabile.

β costante.

γ varierà al variar del tempo

L'angolo che fa il piano di posizione variabile, col piano della posizione iniziale sarà $\beta-\gamma$, supponendo che il centro del corpo s'accosti al piano (x,z).

Dunque, l'angolo γ e la coordinata y diventeranno negative quando il centro di gravità passa dalla parte opposta del piano (x,z).



Da G si tiri GS perpend.e all'asse Az di rotazione, e sarà GS = R. Dallo stesso punto G si faccia cascare sul piano (x,z) la perpend.e GU e si unisca la SU. Avremo GSU = γ. Dal △. rettangolo SUG otteniamo GU = GS sen GSU, ovvero

GSU misura l'inclinaz.e dei due piani

$(10)\quad y_1 = R \operatorname{sen}\gamma$, che sussiste ancora se G cade dall'altra parte del piano verticale.

L'arco descritto dal punto G doppoi l'origine del moto sarà (riferito al raggio R), $R(p-y)$: la velocità v in questo istante eguaglia il differenziale di tal arco diviso pel differenziale del tempo.

L'arco è $R(p-y)$ ove p è costante, e però si avrà

(11) $w=-\frac{dy}{dt}$: perchè la velocità angolare eguaglia $\frac{v}{R}$ §. 586; e di conseguenza avremo la

(12.) $dw=-\frac{d^2y}{dt}$, poichè t è variabile indipendente. Onde, la (9) si muterà nella

(9) $gy_1 dt\,(K+R^2)\,dw=0$

$gR\theta y dt + (K+R^2)\frac{d^2y}{dt}=0$, ovvero la

(13.) $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{gR}{K+R^2}\theta y=0$: moltiplicandola per $2dy$ si avrà

$\frac{2dy\,d^2y}{dt^2}+\frac{2gR}{K+R^2}\theta y dy=0$. —

Integrando questa equazione, avremo la

(14) $\frac{dy^2}{dt^2} = \frac{2gR}{K+R^2}\theta y + C$, ~~C~~ ——

A determinare la costante C, sia w_1 la velocità angolare in cui comincia a considerarsi il moto, ed allora converrà che sia

$w_1=-\frac{dy}{dt}$, e che sia $y=p$ nel principio: avremo dunque la

(15) $w_1^2=\frac{2gR}{K+R^2}\theta p + C$, e quindi

$a = \omega_1^2 - \frac{2gR}{k+R^2}\theta\beta$, dal che nasce l'integrale determinato

(16) $\frac{d\gamma^2}{dt^2} = \frac{2gR}{k+R^2}(\theta\gamma - \theta\beta) + \omega_1^2$. —

Risolvendo quest'equazione rispetto a dt e poscia integrata, si avrà t in funzione di γ, e reciprocamente γ in funzione di t.

Ad ogni istante adunque si conoscerà la posizione del piano che passa per l'asse di rotazione e pel centro di gravità del solido, la qual cosa ci da la posizione del solido. —

Si ha $\omega = \frac{d\gamma}{dt}$, e però conosciuto γ in funzione di t, mediante l'integrale della equazione antecedente; avremo dall'equazione medesima la velocità angolare ω che corrisponde a ciascun istante del moto.

§. 619. Figuriamo che il solido si riduca ad un punto materiale pesante attaccato all'asse fisso AZ. che abbiamo chiamato asse di rotazione (e che rispetto al pendolo si dica asse di sospensione) col mezzo di una retta inflessibile non soggetta all'azione della gravità, e della lunghezza l, si avrà

$l = R$. —

Egli è patente che sarà zero il momento d'inerzia relativo all'asse che passa pel centro di gravità della massa e che è parallelo ad AZ e però $K'=0$, e di conseguenza $K=0$; laonde $K+K''=l^2$. In questo caso adunque si ha che la (16) diventerà la

(17) $\frac{dy^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}(\theta\gamma - \theta\beta) + \omega_1^2$; che risolta rispetto alla t dà luogo alla

(18) $dt = \frac{\sqrt{l}.dy}{\sqrt{2g(\theta\gamma-\theta\beta)+l\omega_1^2}}$.

Ma detta v la velocità del centro di gravità nell'istante che si considera si ha

$\omega = \frac{v}{l}$, e però nel punto ove si comincia a considerare il moto si avrà $\mp\omega_1 = \frac{v_1}{l}$. —

Se h sia l'altezza dovuta alla velocità v_1, si avrà $v_1 = \sqrt{2gh}$, e però $\omega_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{l}$, sostituito questo valore nella (18) si avrà

(19) $dt = \frac{l\,dy}{\sqrt{2g(h+l\theta\gamma-l\theta\beta)}}$, nella quale posto $l=a$, si ha la (7) del §. 521. salvo la diversità di segni derivante dal considerare il moto in senso contrario. —

Da quest'equazione si vede che il moto del punto materiale che consideriamo è lo stesso di quello del corpo solido del

S. precedente ogniqualvolta sia $\frac{2g}{l} = \frac{2gR}{k+R^2}$, d'onde la

(21) $l = \frac{k+R^2}{R}$. Mediante la quale equazione si calcola la lunghezza del pendolo semplice che corrisponde al composto come si è asserito nel citato S. di fare.

All'uopo è mestieri, determinare o coll'esperienza o col calcolo la massa del pendolo composto, e la distanza del suo centro di gravità dall'asse di sospensione, che è R, e $k = \frac{N}{M}$ che è il momento d'inerzia del corpo relativo ad un'asse che passa pel centro di gravità del corpo divisa per la massa di esso; quindi sarà aguito l, cioè la lunghezza del pendolo semplice che fa le oscillazioni in egual tempo del pendolo composto.

La velocità iniziale del pendolo semplice è $l\omega_0$, e β è l'angolo che misura l'allontanamento di lui dalla verticale. Queste due quantità essendo date agevole riesce il conoscere se esso debba fare delle rivoluzioni o delle oscillazioni attorno al punto di sospensione.

Il pendolo composto adunque ruoterà attorno al punto di sospensione, od oscillerà da una parte e dall'altra come il pendolo semplice.

La durata delle rivoluzioni ed oscillazioni saranno eguali per i due pendoli. Se ad es. la velocità iniziale e l'allontanamento dalla verticale sono piccolissime le oscillazioni saranno isocrone, e la loro durata sarà

$\pi\sqrt{\frac{k+R^2}{gR^m}}$ = per la (21)

§. 620. Ponendo mente che la velocità angolare $\omega = \frac{dy}{dt}$ dei punti di un corpo di figura qualunque che oscilla intorno ad un'asse orizzontale è data dalla

$$\frac{dy^2}{dt^2} = \frac{2gR}{k+R^2}(\cos y - \cos\beta) + \omega_1^2.$$

E se il punto è isolato, questa velocità è data dalla

$\omega = \frac{dy^2}{dt^2} = (a)$ Onde, i diversi punti materiali i quali formano la massa del corpo hanno delle velocità differenti da quelle che avrebbero, se ciascuno si movesse isolatamente, cioè senza legame cogli altri punti sospeso all'asse di rotaz.e Onde il legame che hanno tra se i punti materiali componenti la massa del corpo li costringe ad una mutua azione che altera le loro velocità che se fossero isolati, le quali per alcuni sono più grandi e per altri più piccoli di quelle che avrebbero se fossero liberi attaccati con fili all'asse Z

(a) $= \frac{2g}{l}(\cos y - \cos\beta) + \omega_1^2$

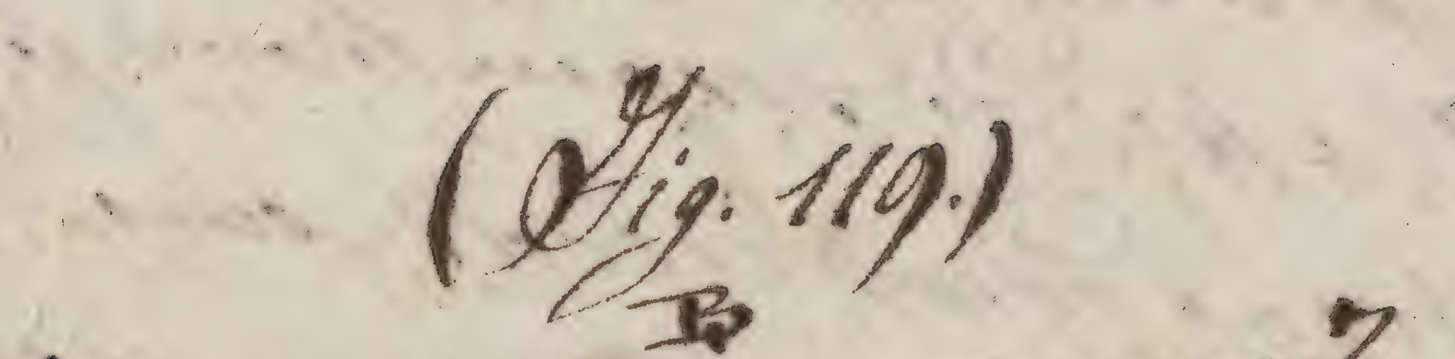
ciascuna fa oscillazioni uguali da una parte e dall'altra dalla posizione d'equilibrio, cioè quando il centro di gravità di lui si trova sul piano verticale che passa per l'asse fisso.
Quindi i punti che appartengono alla sezione del corpo fatta da un piano pell'asse di rotazione e pel centro di gravità del corpo, e che sono situati rispetto all'asse dalla stessa parte del centro di gravità, sono i soli che oscillano da una parte e dall'altra come se fossero isolati.
Ma la durata delle loro oscillazioni essendo la stessa che quella di un pendolo semplice della lunghezza $\frac{K+R^2}{K}$, ne conseguita che quelli fra i punti situati nel piano che passa pel centro di gravità del corpo e pell'asse di rotaz. i quali sono situati alla distanza l da quest'asse sono i soli che facciano le oscillazioni nello stesso tempo che se fossero isolati. E perciò tutti i punti situati su una retta parallela all'asse di sospensione e condotta alla distanza l, i quali giacciono sul piano del centro di gravità e dell'asse di sospensione,

sono i soli che fanno le stesse oscillazioni, come se fossero attaccati da se con fili della lunghezza $= l$ e senza gravità. Così fatti punti diconsi <u>centri</u> <u>di</u> <u>oscillazione</u>.

3° Se l'asse di rotazione passi pel centro di gravità del corpo, si avrà $R = 0$, e il tempo della durata delle oscillazioni che si è trovato essere $\pi\sqrt{\frac{K+R^2}{gR}}$, sarà $= \infty$, il che esser debbe. Poichè essendo la gravità distrutta dall'asse di sospensione, l'impulso comunica al corpo un moto di rotazione senza fine, e però non hanno luogo le oscillazioni.

§. 621. Poniamo che la retta su cui giaciono i centri di oscillazione diventi asse di sospensione.

(Fig. 119.)



Sia AZ fig. (119) l'asse di sospensione; G il centro di gravità del solido ed $A'Z'$ la retta dei punti di oscillazione e B il punto di sospensione. Esso si trasporti da B in C e sia $CG = R'$ e $BC = l$, onde $R' + R = l$; ma si ha $l = \frac{K+R^2}{R}$, dunque

(22) $R' = \frac{K+R^2}{R} - R = \frac{K}{R}$.

Posto che sia $A'Z'$ l'asse di sospensione, debbe aver luogo un'equazione simile alla (21) $l = \frac{K+R'^2}{R'}$, da cui deducesi

$\frac{K}{R'} + R' = \frac{K}{\frac{K}{R}} + \frac{K}{R} = R + \frac{K}{R} = \frac{K+R^2}{R} = l$

Dal che mostrasi che l'asse di rotazione è divenuta la retta su cui stanno i centri di rotazione. Onde esse due rette sono reciproche l'una dell'altra.

§. 622. Il valore di l dato dalla (21) per un dato corpo non dipende che da R; come pure la durata delle oscillazioni, e di conseguenza i tempi delle oscillazioni per un dato corpo sono i medesimi presso ad uguali distanze dal centro di gravità e di vero la R non cambia ed l è la lunghezza del pendolo semplice isocrono al composto.

§. 623. Quindi agevolmente si conclude che se nel piano condotto pel centro di gravità della massa del solido e perpendicolare all'asse di sospensione, si descrivano due circoli, uno dei quali abbia R per raggio che è la distanza del centro di gravità del solido dall'asse di sospensione, e l'altro abbia per raggio R' distanza del centro di gravità dal centro di oscillazione, il 1.° sarà base di un cilindro la cui generatrice in ogni posizione di lei è asse di sospensione, per cui è asse di sospensione ciò è asse sincrono.

L'altro circolo è il luogo geometrico dei corrispondenti centri di oscillazione. E questo

il teorema di Ugenio. Inoltre per la determinate reciprocità dell' asse di sospensione e di oscillazione il 2° circolo sarà base di un cilindro di cui la generatrice è asse sincrono.

§. 624. Se le oscillazioni sono piccolissime il tempo delle loro oscillazioni è indipend.e dall'ampiezza di §. 524. cioè dalla lunghezza del pendolo che può essere qualunque. Ma h che è la distanza dell'asse di sospensione dal centro di gravità restando la medesima, la lungh. del pendolo semplice isocrono al composto non muta; e la durata delle oscillazioni è la stessa. Dunque le oscillazioni del pendolo composto sono isocrone per tutti i punti di sospensione presi ad eguale distanza dal centro di gravità qualunque sia la l.

Lezione 11.

§. 625. Al §. 623. si è trovato l=l'. Dal che conchiudere si debbe che le oscillazioni piccolissime del solido sono della medesima durata, sia che l'asse di oscillazione o di rotazione si prenda per asse di sospensione orizzontale. Queste rette però non sono le sole che godono di una tale proprietà, avvegnacchè trovare si può un n.° indeterminabile di assi differenti

intorno ai quali le oscillazioni piccolissime si facciano nel medesimo tempo. I valori di l saranno gli stessi per tutti gli assi paralleli tra loro, ed equidistanti dall' asse di sospensione poichè per tutti questi assi k ed r non variano. Si può altresì cambiare la direzione di questi assi senza che cambj il valore di l.

Infatti siano $\alpha, \alpha', \alpha''$ gli angoli che la retta parallela all' asse di sospensione protratta pel centro di gravità fa coi tre assi protratti per questi punti e siano A, B, C i momenti principali d'inerzia relativi a questi assi. Il momento d'inerzia del corpo relativo a questa parallela è Mk. Si avrà dunque

$$(23)\quad Mk = A\theta^2\alpha + B\theta^2\alpha' + C\theta^2\alpha'' \quad \text{S. 600.}$$

Ma si ha $l = \frac{r^2+k}{r}$, dunque

$$(24)\quad k = rl - r^2,$$ per cui la (23) si muta nella

$$(25)\quad Mrl - Mr^2 = A\theta^2\alpha + B\theta^2\alpha' + C\theta^2\alpha'';$$

d'onde derivasi la

$$(26)\quad l = \frac{Mr^2 + A\theta^2\alpha + B\theta^2\alpha' + C\theta^2\alpha''}{Mr}.$$

Dalla quale si vede che dare si possono ad $\alpha, \alpha', \alpha''$ de' valori differenti pei quali il valore di l rimanga sempre il medesimo ricordando la relazione fra gli angoli data

$$(27)\quad \theta^2\alpha + \theta^2\alpha' + \theta^2\alpha'' = 1.$$

§. 626. Dipendentemente dalla (27) si ha

(28) $\theta^2\alpha = 1 - \theta^2\alpha' - \theta^2\alpha''$; quindi la (26) diventa la

(29) $l = R + \dfrac{A + (B-A)\theta^2\alpha' + (C-A)\theta^2\alpha''}{MR}$.

(regole Mass. min.) Perchè l sia minima, posta la (27) le derivate del 2° membro della (29) prese rispetto ad R, α', α'' debbono esser nulle: si avranno quindi le tre seguenti equazioni

(30) $M^2R^2 - AM - M(B-A)\theta^2\alpha' - M(C-A)\theta^2\alpha'' = 0$,

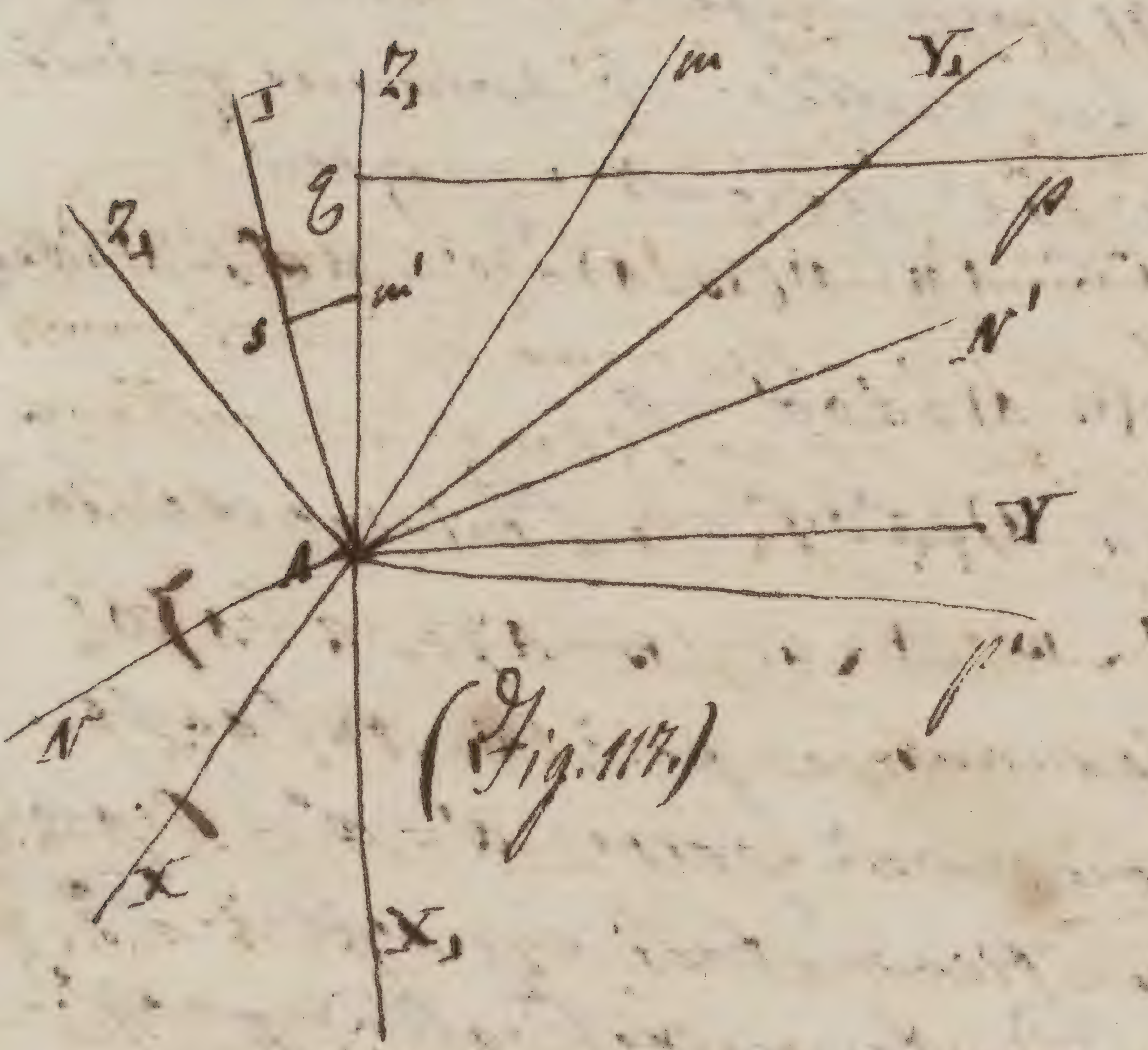
(31) $2(B-A)\theta\alpha'\theta\alpha' = 0$,

(32) $2(C-A)\theta\alpha''\theta\alpha'' = 0$. Poniamo che sia $A < B$; $A < C$, $B - A > 0$, $C - A > 0$ saranno, e però in tal caso, converrà porre $\alpha' = \alpha'' = 0$ per verificare tali equazioni. Dipendentemente dalla equaz.e di relaz.e dei coseni esser debbe $\alpha = 0$. Laonde dalla (30) avremo $M^2R^2 - AM = 0$, d'onde la

(33) $R = \sqrt{\dfrac{A}{M}}$, e questo è il valore di R che corrisponde al minimo di l. Dal che consegue, che gli assi di sospensione rispetto ai quali le piccole oscillazioni sono le più precoci son paralleli ad uno dei tre assi principali che s'intersecano nel centro di gravità e che sono ad una distanza da siffatto asse principale che viene misurata ~~dalla~~ $\sqrt{\frac{A}{M}}$ ~~distanza~~ ~~[illegible]~~.

Capitolo XLVIII.

Del moto di un solido intorno ad un punto fisso.



(Fig. 117.)

§. 627. Prendiamo primieramente in considerazione il moto di rotazione di un solido intorno ad un punto fisso considerato in se stesso indipendentemente dalle forze (fig. 117) Sia A il punto fisso, e AX, AY, AZ tre assi coordinati ortogonali e d'immutabile posizione, ed AX_1, AY_1, AZ_1 altri tre assi coordinati ortogonali fissi nel corpo e che si muovono con lui intorno ad A. In seguito considereremo gli assi AX_1, AY_1, AZ_1, i tre assi principali del corpo. Siano (x, y, z) le coordinate riferite ai tre primi assi di un punto del corpo, ed x_1, y_1, z_1 le coordinate del med.° punto riferite ai secondi assi, e ricordando le relazioni che hanno le coord.e di un sistema con quelle di un altro ed osservando che qui non si cambia l'origine, avremo le tre equazioni

(1) $x = c\,\widehat{XX_1}.x_1 + c\,\widehat{XY_1}.y_1 + c.\widehat{XZ_1}.z_1$,

(2) $y = c\,\widehat{YX_1}.x_1 + c\,\widehat{YY_1}.y_1 + c.\widehat{YZ_1}.z_1$,

(3) $z = c\,\widehat{ZX_1}.x_1 + c.\widehat{ZY_1}.y_1 + c.\widehat{ZZ_1}.z_1$,

per semplicità poniamo

$\theta X\hat{}X_1 = a$, $\theta X\hat{}Y_1 = b$, $\theta X\hat{}Z_1 = c$,
$\theta Y\hat{}X = a'$, $\theta Y\hat{}Y_1 = b'$, $\theta Y\hat{}Z_1 = c'$
$\theta Z\hat{}X = a''$, $\theta Z\hat{}Y_1 = b''$ $\theta Z\hat{}Z_1 = c''$, e le
(1) (2) e (3) si muteranno nelle

(4) $x = ax_1 + by_1 + cz_1$,

(5) $y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1$,

(6) $z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1$.

Egli è evidente, che movendosi il solido, ciascuno de' suoi punti muta di posizione rispetto agli assi AY, AX, AZ fissi, ma non cambia posizione rispetto agli assi ortogonali AX_1 AY_1 AZ_1 perchè sono fissi nel corpo. Saranno dunque x, y, z, e però a, b, c a', b', c', a'', b'', c'' funzioni del tempo. Ma x_1, y_1, z_1 rimarranno invariate al mutare del tempo stesso, e solo cambieranno se si cambj il punto $(x_1\ y_1\ z_1)$. Prendendo dunque le derivate rispetto a t delle (4) (6) e (6) si dovranno considerare x_1, y_1, z_1 costanti e si avrà

(7) $\frac{dx}{dt} = x_1\frac{da}{dt} + y_1\frac{db}{dt} + z_1\frac{dc}{dt}$,

(8) $\frac{dy}{dt} = x_1\frac{da'}{dt} + y_1\frac{db'}{dt} + z_1\frac{dc'}{dt}$,

(9) $\frac{dz}{dt} = x_1\frac{da''}{dt} + y_1\frac{db''}{dt} + z_1\frac{dc''}{dt}$.

Osserviamo che $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ esprimono davanti in un istante qualunque le componenti parallele agli assi x, y, z della

ordinata del punto corrispondente alle coord.e $x_1\ y_1\ z_1$. Se vogliono si conoscere i punti del corpo nei quali la velocità è nulla, si avrà la

(10) $x_1\dfrac{da}{dt}+y_1\dfrac{db}{dt}+z_1\dfrac{dc}{dt}=0$

(11) $x_1\dfrac{da'}{dt}+y_1\dfrac{db'}{dt}+z_1\dfrac{dc'}{dt}=0.$

(12) $x_1\dfrac{da''}{dt}+y_1\dfrac{db''}{dt}+z_1\dfrac{dc''}{dt}=0.$ —

Moltiplicate le (10) (11) (12) rispett.te per c, c', c'' la somma dei prodotti sarà data dalla

(13.) $x_1(cda+c'da'+c''da'')+$ ---
$y_1(cdb+c'db'+c''db'')+$ --
$z_1(cdc+c'dc'+c''dc'')=0.$

Ma si ha $c^2+c'^2+c''^2=1$, onde prendendola derivata si ha

(14) $cdc+c'dc'+c''dc''=0$, per cui la (13) si muta nella

(15) $x_1(cda+c'da'+c''da'')+$
$y_1(cdb+c'db'+c''db'')=0.$

Poniamo per semplicità la

(16) $cda+c'da'+c''da''=-qdt$

(17) $cdb+c'db'+c''db''=pdt$, ed avremo la

(18) $py_1-qx_1=0.$ Moltiplicate le (10) (11) e (12) rispett.te per b, b', b'', la somma de' prodotti è

(19) $x_1(bda+b'da'+b''da'')+y_1(bdb+b'db'+b''db'')+z_1(bdc+b'dc'+b''dc'')$
$=0.$ —

Ma $b^2+b'^2+b''^2=1$, dunque prendendo il differenziale di questa equazione avremo

(20) $bdb+b'db'+b''db''=0$, per cui la (19) verrà a ridursi alla

(21) $x_1(bda+b'da'+b''da'')+$ ———

$z_1(bdc+b'dc'+b''dc'')=0.$

Essendo poi gli assi delle x e delle y scambievolmente perpendicolari, avremo la

(22) $bc+b'c'+b''c''=0$, quindi

$bdc+b'dc'+b''dc''=-pdt.$ ——

Poniamo per brevità la

(23) $bda+b'da'+b''da''=vdt$, e la (20) verrà surrogata dalla

(24) $vx_1-pz_1=0.$ Moltiplicando per a, a', a'' le (10)(11)(12) la somma de' prodotti è

(25) $x_1(ada+a'da'+a''da'')+$ ———

$y_1(adb+a'db'+a''db'')+$

$z_1(adc+a'dc'+a''dc'')=0.$ Ma $a^2+a'^2+a''^2=1$. e per essere gli assi delle x e delle z fra se perpendicolari come pure gli assi delle x e delle y, si ha

(26) $ab+a'b'+a''b''=0$,

(27) $ac+a'c'+a''c''=0$. Dunque avremo

(28) $ada+a'da'+a''da''=0$,

(29) $adb+a'db'+a''db''=-(bda+b'da'+b''da'')=vdt$, e

(30) $adc+a'dc'+a''dc''=-(cda+c'da'+c''da'')=qdt$; per cui la (25) mutasi nella

(31) $qz_1 - ry_1 = 0$. Come si può verificare due delle (22) (26) (31) originano la terza. ——

Queste equazioni rappresentano le projezioni di una retta che passa per l'origine sui piani $(x_1\, y_1)$ (x_1, z_1) (y_1, z_1) che hanno delle coord.^e ~~(x, y, z)~~ (x, x_1, y, y_1, z, z_1). ——

Quindi dobbiamo concludere che i punti del solido ~~...~~ dei quali la velocità è nulla sono collocati su di una retta che passa per l'origine e che può considerarsi per un tempuscolo indeterminatamente piccolo fissa, per cui in tale istante il solido ruota intorno ad essa come intorno ad un asse fisso.

Laonde considerare si debbe il moto di un corpo intorno ad un asse fisso, ~~...~~ + come avente luogo in ciascun istante (6) intorno ad un asse che resta fermo in ciascun (6) istante indeterm. piccolo.

In generale la posizione di questo asse cambiasi da un istante all'altro, il perchè nomasi asse istantaneo di rotazione. ——

§. 628. Poniamo che nella (fig 117) AI presenti l'asse istantaneo di rotazione in un istante qualunque, e siccome verrà presentato da due projezioni sugli assi coordinati possiamo che dalle (18)(26) venga presentato, dalle quali si ha

(32) $y_1 = \frac{q}{p} x_1$,

(33) $z_1 = \frac{r}{p} x_1$, e di conseguenza

per l'[illegible] espress. dell'angolo che fa una retta coll'asse AX, si ha

(34) $\cos.AI\hat{}X_1 = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$,

(35) $\cos.AI\hat{}Y_1 = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$,

(36) $\cos.AI\hat{}Z_1 = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$. —

Date adunque le quantità p, q, r si potrà determinare la posizione dell'asse istantaneo di rotazione rispetto ai tre assi mobili AX_1, AY_1, AZ_1. — Se p, q, r sieno costanti, l'asse di rotazione resterà fisso nel solido, vale a dire passerà sempre pei medesimi punti dei quali le velocità sono nulle, e i quali punti staranno immobili per tutto il tempo del moto, e di conseguenza l'asse di rotaz. sarà fisso nello spazio.

§. 629. Poichè in ciascun istante il mobile gira intorno all'asse istantaneo di rotazione come intorno ad un asse fisso, ne conseguita che la velocità angolare relativa a questo asse è la stessa per ciascun punto della massa. Per determinarne il valore, figuriamo che un punto della massa del solido si trovi sull'asse AZ_1 ad una distanza 1 dall'origine delle coord. le coord. di cosiffatto punto sono

$x_1 = 0$. $y_1 = 0$. $z_1 = 1$. —

Ma la velocità assoluta viene rappresentata dalla

(37) $v=\sqrt{\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}}$, e dalle (7)(8) e (9) si ha

(38) $\frac{dx}{dt}=\frac{dc}{dt}$,

(39) $\frac{dy}{dt}=\frac{dc'}{dt}$.

(40) $\frac{dz}{dt}=\frac{dc''}{dt}$. Dunque la velocità del punto considerato verrà rappresentata dalla

(41) $v_1=\frac{\sqrt{dc^2+dc'^2+dc''^2}}{dt}$.

Sia m' il punto considerato, ed abbassata da lui la perpendicolare m's all'asse di rotazione e posta m's = d, si avrà

(42) $d=\theta\,\mathrm{AT}^2z_1$: ma $\theta\,\mathrm{AT}^2z_1=$ — $\sqrt{1-\theta^2\mathrm{AT}^2z_1}$, dunque avremo

$\theta.\mathrm{AT}^2z_1=\sqrt{1-\frac{r^2}{p^2+q^2+r^2}}=\sqrt{\frac{p^2+q^2}{p^2+q^2+r^2}}$

Dividendo adunque la velocità assoluta v_1 per questa distanza si avrà la velocità angolare che sarà

(43) $\frac{\sqrt{dc^2+dc'^2+dc''^2}}{dt\sqrt{p^2+q^2}}\times\sqrt{p^2+q^2+r^2}$.

Ripetizione 12.
Lezione 13.

Ma $-p\,dt=b\,dc+b'dc'+b''dc''$ per la (22), e $q\,dt=a\,dc+a'dc'+a''dc''$ per la (30). Dunque, $(p^2+q^2)dt^2=b^2dc^2+2bb'.dc.dc'+2bb''.dc.dc''+b'^2dc'^2+2b'b''dc'.dc''+b''^2dc''^2+a^2dc^2+2aa'dc\,dc'+2aa''dc\,dc''+a'^2dc'^2+2a'a''dc'dc''+a''^2dc''^2=dc^2(a^2+b^2)+dc'^2(a'^2+b'^2)+dc''^2(a''^2+b''^2)+2dc.dc'(aa'+bb')+$

$2dc.dc''(aa''+bb'')+2dc'dc''(a'a''+b'b'')$: ma $a^2+b^2+c^2=1$, $a'^2+b'^2+c'^2=1$, $a''^2+b''^2+c''^2=1$; inoltre perchè gli assi sono ortogonali hanno luogo le

$aa'+bb'+cc'=0$,

$aa''+bb''+cc''=0$,

$a'a''+b'b''+c'c''=0$. Dunque

$a^2+b^2=1-c^2$,

$a'^2+b'^2=1-c'^2$,

$a''^2+b''^2=1-c''^2$,

$aa'+bb'=-cc'$,

$aa''+bb''=-cc''$,

$a'a''+b'b''=-c'c''$; e di conseguenza

(44) $(p^2+q^2)dt^2=dc^2(1-c^2)+dc'^2(1-c'^2)+dc''^2(1-c''^2)-2cc'dc.dc'-2cc''dc.dc''-2c'c''dc'dc''=dc^2+dc'^2+dc''^2-(c^2dc^2+c'^2dc'^2+c''^2dc''^2+2cc'dcdc'+2cc''dcdc''+2c'c''dc'dc'')=dc^2+dc'^2+dc''^2-(cdc+c'dc'+c''dc'')^2$: ma $c^2+c'^2+c''^2=1$, dunque prendendo il differenziale $cdc+c'dc'+c''dc''=0$, e però

(45) $(p^2+q^2)dt^2=dc^2+dc'^2+dc''^2$, onde

(46) $dt\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{dc^2+dc'^2+dc''^2}$. La velocità angolare si riduce adunque a $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ per la (43). — Si osservi, che se la posizione di AI che abbiamo supposto essere asse istantaneo di rotazione (17) conviene che gli angoli cogli assi coord.ⁱ sieno sempre i medesimi: ma per le (34) (35) e (36) perchè tali coseni sieno gli stessi conviene che p, q, r siano costanti, e però costante

la velocità angolare che è rappresentata da $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, e però porre

(47) $\sqrt{p^2+q^2+r^2} = \omega$, quindi si ha

(48) $p=\sqrt{\omega^2-(q^2+r^2)}$; e però, dati dei valori arbitrarj a q ed r starà sempre la (47) purchè diasi a p il valore dato dalla (48).

Onde è possibile che l'asse di rotazione muti di posizione senza che muti il valore della velocità angolare.

= §. 630. Non solo mediante le p, q, r determinare si può la velocità angolare del mobile e la posizione dell'asse istantaneo di lui rispetto agli assi AX_1, AY_1, AZ_1 fissi nel mobile, e mobili con lui, ma dipendentemente dalle p, q, r, si possono esprimere le forze continue scomposte secondo i prefati assi AX_1, AY_1, AZ_1, e le velocità corrispondenti, la qual cosa ci servirà a trovare in modo più diretto le equazioni del moto di rotazione.

Diffatto, le componenti parallele agli assi x, y, z fissi nello spazio sono $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, e però le componenti delle prefate velocità secondo gli assi AX, AY, AZ, sono

$\cos x\hat{}X_1 \frac{dx}{dt} + \cos Y\hat{}X \frac{dy}{dt} + \cos Z\hat{}X_1 \frac{dz}{dt} =$

$a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt}$.

$\theta X^\wedge Y_1 \frac{dx}{dt} + \theta Y^\wedge Y_1 \frac{dy}{dt} + \theta Z^\wedge Y_1 \frac{dz}{dt} =$
$b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt}$,
$\theta X^\wedge Z_1 \frac{dx}{dt} + \theta Y^\wedge Z_1 \frac{dy}{dt} + \theta Z^\wedge Z_1 \frac{dz}{dt} =$
$c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt}$; ma per le (7), (8), (9), 1.ª $a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt}$
$= a x_1 \frac{da}{dt} + a y_1 \frac{db}{dt} + a z_1 \frac{dc}{dt} + a' x_1 \frac{da'}{dt} + a' y_1 \frac{db'}{dt} + a' z_1 \frac{dc'}{dt} + a'' x_1 \frac{da''}{dt} + a'' y_1 \frac{db''}{dt} + a'' z_1 \frac{dc''}{dt} = (a\,da + a'da' + a''da'')\frac{x_1}{dt} + (a\,db + a'db' + a''db'')\frac{y_1}{dt} + (a\,dc + a'dc' + a''dc'')\frac{z_1}{dt}$: ma

$a\,da + a'da' + a''da'' = 0$,
$a\,db + a'db' + a''db'' = -r\,dt$,
$a\,dc + a'dc' + a''dc'' = q\,dt$; dunque

(49) $\frac{a\,dx}{dt} + \frac{a'dy}{dt} + \frac{a''dz}{dt} = q z_1 - r y_1$: troverebbesi similmente

(50) $b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt} = r x_1 - p z_1$,

(51) $c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} = + p y_1 - q x_1$. —

Moltiplicando le (49)(50) e (51) rispettivamente per a, b, c, la somma de' prodotti è
$(a^2+b^2+c^2)\frac{dx}{dt} + (aa'+bb'+cc')\frac{dy}{dt} + (aa''+bb''+cc'')\frac{dz}{dt} = a(q z_1 + r y_1) + b(r x_1 - p z_1) + c(p y_1 - q x_1)$: ma
$aa' + bb' + cc' = 0$,
$aa'' + bb'' + cc'' = 0$, dunque

(52) $\frac{dx}{dt} = a(q z_1 - r y_1) + b(r x_1 - p z_1) + c(p y_1 - q x_1)$; moltiplicando

le (49) (50) (51) rispettivamente per a', b', c', e dipoi per a'', b'', c'' e sommati i prodotti si avrà

(53) $\frac{dy}{dt} = a'(qz_1 - ry_1) + b'(rx_1 - pz_1) + c'(py_1 - qx_1)$,

(54) $\frac{dz}{dt} = a''(qz_1 - ry_1) + b''(rx_1 - pz_1) + c''(py_1 - qx_1)$. Prendendosi i differenziali delle (52) (53) e (54) rispetto al tempo, le coordinate x_1, y_1, z_1, di un punto del mobile, aver si debbono come costanti, avvegnacchè gli assi AX_1, AY_1, AZ_1 ai quali si riferiscono sono fissi nel corpo. Si avrà quindi

(55) $\frac{d^2x}{dt} = a(z_1 dq - y_1 dr) + b(x_1 dr - z_1 dp) + c(y_1 dp - x_1 dq) + da(qz_1 - ry_1) + db(rx_1 - pz_1) + dc(py_1 - qx_1)$,

(56) $\frac{d^2y}{dt} = a'(z_1 dq - y_1 dr) + b'(x_1 dr - z_1 dp) + c'(y_1 dp - z_1 dq) + (qz_1 - ry_1)da' + (rx_1 - pz_1)db' + (py_1 - qz_1)dc'$,

(57) $\frac{d^2z}{dt} = a''(z_1 dq - y_1 dr) + b''(x_1 dr - z_1 dp) + c''(y_1 dp - z_1 dq) + (qz_1 - ry_1)da'' + (rx_1 - pz_1)db'' + (py_1 - qz_1)dc''$. Le componenti secondo gli assi coordinati ortogonali AX, AY, AZ fissi nello spazio delle forze continue

che sollecitano il punto (x, y, z) sono $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ per il §. 467. Le componenti di queste forze parallele agli assi AX, AY, AZ, siano p_1, q_1, r_1, e si avrà

$$(58)\quad p_1 = a\frac{d^2x}{dt^2} + a'\frac{d^2y}{dt^2} + a''\frac{d^2z}{dt^2},$$

$$(59)\quad q_1 = b\frac{d^2x}{dt^2} + b'\frac{d^2y}{dt^2} + b''\frac{d^2z}{dt^2},$$

$$(60)\quad r_1 = c\frac{d^2x}{dt^2} + c'\frac{d^2y}{dt^2} + c''\frac{d^2z}{dt^2}. —$$

Se i valori di $\frac{d^2x}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt}$, dalle (55), (56), (57), si pongano nelle (58), (59), (60) moltiplicate per dt, ne verrà

$$p_1 dt = a^2(z_1dq - y_1dr) + ab(x_1dr - z_1dp) + ac(y_1dp - x_1dq) + (qz_1 - ry_1)ada + (rx_1 - pz_1)adb + (py_1 - qx_1)adc + a'^2(z_1dq - y_1dr) + a'b'(x_1dr - z_1dp) + a'c'(y_1dp - x_1dq) + (qz_1 - ry_1)a'da' + (rx_1 - pz_1)a'db' + (py_1 - qx_1)a'dc' + a''^2(z_1dq - y_1dr) + a''b''(x_1dr - z_1dp) + a''c''(y_1dp - x_1dq) + (qz_1 - ry_1)a''da'' + (rx_1 - pz_1)a''db'' + (py_1 - qx_1)a''dc'' = (a^2 + a'^2 + a''^2).(z_1dq - y_1dr) + (ab + a'b' + a''b'')(x_1dr - z_1dp) + (ac + a'c' + a''c'')(y_1dp - x_1dq) + (ada + a'da' + a''da'')(qz_1 - ry_1) + (adb + a'db' + a''db'')(rx_1 - pz_1) + (adc + a'dc' + a''dc'')(py_1 - qx_1),$$

ovvero la

$$(61)\quad p_1 dt = z_1dq - y_1dr + (py_1 - qx_1)q\,dt + (pz_1 - rx_1)r\,dt.$$

Di simil guisa troverebbesi

(62) $q_1 dt = x_1 dr - z_1 dp + (qx_1 - py_1)p$

$+ (qz_1 - ry_1)\, r\, dt,$

(63) $r_1 dt = y_1 dp - x_1 dq + (rx_1 - pz_1)p$

$+ (ry_1 - qz_1)\, q\, dt.$ Dividendo per dt le (61), (62), e (63) si avranno i valori di p_1, q_1, r_1.

---

§. 631. Considerate in un istante qualunque le quantità di moto da cui sono animati i punti del mobile si scomponga ciascuna in due, una parallela ad un piano condotto arbitrariamente per A, e l'altra perpendicolare ad esso, e dipoi si projettino sul piano le componenti a lui parallele, e che si prendano i momenti rispetto ad A di tutte queste forze projettate, si è dimostrato al §. 132, che fra tutti i piani che passano per A uno ve n'ha pel quale la somma di così fatti momenti è massima, vale a dire il piano principale. Mediante le p, q, r determinare si può la posizione di questo piano relativamente alle coord. x, y, z. Per mettersi davanti si osservi, che dipendentemente dal citato §. la posizione di tal piano rispetto a 3 piani ortogonali qualunque, dipendono da L, M, N, i cui valori dipendono dalle componenti delle forze parallele ai tre piani e dalle loro intersezioni —

Sia dm il punto (x_1, y_1, z_1) e le componenti parallele agli assi AX, AY, AZ, delle quantità di moto di dm sono rispetto $(qz_1 - ry_1)dm$, $(rx_1 - pz_1)dm$, $(py_1 - qx_1)dm$; poichè le quantità entro parentesi sono le componenti della velocità di dm. —

sarà dunque mestieri sostituire a' valori di L, M, N al §. 48. i corrispondenti trovati, cioè

$(qz_1 - ry_1)dm$, $(rx_1 - pz_1)dm$, $(py_1 - qx_1)dm$

a vece di $PdP^\wedge X$, $PdP^\wedge Y$, $PdP^\wedge Z$. — x_1, y_1, z_1 a vece di x, y, z, e sostituire il segno $\int$ al segno Σ.

Per la qualcosa si ha

$L = \int(rx_1 - pz_1)z_1 dm - \int(py_1 - qx_1)y_1 dm$,

$M = \int(py_1 - qx_1)x_1 dm - \int(qz_1 - ry_1)z_1 dm$

$N = \int(qz_1 - ry_1)y_1 dm - \int(rx_1 - pz_1)x_1 dm$

Gl'integrali prendere si debbono relativamente a dm, ed estenderli a tutta la massa del mobile.

Si osservi che la situazione di dm dipende dalle sue coord.^{e} e non da p, q, r, il perchè al prin.: dove gl'integrali estesi per tutta la massa del mobile, si debbono considerare p, q, r, costanti; si avrà dunque

(64) $L = r\int x_1 z_1 dm + q\int y_1 x_1 dm - p\int(y_1^\wedge + z_1^\wedge)dm$,

(65) $M = p\int x_1 y_1 dm + r\int y_1 z_1 dm - q\int(x_1^\wedge + z_1^\wedge)dm$

(66) $N = q\int y_1 z_1 dm + p\int x_1 z_1 dm - r\int(x_1^\wedge + y_1^\wedge)dm$. Poniamo che gli assi AX_1, AY_1, AZ_1 sieno gli assi principali del mobile che si tagliano in A ed avremo §. 598.

$\int x_1 z_1 dm = 0$,

$\int x_1 y_1 dm = 0$,

$\int y_1 z_1 dm = 0$,

$A=\int(x_1^2+y_1^2)\,dm$,

$B=\int(x_1^2+z_1^2)\,dm$,

$C=\int(y_1^2+z_1^2)\,dm$, onde sarà

(67) $L=-Cp$,

(68) $M=-Bq$,

(69) $N=-Ar$. ponendo questi valori nelle equazioni (2) (3) e (4) del §. 132, e detta R' la perpendicolare che dal punto A si innalza sul piano principale dei momenti, si avrà

(70) $\theta R'^{\wedge}X_1=\dfrac{-Cp}{\sqrt{C^2p^2+B^2q^2+A^2r^2}}$,

(71) $\theta R'^{\wedge}Y_1=\dfrac{-Bq}{\sqrt{C^2p^2+B^2q^2+A^2r^2}}$

(72) $\theta R'^{\wedge}Z_1=\dfrac{-Ar}{\sqrt{C^2p^2+B^2q^2+A^2r^2}}$, equazioni che determinano la situazione di R' relativa agli assi X_1, Y_1, Z_1, fissi nel solido e mobili con lui.

Lezione 121

§. 632. potremo inoltre per mezzo delle quantità p, q, r determinare la posizione di R' relativa agli assi ortogonali AX, AY, AZ fissi nello spazio. Diffatti, si ha

(73) $\theta R'^{\wedge}X=\theta R'^{\wedge}X_1\,\theta X^{\wedge}X_1+\theta R'^{\wedge}Y_1\,\theta X^{\wedge}Y_1+\theta R'^{\wedge}Z_1\,\theta X^{\wedge}Z_1$, per l' [illegible]

(74) $\theta R'^{\wedge}Y=\theta R'^{\wedge}X_1\,\theta Y^{\wedge}X_1+\theta R'^{\wedge}Y_1\,\theta Y^{\wedge}Y_1+\theta R'^{\wedge}Z_1\,\theta Y^{\wedge}Z_1$,

(75) $\theta R'^{\wedge}Z=\theta R'^{\wedge}X_1\,\theta Z^{\wedge}X_1+\theta R'^{\wedge}Y_1\,\theta Z^{\wedge}Y_1+\theta R'^{\wedge}Z_1\,\theta Z^{\wedge}Z_1$. ovvero

(76) $\theta R'^{\wedge}X=a\,\theta R'^{\wedge}X_1+b\,\theta R'^{\wedge}Y_1+c\,\theta R'^{\wedge}Z_1$

(77) $\theta R'^{\wedge}Y=a'\,\theta R'^{\wedge}X_1+b'\,\theta R'^{\wedge}Y_1+c'\,\theta R'^{\wedge}Z_1$

(78) $\theta R'^{\wedge}Z=a''\,\theta R'^{\wedge}X_1+b''\,\theta R'^{\wedge}Y_1+c''\,\theta R'^{\wedge}Z_1$,

e quindi

(79) $\theta R'^{\wedge}X=-\dfrac{Cap+Bbq+Acr}{\sqrt{C^2p^2+B^2q^2+A^2r^2}}$

(80) $\theta R\hat{}Y = -\dfrac{Ga'p + Bb'q + Ac'r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$,

(81) $\theta R\hat{}Z = -\dfrac{Ga''p + Bb''q + Ac''r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$. —

N. 633. Sia ω l'inclinazione del piano (x_1, y_1) al piano (x, y) ed ω', ω'' gli angoli che l'intersecazione di questi due piani fa cogli assi delle x_1, e delle x. — La situazione del piano (x_1, y_1) sarà al tutto determinata da questi due angoli, e quindi si saprà pure la posizione degli altri piani (x_1, z_1) (y_1, z_1) che sono mobili col solido come lo è eziandio il 1º piano, perchè questi piani sono perpendicolari al piano (x_1, y_1) e protratti amendue per l'origine delle coordinate. Se dunque si conosceranno ad ogni istante $\omega, \omega', \omega''$ in funzione del tempo si conoscerà la situazione di cosiffatti piani e però la posizione del mobile nello spazio. Dal veduto Introd. al Calcolo si ha

(82) $\theta X\hat{X}_1 = a = \theta\omega.\theta\omega'' + \theta\omega\,\theta\omega''\theta\omega'$,

(83) $\theta Y\hat{X}_1 = a' = \theta\omega'.\theta\omega''\theta\omega + \theta\omega''\theta\omega$,

(84) $\theta Z\hat{X}_1 = a'' = \theta\omega\theta\omega'$,

(85) $\theta X\hat{Y}_1 = b = \theta\omega''\theta\omega'\theta\omega - \theta\omega\theta\omega''$,

(86) $\theta Y\hat{Y}_1 = b' = -(\theta\omega\theta\omega'' + \theta\omega.\theta\omega'\theta\omega'')$,

(87) $\theta Z\hat{Y}_1 = b'' = \theta\omega.\theta\omega'$,

(88) $\theta X\hat{Z}_1 = c = \theta\omega'\theta\omega''$,

(89) $\theta Y\hat{Z}_1 = c' = \theta\omega'\theta\omega''$,

(90) $\theta Z\hat{Z}_1 = c'' = \theta\omega$.

§. 632. Si ha poi

(17) $pdt = cdb + c'db' + c''db'' = -\phi\omega'\phi\omega''.$
$(\theta\omega''\theta\omega'\theta\omega d\omega'' - \phi\omega''\phi\omega'\theta\omega d\omega' - -$
$\phi\omega''\theta\omega'\phi\omega d\omega - \theta\omega\theta\omega''d\omega + \phi\omega\phi\omega''d\omega'')$
$-\phi\omega'\theta\omega''(\theta\omega\phi\omega'd\omega + \phi\omega\theta\omega'd\omega'' -$
$\phi\omega\theta\omega'\theta\omega''d\omega - \theta\omega\phi\omega'\theta\omega''d\omega' - \theta\omega\theta\omega'.$
$\phi\omega''d\omega'') + \theta\omega'(\theta\omega'\theta\omega d\omega' - \phi\omega\phi\omega'd\omega)$
$= -\phi\omega'\phi\omega''\theta\omega''\theta\omega'\theta\omega d\omega'' + \phi^2\omega'\phi^2\omega''\theta\omega d\omega'$
$+ \phi^2\omega''\phi\omega'\theta\omega'\phi\omega d\omega + \phi\omega'\phi\omega''\theta\omega\theta\omega''d\omega -$
$\phi\omega\phi^2\omega''\phi\omega'd\omega'' - \phi\omega'\theta\omega''\theta\omega\phi\omega''d\omega -$
$\phi\omega\phi\omega'\theta^2\omega''d\omega' + \phi\omega\theta\omega'\phi\omega'\theta^2\omega''d\omega +$
$\theta\omega\phi^2\omega'\theta^2\omega''d\omega' + \theta\omega\theta\omega'\phi\omega'\theta\omega''\phi\omega''d\omega''$
$+ \theta^2\omega'\theta\omega d\omega' - \phi\omega\phi\omega'.\theta\omega'd\omega =$
$-d\omega(\phi^2\omega''\phi\omega'\theta\omega'\phi\omega + \phi\omega'\phi\omega''\theta\omega\theta\omega'' -$
$\phi\omega'\theta\omega''\theta\omega\phi\omega'' + \phi\omega\theta\omega'\phi\omega'\theta^2\omega'' - -$
$\phi\omega\phi\omega'\theta\omega') + d\omega'(\phi^2\omega'\phi^2\omega''\theta\omega + \theta\omega\phi^2\omega'\theta^2\omega'' +$
$\theta^2\omega'\theta\omega) - d\omega''(\phi\omega'\phi\omega''\theta\omega''\theta\omega'\theta\omega +$
$\phi\omega\phi^2\omega''\phi\omega' + \phi\omega\phi\omega'\theta^2\omega'' - \theta\omega\theta\omega'\phi\omega'\theta\omega''$
$\phi\omega'')$
$= -d\omega((\phi^2\omega'' + \theta^2\omega'')\phi\omega\theta\omega'\phi\omega' - \phi\omega\phi\omega'\theta\omega')$
$+ d\omega'((\phi^2\omega'' + \theta^2\omega'')\phi^2\omega'\theta\omega + \theta^2\omega'\theta\omega) -$
$d\omega''(\phi^2\omega'' + \theta^2\omega'')\phi\omega\phi\omega'.$ Ma
$\phi^2\omega'' + \theta^2\omega'' = 1$, dunque
$pdt = d\omega'(\phi^2\omega'\theta\omega + \theta^2\omega'\theta\omega) -$
$\phi\omega\phi\omega'd\omega''$: ma $\phi^2\omega' + \theta^2\omega' = 1$, dunque

(91) $pdt = \theta\omega d\omega' - \phi\omega\phi\omega'd\omega''$; si ha ancora

(92) $qdt = adc + a'dc' + a''dc'' = - - -$
$-(\theta\omega\theta\omega'' + \phi\omega\theta\omega''\theta\omega')(\theta\omega'\phi\omega''d\omega' +$
$\phi\omega'\theta\omega''d\omega'') - (\theta\omega'\theta\omega''\phi\omega - \phi\omega'\theta\omega).$
$(\theta\omega'\theta\omega''d\omega' - \phi\omega'\phi\omega''d\omega'') - \phi\omega\phi\omega'd\omega$
$= -d\omega'(\theta\omega\theta\omega''\theta\omega'\phi\omega'' + \phi\omega\phi^2\omega'\theta\omega' +$
$\theta^2\omega'\theta^2\omega''\phi\omega - \phi\omega''\theta\omega'\theta\omega'' + \phi\omega\phi^2\omega') -$
$d\omega''(\theta\omega\theta^2\omega''\phi\omega' + \phi\omega\phi\omega''\theta\omega'\theta\omega''\phi\omega' -$
$\theta\omega'\theta\omega''\phi\omega\phi\omega'\phi\omega'' + \phi^2\omega''\theta\omega\phi\omega') =$

$-dw'(\theta w \phi^{\wedge} dw'' \epsilon^{\wedge} w' + \epsilon^{\wedge} w' \epsilon w'' \theta w + \epsilon w \phi^{\wedge} w)$
$\theta w \phi^{\wedge} w'$ ~~$\theta w \phi^{\wedge} w'$~~ $- dw'' \epsilon w \epsilon^{\wedge} w' \theta w' + \theta^{\wedge} w' \epsilon^{\wedge} w \theta w)$

$= -dw'((\theta^{\wedge} w'' + \epsilon^{\wedge} w'')\theta w \epsilon^{\wedge} w' + \theta w \phi^{\wedge} w') -$
$dw''(\theta^{\wedge} w'' + \epsilon^{\wedge} w'')\epsilon w \phi w'' = -dw'(\theta w \epsilon^{\wedge} w' +$
$\theta w \phi^{\wedge} w') - dw'' \epsilon w \phi w' - dw'(\theta^{\wedge} w' + \epsilon^{\wedge} w')\theta w$
$- dw'' \epsilon w \theta w'$, ovvero

(93) $q\,dt = -(\theta w\, dw' + \epsilon w \phi w' dw'')$

(94) $r\,dt = b\,da + b' da' + b'' da'' = (\theta^{\wedge} w'' \epsilon^{\wedge} w'$
$\cdot \epsilon w - \theta w \epsilon w'')(\epsilon w \phi w'' \epsilon w' dw + \theta w \epsilon w'' \epsilon w' \cdot$
$dw'' - \theta w \theta w'' \theta w' dw' - \theta w \epsilon w'' dw -$
$\epsilon w \theta w'' dw'') - (\theta w \theta w'' + \epsilon w \theta w' \epsilon w'')(-$
$\theta w' \epsilon w'' \phi w\, dw' + \epsilon w' \theta w'' \phi w\, dw'' -$
$\epsilon w' \epsilon w'' \epsilon w\, dw + \theta w'' \epsilon w\, dw' - \theta w'' \theta w\, dw)$
$+ \theta w \phi w' (\epsilon w \phi w' dw + \theta w \epsilon w' dw') =$
$\theta^{\wedge} w'' \epsilon^{\wedge} w' \epsilon^{\wedge} w\, dw - \theta w . \epsilon w'' \epsilon w \theta w'' \epsilon w' dw$
$+ \theta w'' \epsilon^{\wedge} w' \epsilon w \phi w \epsilon w'' dw'' - \theta^{\wedge} w \epsilon^{\wedge} w'' \epsilon w' dw'$
$- \theta^{\wedge} w'' \epsilon w' \epsilon w \theta w \theta w' dw' + \theta^{\wedge} w \epsilon w'' \theta w'' \theta w' \cdot$
$dw' - \theta w'' \epsilon w' \epsilon w \theta w \epsilon w'' dw +$
$\theta^{\wedge} w \epsilon^{\wedge} w'' dw - \theta^{\wedge} w'' \epsilon w' \epsilon^{\wedge} w\, dw' + - -$
$\theta w \epsilon w'' \epsilon w \theta w'' dw'' - \theta^{\wedge} w \theta w'' \theta w' \epsilon w'' dw'$
$- \epsilon w \epsilon w' \epsilon^{\wedge} w'' \theta w' \theta w\, dw' - \theta^{\wedge} w \theta^{\wedge} w'' \epsilon w' \cdot$
$dw'' - \epsilon w \epsilon^{\wedge} w' \epsilon w'' \theta w'' \theta w\, dw'' +$
$\theta w \theta w'' \epsilon w' \epsilon w'' \epsilon w\, dw + \epsilon^{\wedge} w \epsilon^{\wedge} w' \epsilon^{\wedge} w'' dw$
$- \theta w \theta w'' \epsilon w'' \epsilon w\, dw'' - \epsilon^{\wedge} w \epsilon w' \epsilon^{\wedge} w'' dw'$
$- \theta^{\wedge} w \theta^{\wedge} w' dw + \epsilon^{\wedge} w \theta^{\wedge} w' dw + \epsilon w \phi w' \theta w \cdot$
$\epsilon w' dw' = dw(\theta^{\wedge} w'' \epsilon^{\wedge} w' \epsilon^{\wedge} w - - -$
$\theta w \epsilon w'' \epsilon w \theta w'' \epsilon w' - \theta w'' \epsilon w' \epsilon w \theta w \epsilon w'' +$
$\theta^{\wedge} w \epsilon^{\wedge} w'' + \epsilon^{\wedge} w \epsilon^{\wedge} w' \epsilon^{\wedge} w'' + 2 \theta w \theta w'' \epsilon w' \cdot$
$\epsilon w'' \epsilon w + \theta^{\wedge} w \theta^{\wedge} w'' + \epsilon^{\wedge} w \theta^{\wedge} w') +$
$dw'(\theta^{\wedge} w \epsilon w'' \theta w'' \phi w' - \theta^{\wedge} w'' \epsilon w' \epsilon w \theta w \theta w'$
$- \theta^{\wedge} w \epsilon w'' \theta w' \theta w' - \epsilon w \epsilon w' \epsilon^{\wedge} w'' \theta w' \theta w +$
$\epsilon w \phi w' \theta w \epsilon w') + dw''(\theta w'' \epsilon^{\wedge} w' \epsilon w \phi w \epsilon$
$- \theta^{\wedge} w \epsilon^{\wedge} w'' \epsilon w' - \theta^{\wedge} w'' \theta w' \epsilon^{\wedge} w +$
$\theta w \epsilon w'' \epsilon w \phi w'' - \theta^{\wedge} w \theta^{\wedge} w'' \epsilon w' -$

$\varphi\omega''\theta\omega\;\theta^{\wedge}\omega'\theta\omega''\varphi\omega - \theta\omega\varphi\omega''\theta\omega''\theta\omega$
$-\theta^{\wedge}\omega\,\theta\omega'\,\theta^{\wedge}\omega'') = d\omega(\varphi^{\wedge}\omega''\theta^{\wedge}\omega'\theta^{\wedge}\omega +$
$\varphi^{\wedge}\omega\,\theta^{\wedge}\omega'' + \theta^{\wedge}\omega\,\theta^{\wedge}\omega'\theta^{\wedge}\omega'' + \varphi^{\wedge}\omega\,\varphi^{\wedge}\omega'' +$
$\theta^{\wedge}\omega\,\varphi^{\wedge}\omega') - d\omega''(\varphi^{\wedge}\omega\,\theta^{\wedge}\omega''\theta\omega' +$
$\varphi^{\wedge}\omega''\theta\omega'\theta^{\wedge}\omega + \theta^{\wedge}\omega\,\varphi^{\wedge}\omega''\theta\omega' + \theta^{\wedge}\omega\,\theta\omega'\theta^{\wedge}\omega)$
$= d\omega((\varphi^{\wedge}\omega'' + \theta^{\wedge}\omega'')(\theta^{\wedge}\omega'\theta^{\wedge}\omega + \varphi^{\wedge}\omega) +$
$\theta^{\wedge}\omega\,\varphi^{\wedge}\omega') - d\omega''((\varphi^{\wedge}\omega'' + \theta^{\wedge}\omega'')\varphi^{\wedge}\omega\,\theta\omega' +$
$\theta^{\wedge}\omega\,\theta\omega') = d\omega(\theta^{\wedge}\omega'\theta^{\wedge}\omega + \varphi^{\wedge}\omega + \theta^{\wedge}\omega\,\varphi^{\wedge}\omega)$
$-d\omega''(\varphi^{\wedge}\omega\,\theta\omega' + \theta^{\wedge}\omega\,\theta\omega') =$
$d\omega((\varphi^{\wedge}\omega' + \theta^{\wedge}\omega')\theta^{\wedge}\omega + \theta^{\wedge}\omega - d\omega''(\varphi^{\wedge}\omega + \theta^{\wedge}\omega)$
$\theta\omega'$, ovvero

(95) $r\,dt = d\omega - \theta\omega' d\omega''$.

§. 635. Fra le quantità $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', p, q, r$ esistono delle relazioni che torna utile il conoscere. Si hanno le tre equazioni

(96) $a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' = q\,dt$,

(97) $b\,dc + b'\,dc' + b''\,dc'' = -p\,dt$,

(98) $c\,dc + c'\,dc' + c''\,dc'' = 0$, §. 626. le quali moltiplicate per a, b, c rispettivamente e sommati i prodotti, si avrà la

(99) $dc = (aq - bp)\,dt$; moltiplicate le stesse equazioni rispettivamente per a', b', c', e dappoi per a'', b'', c'', le somme dei prodotti sono le

(100) $dc' = (a'q - b'p)\,dt$,

(101) $dc'' = (a''q - b''p)\,dt$.

Dalle equazioni (93) che i

$b\,da + b'\,da' + b''\,da'' = r\,dt$
$c\,da + c'\,da' + c''\,da'' = -q\,dt$
$a\,da + a'\,da' + a''\,da'' = 0$, che moltiplicate per b, c, a, poscia per b', c', a', b'', c'', a'', avremo le

(102) $da=(br-cq)\,dt$

(103) $da'=(b'r-c'q)\,dt$

(104) $da''=(b''r-c''q)\,dt$. Dalle

$c\,db+c'\,db'+c''\,db''=p\,dt$

$a\,db+a'\,db'+a''\,db''=-r\,dt$

$b\,db+b'\,db'+b''\,db''=0$, molt.ᵉ risp.ᵉ per c, a, b, indi p. c', a', b'; c'', a'', b'' e sommando si ha

(105) $db=(cp-ar)\,dt$

(106) $db'=(c'p-a'r)\,dt$

(107) $db''=(c''p-a''r)\,dt$. Moltiplicate le (102), (105), e la (99) per p, q, r, la somma dei prodotti sarà

(108) $p\,da+q\,db+r\,dc=0$; in modo analogo si troverebbe

(109) $p\,da'+q\,db'+r\,dc'=0$,

(110) $p\,da''+q\,db''+r\,dc''=0$.

Lezione 15.

Capitolo XLIX

Delle equazioni del moto di rotazione intorno ad un punto fisso.

§. 636. Poniamo ora che le date forze continue agiscano su tutti i punti del mobile e cerchiamo in tale ipotesi l'equazione del moto intorno ad A fisso.

Sia dm l'elemento della massa del mobile, corrispondente alle coord.e x_1, y_1, z_1 riferite agli assi AX_1, AY_1, AZ_1 fissi nel solido e mobili con lui.

Qualunque sieno le forze sollecitanti l'elemento dm, figurare si può che sieno ridotte a tre parallele ai tre assi AX_1, AY_1, AZ_1, e sieno X_1, Y_1, Z_1 le somme delle componenti delle forze date.

Se l'elemento dm fosse libero, nel tempuscolo dt considerandosi come costanti, aumenterebbero delle quantità $X_1 dt$, $Y_1 dt$, $Z_1 dt$. Ma l'elemento dm, non è libero, e le forze che sollecitano il mobile hanno per componenti parallele agli assi ortogonali x_1, y_1, z_1, le p_1, q_1, r_1 come fu dimostrato §. 630. Dunque nel tempuscolo dt gli aumenti delle velocità (proporzionali alle forze) nelle direzioni degli assi saranno $p_1 dt$, $q_1 dt$, $r_1 dt$, che sono le velocità che hanno realmente luogo.

Dal che deriva, che le velocità perdute dall'elemento dm, nelle direzioni dei prefati assi, sono

$(X_1 - p_1)dt, (Y_1 - q_1)dt, (Z_1 - r_1)dt,$

alle quali corrispondono le forze motrici

(a). $(X_1 - p_1)dm\,dt, (Y_1 - q_1)dm.dt, (Z_1 - r_1)dm.$

Laonde pel principio d'Alembert vi avrà equilibrio nel sistema supponendo ciascun elemento animato da forze parallele agli assi x_1 y_1 z_1 di cui le intensioni son presentate dalle (a). Ma si è veduto nella Statica che nel caso del punto fisso le equazioni d'equilibrio sono tre; dunque nel presente caso perchè v'abbia equilibrio si devono avere le tre infrascritte equazioni

(1.) $\int(y_1(X_1 - p_1)\,dm.dt - x_1(Y_1 - q_1)\,dm\,dt)$

(2.) $\int(x_1(Z_1 - r_1)\,dm.dt - z_1(X_1 - p_1)\,dm\,dt)$

(3.) $\int(z_1(Y_1 - q_1)\,dm.dt - y_1(Z_1 - r_1)\,dm\,dt)$

§. 637. Poniamo per semplicità

(4) $\int(y_1 Z_1 - z_1 Y_1)\,dm = N',$

(5.) $\int(z_1 X_1 - x_1 Z_1)\,dm = N'',$

(6.) $\int(x_1 Y_1 - y_1 X_1)\,dm = N''',$ e si avrà

(7.) $\int(x_1 q_1 - y_1 p_1)\,dt.dm = N'''dt,$

(8.) $\int(z_1 p_1 - x_1 r_1)\,dt.dm = N''dt,$

(9.) $\int(y_1 r_1 - z_1 q_1)\,dt.dm = N'dt.$ —

Ma al §. 630. abbiamo trovato

(10.) $p_1 dt = z_1 dq - y_1 dr + (py_1 - qx_1)q\,dt + (pz_1 - rx_1)r\,dt,$

(11) $q_1 dt = x_1 dr - z_1 dp + (qx_1 - py_1) p\,dt + (qz_1 - ry_1) r\,dt$,

(12) $r_1 dt = y_1 dp - x_1 dq + (rx_1 - pz_1) p\,dt + (ry_1 - pz_1) q\,dt$: dunque

(13) $x_1 q_1 dt - y_1 p_1 dt = x_1^2 dr - x_1 z_1 dp + (qx_1^2 - px_1 y_1) p\,dt + (qx_1 z_1 - rx_1 y_1) r\,dt - y_1 z_1 dq + y_1^2 dr - (py_1^2 - qx_1 y_1) q\,dt - (py_1 z_1 - rx_1 y_1) r\,dt = (x_1^2 + y_1^2) dr + pq(x_1^2 - y_1^2) dt + (q^2 dt - p^2 dt) x_1 y_1 - (dp - qr\,dt) x_1 z_1 - (dq - pr\,dt) y_1 z_1$.

(14) $z_1 p_1 dt - x_1 r_1 dt = (z_1^2 + x_1^2) dq + pr(z_1^2 - x_1^2) dt + (dp + qr\,dt) x_1 y_1 + (p^2 dt - r^2 dt) x_1 z_1 - (dr - pq\,dt) y_1 z_1$

(15) $y_1 r_1 dt - z_1 q_1 dt = (y_1^2 + z_1^2) dp + rq(y_1^2 - z_1^2) dt - (dq - rp\,dt) x_1 y_1 - (dr + pq\,dt) x_1 z_1 + (r^2 dt - q^2 dt) y_1 z_1$

Poniamo che gli assi coordinati di cui l'origine è in A sieno gli assi principali del solido, e pel §. 398. avremo $\int x_1 y_1 dm = 0$,

$\int x_1 z_1 dm = 0$,

$\int y_1 z_1 dm = 0$, per la qualcosa si hanno le seguenti equazioni

(16) $\int (x_1 q_1 dt - y_1 p_1 dt) dm = dr \int (x_1^2 + y_1^2) dm + pq\,dt \int (x_1^2 - y_1^2) dm$

(17) $\int (z_1 p_1 dt - x_1 r_1 dt) dm = dq \int (x_1^2 + z_1^2) dm + pr\,dt \int (z_1^2 - x_1^2) dm$,

(18) $\int (y_1 v_1 dt - z_1 q_1 dt)\, dm = dp \int (y_1^2 + z_1^2)\, dm$ $+ qr dt \int (y_1^2 - z_1^2)\, dm$.

Sieno A, B, C, i tre momenti principali d'inerzia del corpo relativi agli assi principali AX_1, AY_1, AZ_1 e si avrà

$A = \int (x_1^2 + y_1^2)\, dm$,

$B = \int (x_1^2 + z_1^2)\, dm$,

$C = \int (y_1^2 + z_1^2)\, dm$, e quindi

$\int (x_1^2 - y_1^2)\, dm = B - C$,

$\int (z_1^2 - y_1^2)\, dm = C - A$.

$\int (y_1^2 - z_1^2)\, dm = A - B$, onde le tre equazioni del moto divent. no

(19) $C dp + (A - B)\, qr dt = N' dt$.

(20) $B dq + (C - A)\, pr dt = N'' dt$,

(21) $A dr + (B - C)\, pq dt = N''' dt$. —

§ 638. Osserviamo che le forze X_1, Y_1, Z_1 che sono le componenti secondo gli assi AX_1, AY_1, AZ_1 delle forze sollecitanti il sistema dipendono dalla direzione di così fatti assi, la quali dipendono dagli angoli $\omega, \omega', \omega''$, onde N', N'', N''' riusciranno funzioni di $\omega, \omega', \omega''$. Per la qualcosa la quistione del moto di rotazione di un solido si conduce a 6 equazioni diff.li di 1.° ord.^e

fra le quantità, p, q, r, ω, ω'
ω'', θ; ciò per le (19)(20)(21)

(22) $p\,dt = \theta\,\omega\,d\omega' - \theta\,\omega\,\theta\,\omega'\,d\omega''$

(23) $q\,dt = -(\rho\,\omega\,d\omega' + \theta\,\omega\,\theta\,\omega'\,d\omega'')$

(24) $r\,dt = d\omega - \theta\,\omega'\,d\omega''$.

Coll'ajuto delle (22) (23) e (24), eliminate le p, q, r, potrebbe si ridurre la questione a tre equazioni diff.li di 2.° ordine contenente $\omega, \omega', \omega''$ e t.

A dir vero riesce meno difficile conservando le sei equazioni di 1.° ordine.

§. 639. Prendiamo in considerazione un caso particolare, cioè quello in cui la gravità è la sola forza continua che agisca su tutti i punti del mobile.

Figuriamo che l'asse fisso AZ sia verticale e diretto nel senso della gravità g costante. Le tre componenti secondo i tre assi AX_1, AY_1, AZ_1 fissi nel corpo e mobili con lui, saranno in questo caso,

$g\theta\hat{Z_1X_1}$, $g\theta\hat{Z_1Y_1}$, $g\theta\hat{ZZ_1}$, ovvero

$X_1 = ga''$,
$Y_1 = gb''$,
$Z_1 = gc''$.

Sia M la massa del solido; a, a', a'', le distanze del suo centro di gravità dai tre piani le cui intersecazioni sono gli assi principali AX_1, AY_1, AZ_1, di:

guisa che abbiasi

(25.) $\int x_1 dm = M\alpha$,

(26.) $\int y_1 dm = M\alpha'$,

(27.) $\int z_1 dm = M\alpha''$. Dalle equazioni (4), (5), e (6), si ha

$N' = Z_1 \int y_1 dm - Y_1 \int z_1 dm$,

$N'' = X_1 \int z_1 dm - Z_1 \int x_1 dm$,

$N''' = Y_1 \int x_1 dm - X_1 \int y_1 dm$; poichè essendo g costante, le componenti di lei $X_1\, Y_1\, Z_1$ saranno costanti. Sostituite in queste equazioni i valori trovati di X_1, Y_1, Z_1 e di $\int y_1 dm$, $\int z_1 dm$, $\int x_1 dm$ si ottengono le

(28) $N' = (\alpha' c'' - \alpha'' b'') g M$,

(29) $N'' = (\alpha'' a - \alpha c'') g M$

(30) $N''' = (b'' \alpha - a'' \alpha') g M$. Nel presente caso adunque le equazioni del moto (19), (20), (21), si mutano nelle

(31) $C dp + (A - B) q r dt = (\alpha' c'' - \alpha'' b'') g M dt$

(32) $B dq + (C - A) p r dt = (\alpha'' a - \alpha c'') g M dt$

(33) $A dr + (B - C) p q dt = (b'' \alpha - a'' \alpha') g M dt$

le quali benchè in un caso semplicissimo presentano gravi difficoltà.

Capitolo ~~XLVIIII~~ = L.°

Del moto di un Solido libero.

N.640. A mettere davanti con facilità il moto di un solido libero nello spazio, il considereremo animato da due moti contemporanei; uno di rotazione intorno ad uno de' suoi punti considerato questo come un ~~punto~~ centro fisso, e l'altro di traslazione comune a tutti i punti del corpo.

Il che torna a considerare in un'istante qualunque la velocità di un punto qualunque come risultante da due velocità, una comune a tutti gli altri punti di lui, ed è eguale e parallela a quella del punto scelto per centro ~~fisso~~ del moto di rotazione. Avendo riguardo solo alle velocità particolari, il solido ruota d'intorno al centro di rotazione, come d'intorno ad un punto fisso: In virtù poi della velocità comunicata a tutti i suoi punti, sono essi trasportati nello spazio con un moto progressivo che non altera punto quello di rotazione. —

Dopo ciò, fin che si ha per iscopo di scomporre il moto del corpo in 2 più semplici e più facile a concepirsi, il centro di rotazione potrà scegliersi ad arbitrio. Ma allorchè si trat-

terà di determinare ciascuno dei due moti prenderemo per centro di rotazione il suo centro di gravità, perchè il suo moto può essere determinato immediatamente indipend. dagli altri punti.

Laonde noi ci proponiamo di trovare il moto del centro di gravità considerato il corpo come un p.to mat.

§. 641. Sia G ed M rispett. il centro di gravità e la massa del solido di cui dm sia l'elemento — Siano (x, y, z) le coord. di dm; (x_1, y_1, z_1) le coord. di G rispette ai med. assi coordinati. —

Si è già detto che si propone sostituire le masse ai pesi; quindi avremo le

(1.) $M x_1 = \int x\,dm$,

(2.) $M y_1 = \int y\,dm$,

(3) $M z_1 = \int z\,dm$. Questi integrali estendere si debbono alla massa intera del solido; prendendo le derivate delle (1) (2) (3) relativam. a t, considerando le x_1, y_1, z_1 come funzioni di x, y, z, si avrà

(4) $M \frac{dx_1}{dt} = \int \frac{dx}{dt}\,dm$,

(5.) $M \frac{dy_1}{dt} = \int \frac{dy}{dt}\,dm$,

(6.) $M \frac{dz_1}{dt} = \int \frac{dz}{dt}\,dm$, dalle quali derivando sotto il med. punto di vista si ottengono le

(7) $M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\int\frac{d^2x}{dt^2}dm.$

(8) $M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\int\frac{d^2y}{dt^2}dm.$

(9) $M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\int\frac{d^2z}{dt^2}dm$, che divise per M danno

(10) $\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{1}{M}\int\frac{d^2x}{dt^2}dm$

(11) $\frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{1}{M}\int\frac{d^2y}{dt^2}dm.$

(12) $\frac{d^2z_1}{dt^2}=\frac{1}{M}\int\frac{d^2z}{dt^2}dm.$ ——

Lezione 16.ª

Le quali mettono davanti le componenti secondo i tre assi ortogonali delle forze da cui è sollecitato il centro di gravità G, §. 167. ——

Dunque esse sono le equazioni del moto del centro di gravità stesso. Ma esse dipendono dalle coord.e (x, y, z) del mobile, cerchiamo adunque di renderle indipendenti. ——

Alla fine di un tempo t le velocità parallele agli assi, sono $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Se supponiamo che il tempo t sia aumentato di dt, le velocità diventano

$\frac{dx}{dt}+d\frac{dx}{dt}$,

$\frac{dy}{dt}+d\frac{dy}{dt}$,

$\frac{dz}{dt}+d\frac{dz}{dt}$. Ma se scomponga-

parallelamente agli assi coordi-
tutte le forze continue che solle-
citano dm, e dette X, Y, Z le
somme delle componenti para-
llele agli assi x, y, z, le velo-
cità impresse da tali forze
supposto libero il punto dm,
saranno
$X\,dt$, $Y\,dt$, $Z\,dt$; e però in
tale supposto le velocità para-
llele agli assi, a capo del tempo $t+dt$ saranno

$\frac{dx}{dt} + X\,dt$

$\frac{dy}{dt} + Y\,dt$

$\frac{dz}{dt} + Z\,dt$. Da queste sottraen-
do le precedenti avremo le
velocità perdute, e però si avrà

$X\,dt - d\frac{dx}{dt}$,

$Y\,dt - d\frac{dy}{dt}$,

$Z\,dt - d\frac{dz}{dt}$. Il quale elemento
rimarrà in equilibrio imprimen-
do a ciascuno de' suoi elementi
le quantità di moto

$\left(X\,dt - d\frac{dx}{dt}\right)dm$,

$\left(Y\,dt - d\frac{dy}{dt}\right)dm$,

$\left(Z\,dt - d\frac{dz}{dt}\right)dm$, le quali corri-
spondono alle velocità perdute.
Onde, le quantità di moto
di tutti i punti parallele agli
assi delle x, y, z si otterranno
prendendo gli integrali delle
trovate, ossia saranno

$\int\left(X\,dt - d\frac{dx}{dt}\right)dm$,

$\int(Ydt - d\frac{dy}{dt})dm$, $\int(Zdt - d\frac{dz}{dt})dm$.

Ma considerato il solido interamente libero è nessesario che sia nulla ciascuna forza, dunque pel principio d' Alembert si debbono avere le

$$\int Xdtdm - \int d\frac{dx}{dt}dm = 0,$$

$$\int Ydtdm - \int d\frac{dy}{dt}dm = 0,$$

$$\int Zdtdm - \int d\frac{dz}{dt}dm = 0.$$

Si osservi, che per essere dt costante, si ha (diff. del 2.° integ.)

(13) $\int\frac{d^2x}{dt^2}dm = \int X dm$,

(14) $\int\frac{d^2y}{dt^2}dm = \int Y dm$,

(15) $\int\frac{d^2z}{dt^2}dm = \int Z dm$, e però sostituiti tali valori nelle (10) (11), (12), ne nascono le

(16) $\frac{d^2{}_1x}{dt^2} = \int\frac{X dm}{M}$,

(17) $\frac{d^2{}_1y}{dt^2} = \int\frac{Y dm}{M}$,

(18) $\frac{d^2{}_1z}{dt^2} = \int\frac{Z dm}{M}$.

Si osservi che $\int X dm$, $\int Y dm$, $\int Z dm$, rappresentano le somme delle componenti secondo gli assi delle x delle y, z di tutte le forze che animano il corpo. Di guisa che dividendo ciascuna forza per la massa del solido, si avranno le forze continue secondo gli assi

di un punto materiale, il quale
sarà sollecitato dalle risultanti
di tutte le forze motrici che
animano il solido.
Quindi concludere si deve che
il centro di gravità del solido si
move come se tutta la massa
fosse raccolta in esso, e come
se tutte le forze fossero in
esso applicate, parallele al-
le loro direzioni e senza cam-
biare d'intensione. —
§. 622. Allorchè le forze continue
date, le quali agiscono su
tutti i punti del mobile, son
attrazioni dirette verso centri
fissi o mobili, le loro intensi-
tà dipenderanno dalle distanze
dei primi punti dai secondi.
Allora X, Y, Z, saranno fun-
zione delle coord.^{e} di questi
punti. In tal caso, le (16)
(17) e (18) non possono servire
a determinare direttamente
le coord.^{e}, x, y, z del centro
di gravità, vale a dire non
si potrà determinare il moto
del centro di gravità indipend.
dal moto del solido. Se
poi X, Y, Z siano costanti in
intensione e direzione, come
se il solido sia di dimens.
ord.^{e} ed animato dalla gravi-
tà sola, le (16) (17) (18) daran-
no il moto del centro di gra-
vità. In tal caso il ~~centro~~ mobile

~~[illegible]~~ si moverà come se il corpo fosse un punto materiale pesante, ossia il suo moto orizzontale sarà uniforme, il verticale uniformemente accellerato, e la sua (a) In generale le equazioni differenziali di 2.° ordine di un punto materiale, lasciano indeterminate le coord.e le velocità e loro direzioni all'origine. Così fatte ord.e e le componenti delle velocità all'origine che sono altre 3 quantità, sono le costanti arbitrarie per cui si completano le equazioni di 2.° ordine, e che debbonsi determinare in ciascun caso particolare.

La posizione iniziale del solido supposta data, si avranno le coord.te del punto di partenza. Rispetto alle velocità iniziali rispetto agli assi, si determineranno immediatamente dietro alle intensioni e direzioni delle forze istantanee all'origine del moto.

Difatti qualunque siano le velocità iniziali dei punti del solido, è necessario che le loro quantità di moto prese in senso contrario di queste velocità facciano equilibrio alle forze (come date §. 542. Ma il solido si suppone interam.e libero, dunque è necessario che la somma

(a) trajettoria sarà una parabola il cui vertice e parametro §. 623. dipenderanno dalle forze che animano il corpo.

di così fatti moti secondo x, y, z
eguagli le componenti secondo
i detti assi: ma in un istante
qualunque le quantità di mo-
to di dm sono presentate
rispetto agli assi da

$\frac{dx}{dt}dm,\ \frac{dy}{dt}dm,\ \frac{dz}{dt}dm$. —

Dunque, se A, B, C rappre-
sentino le rispettive somme
delle componenti secondo gli assi
x, y, z delle forze istantanee
le quali all' origine del moto
agiscono sul mobile, si avranno
le

(19) $\int\frac{dx}{dt}dm = A$,

(20) $\int\frac{dy}{dt}dm = B$,

(21) $\int\frac{dz}{dt}dm = C$, osservando che
estendere si debbono ss tutta
la massa del corpo. Laonde
per le (4) (5) (6) avremo le

(22) $M\frac{d_{,}x}{dt} = A$,

(23) $M\frac{d_{,}y}{dt} = B$,

(24) $M\frac{d_{,}z}{dt} = C$. Le quali divise
per M danno i valori di

$\frac{d_{,}x}{dt},\ \frac{d_{,}y}{dt},\ \frac{d_{,}z}{dt}$ che sono le
velocità iniziali secondo gli assi
x, y, z del centro di gravità

Dalle (22) (23) e (24) si hanno

(25) $\frac{d_1 x}{dt} = \frac{A}{M}$,

(26) $\frac{d_1 y}{dt} = \frac{B}{M}$,

(27) $\frac{d_1 z}{dt} = \frac{C}{M}$. Innalzate a quadrato e sommate, ci danno

$$\frac{d_1 x^2}{dt^2} + \frac{d_1 y^2}{dt^2} + \frac{d_1 z^2}{dt^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{M^2}$$

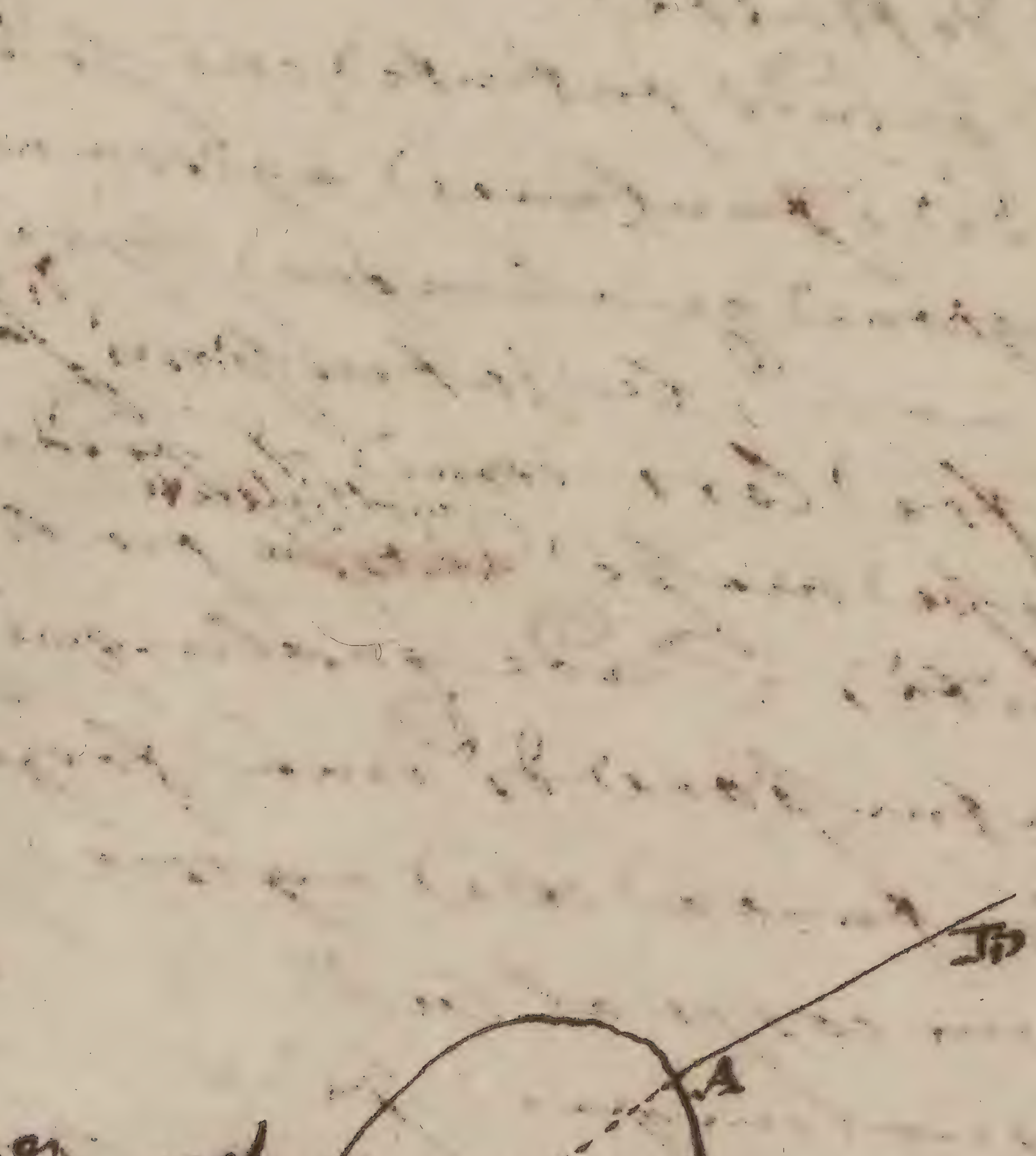
Ma il 1.º membro è il quad.º della velocità, dunque

(28) $v = \sqrt{\frac{d_1 x^2}{dt^2} + \frac{d_1 y^2}{dt^2} + \frac{d_1 z^2}{dt^2}} = \frac{1}{M}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

La quale ci mostra che la velocità del centro di gravità è la med.ª in direzione ed intensione, che se la massa intera vi fosse riunita in essa, e che se le forze ad esso applicate all' origine del moto fossero in esso trasportate parallel.te

Sia (fig. 120) il solido $AA'A''$ al tutto libero cui in A sia applicata una forza qualunque ~~continua~~ istantanea secondo qualunque direzione, e il centro di gravità si moverà come se questa forza fosse applicata in G parallella ad AD e fosse GC parallella ad AD e la sua velocità sarà la forza divisa per la massa, di guisa che se F è detta la forza

(Fig. 120)



ed M la massa si avrà

(29) $v = \frac{F}{M}$. Osserviamo, che questa velocità non dipende, nè dalla direzione, nè dal punto d'applic. di F, ma solamente dalla sua intensità; da ciò conseguita che la stessa forza applicata a diversi punti del corpo pr. durrà sempre la med. veloci tà nel centro di gravità. E' questa una proprietà che caratterizza il centro di gravità di un solido che lo distingue da tutti gli altri punti, per cui da questa proprietà si potrebbe definire.

E' quindi patente, che se delle forze istantanee agiscono in direzione qualunque sopra di $\frac{e}{z}$ di un te masse, le intensioni saranno fra loro come il prodotto di esse masse moltiplicate per le velocità. Onde, qualunque sia l'intensione di una forza istantanea che agisce su di un corpo al tutto libero, e qualunque sia il suo moto, la sua intensione avrà per misura il prodotto della massa del solido per la velocità del centro di gravità di lui. Al S. 564 si vid. che le forze istantanee hanno per misura la quantità di moto che esse producono supposti i punti

tutti animati da velocità eguali e parallele. Ma quando la forza istantanea produce un moto di rotazione variando le velocità, rimane a vedere per quale velocità si debba moltiplicare la ~~forza~~ massa per avere la forza.

§. 645. L'urto di un solido in moto contro di un solido in quiete è una forza istantanea che agisce su questo, o almeno la durata della sua azione è sì piccola che se ne può fare astrazione senza errore sensibile. — L'intensione dell'urto adunque debb'essere data dalla massa urtata nella velocità concepita dal suo centro di gravità. Il punto d'applicazione di questa forza è il punto di contatto di questi due solidi e la direzione di essa è sempre normale al piano tangente le due superficie, giacchè si scompone in 2 una normale e l'altra parallela al piano tangente. Quando un solido in riposo viene urtato da solidi in moto l'intensione dell'urto viene misurata dalla velocità del centro di gravità, ~~come se~~ ~~molti~~ che avrebbe se fosse urtato da ciascune forza moltiplicate per la massa del solido. —

§.626. Si sono trovate le equazioni del moto del centro di gravità, troveremo le cond.e per il moto di rotaz.e Perciò figuriamo impresso a ciascun punto del mobile un moto eguale e contrario al moto del centro di gravità di lui, per la qual cosa esso diventerà immobile, e il moto di traslazione del mobile verrà distrutto. Il suo moto di rotaz.e intorno al suo centro di gravità non sarà di nulla alterato. A produrre il prefato moto contrario i potenze che si dovr. imprimere a ciascun punto del mobile

1.° Una velocità iniziale e contraria a quella del suo centro di gravità

2.° Una forza continua e variabile eguale e contraria in ogni istante alla forza continua che sollecita il centro di gravità di lui. ———

Vediamo primamente ciò che risulta dalla 1.a cond.e Imprimendo a tutti i punti del solido delle velocità eguali e parallele per tali punti avranno rispettivamente delle velocità di moto eguali ed aventi le stesse direzioni, vale a dire se dividesi il solido in masse eguali avranno eguali quant. mot.

Ma la risultante di queste velocità eguali ed aventi la med.ª direzione passerà pel centro di gravità, ed in ogni movimento di rotazione intorno ad un punto fisso si può trascurare la risultante che passa per tal punto. Dunque il movimento iniziale del centro di gravità di rotazione, sarà prodotto (a)

(a) Dalle forze istantanee che agiscono sul mobile.

Rispetto alla 2ª cond.e si osservi che risulteranno per tutti i punti del solido delle forze motrici parallele fra loro ed eguali essendo esse parallele a quelle che move il centro di gravità.

Perciò si potrà fare astrazione da tali forze, avvegnachè la loro risultante in ciascun istante passerà pel centro di gravità.

Concludere adunque si debbe che il moto di rotazione intorno al centro di gravità è prodotto all'origine dalle date forze che agiscono sul mobile, ed alle quali aggiungere non si debbe forza veruna.

Conoscendo queste forze e le loro direzioni nei casi particolari, si formeranno le 3 di 2º ordine o 6 di primo ordine dalle quali dipende il moto di rotazione §.638. alle quali aggiunte le (16) (17) (18) si

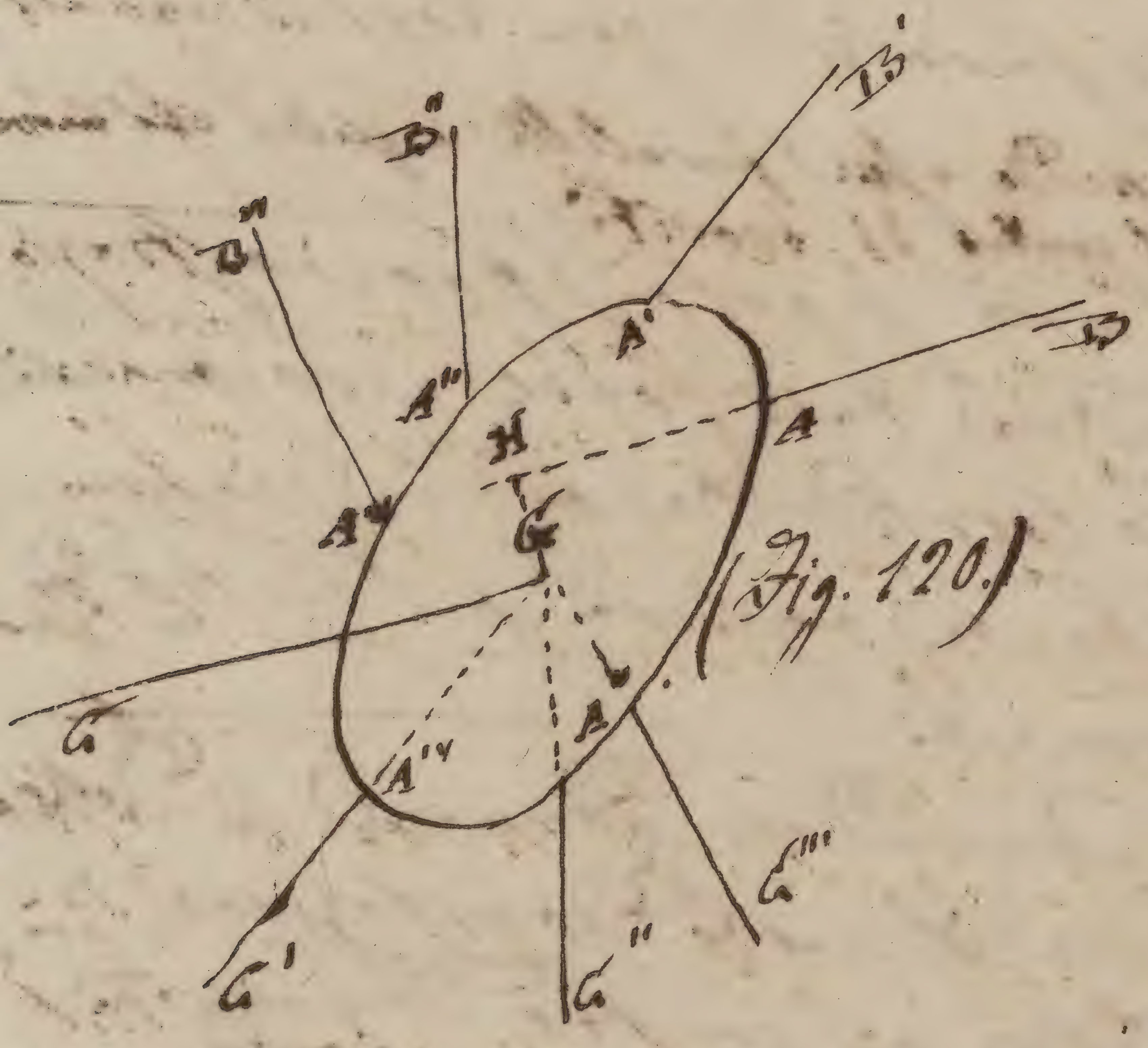
Lezione 17.

hanno tutte le equazioni necessarie pel moto del centro di gravità. E' però necessario avvertire che in pochi casi s'arriva ad integrare le equazioni da cui questi due moti dipendono.

§. 627. Agevole riesce ora il determinare il doppio moto di un solido. —

Poniamo F, F', F'' &c siano delle forze istantanee, le quali agiscano sul solido (Fig 120) nei punti A, A', A'' &c. Poichè le intensità di queste forze si suppongono date, saranno date pure le velocità che esse imprimerebbero se ciascuna fosse sola. Siano v, v', v'' &c le velocità corrispondenti alle forze F, F', F'' &c e sia M la massa si avrà

$F = Mv,$
$F' = Mv',$
$F'' = Mv''$
— — — ; ma G essendo per ipotesi il centro di gravità del solido $A'A''A'''$ &c il punto G si moverà come se la massa M vi fosse riunita, e che le forze F, F', F'' &c vi fossero applicate parallelam.te a se stesse conservando la loro intensione. Da G si protraggano le GG, GG', GG'' rispett.te parallele alle direzioni $BA, B'A', B''A''$ &c delle forze F, F', F'' &c. Sulle rette GG, GG', GG'' a cominciare da G si notino delle porzioni che siano fra loro come le forze



(Fig. 120.)

F, F', F'' &c. o come le velocità
v, v', v'' &c. Presa la risultante
di tali forze, essa sarà in gran-
dezza e direzione la velocità
di G. Dunque il centro di gravità
considerato muovesi con moto
rettilineo ed uniforme con una
velocità uguale a quella che
gli avrebbe comunicata da
F, F', F'' &c. come se ciascuna
di esse fosse applicata al mo-
bile. Frattanto il solido deve
rotare intorno al centro di gra-
vità mobile come se fosse
fisso, e che le forze fossero
applicate riportate al mobile senza
cambiare la loro direzione ed
intensione. Dunque noi po-
tremo riguardare questo centro di
gravità come un punto fisso.
Si determini il momento
principale delle forze F, F' &c.
S. 632 relativo al centro di gra-
vità G, e la direzione del
piano su cui esso giace, la
quale sarà determinata da
G e dalla risultante delle
forze quando ha luogo. —
Il moto di rotazione intorno
a G non dipende che dalla dire-
zione di questo piano e dalla
grandezza di questo momento.
Conosciuta l'una e l'altra
si può determinare il moto
d'una maniera completa
come moto rotatorio. —

Allorchè le forze F, F', F'' non hanno risultante unica, si ridurranno ad una coppia. Queste due forze parallele eguali e contrarie trasportate in G diventeranno eguali contrarie ed opposte, ed in tal caso il centro di gravità non avrà movimento progressivo ma soltanto rotatorio. Se poi le F, F', F'' hanno risultante unica che passi per G, non vi avrà moto di rotazione. Tutti i punti del solido saranno allora trasportati nello spazio con una velocità comune eguale e parallela a quella del centro di gravità G.

§. 648. Per considerare un caso particolare, poniamo che il solido sia messo in moto dall'azione di una sola forza istantanea che diremo F, e poniamo che passi per G e poniamo che la direzione della forza sia perpend. ad uno dei tre assi principali del solido, i quali s'tagliano in G. Intorno a questo asse ruoterà il solido come se fosse fisso §. 615, ed avendo ciò luogo al principio del moto, avrà luogo per tutta la durata del moto stesso; ma il mobile

ruota intorno al suo centro di gravità come se esso fosse fisso; dunque l'asse princip. le sarà trasportato nello spazio parallellamente a sè stesso unitamente al centro di gravità e durante tal tempo il mobile ruoterà uniformemente intorno al suo asse.

Sia M la massa o la velocità del centro di gravità di lui che sarà parallela alla forza F. e sia GH = f la perpend. (fig. 120) la perpend.re che su F si calcolò. Il prodotto F.f. sarà il momento di F. relativamente al centro G. Rappresentato da A il momento d'inerzia di M rispetto all'asse di rotazione, e da ω la velocità angolare d'intorno a quest'asse figurato fisso, si avrà la

(30) $\omega = \frac{M\,o\,F}{A}$ §. 589

§. 629. Dietro il dimostrato, il moto che si considera sarà, in uno stato stabile, se A è il massimo o il minimo dei momenti d'inerzia - - - - - - -

Tralasciato.

Capitolo I.

Del moto di un solido sopra un piano immobile

§. 650. Prendiamo in considerazione un solido terminato da una superficie continua di cui sia data l'equazione, i punti del quale sieno sollecitati da forze date in intensione e direz.e in virtù delle quali il solido ruoti sopra un piano fisso di modo che si tocchi in un punto solo ove il solido tocca il piano.

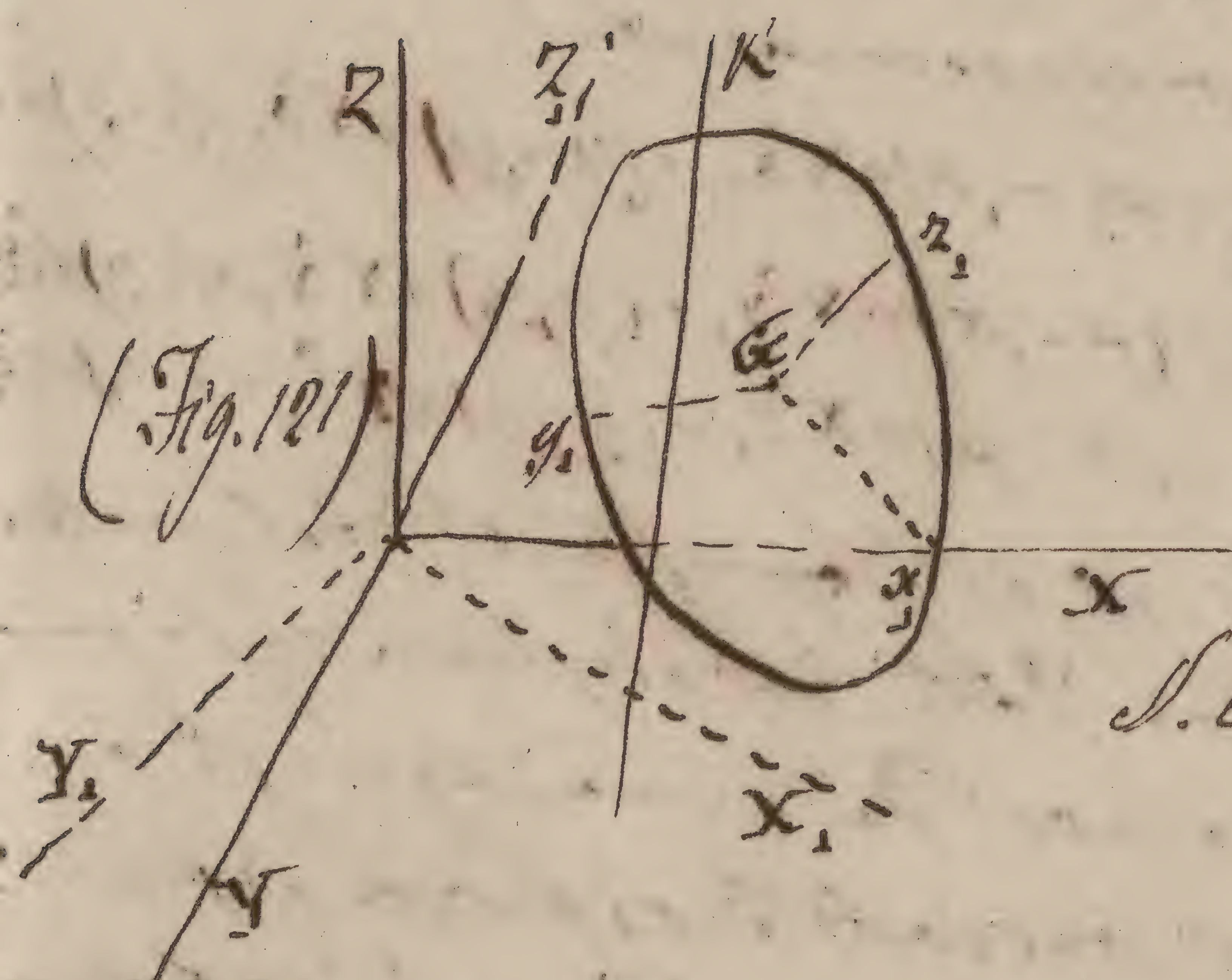
Le quantità di moto perdute dai differenti punti del corpo in un istante qualunque dovranno equilibrarsi mediante del piano fisso. Così fatte forze avranno dunque una risultante unica ~~che~~ passa pel punto di contatto, ed è perpend. al piano fisso che è tangente la superf.e la quale dev esser normale alla superficie medesima. Cotesta risultante verrà distrutta dalla resistenza del piano fisso, e per conseguenza esprimerà la pressione contro il piano. Essa esser debbe poi tale

che lo spinga contro il piano e però abbia la direzione della porzione di normale che cade fuori del corpo, e la resistenza del piano sarà diretta alla normale entro il piano. Dunque se si aggiunga alle forze date che sollecitano il solido, una forza agente secondo la parte di normale compresa entro il solido, e in ciascun istante presenti la resistenza del piano fisso, si potrà considerare il solido come al tutto libero. Dal che consegue, che il centro di gravità si muoverà della stessa guisa, che se la massa intera vi fosse riunita, e che tutte le forze comprese la resistenza del piano fossero applicate al centro di gravità parallellam.e a se stesse senza cambiare intensione d. Se. Inoltre, si formeranno le equazioni del moto di rotazione intorno al centro di gravità considerato fisso avendo rispetto alle forze date e alla resistenza del piano; le quali conterranno quattro quantità incognite, ciò sono resistenza piano fisso, e le coordinate del suo punto d'applica-

zione che in generale cambiano
nella superficie. Dunque è necessario trovare le equazioni che servano a trovare le le incognite, ed allora si determinerà il doppio moto del solido. —

Il punto d'applicazione della forza incognita è il punto di contatto del piano colla superficie del corpo, quindi fra le tre coord.e di questo piano si avranno le due equazioni del piano tangente e della superficie toccata. Inoltre per esprimere un piano tangente ad una superficie si hanno due condizioni: Dunque si hanno quattro equazioni. —

§. 651. Vediamo come realmente si formano queste equazioni, e per semplicità poniamo che il piano fisso sia uno dei coordinati l'(x, y) ad esempio. Si osservi la (Fig. 121.) —



(Fig. 121)

In questo piano gli assi x, y sono ortogonali, e però l'asse delle z sarà a questo piano normale. Siano x, y, z le coordinate di un punto qualunque m del mobile riferite agli assi fissi coord.i AX, AY AZ. Sia G il centro di gravità del solido m x_1, y_1, z_1, di cui le coord.i ortogonali riferite ai

medesimi assi sieno ${}_1x, {}_1y, {}_1z$. —
Poniamo che GX, GY, GZ, sieno i tre assi principali che tagliansi in G, ed $x_1\ y_1\ z_1$ le coord. di m relative a questi assi. Per A si protraggano tre assi AX_1, AY_1, AZ_1 rispett.e paralleli agli GX_1, GY_1, GZ_1, e per l'Id. sussisteranno le tre equazioni

(1) $x = {}_1x + x_1 \theta X\hat{X}_1 + y_1 \theta X\hat{Y}_1 + z_1 \theta X\hat{Z}_1$,

(2) $y = {}_1y + x_1 \theta Y\hat{X}_1 + y_1 \theta Y\hat{Y}_1 + z_1 \theta Y\hat{Z}_1$.

(3) $z = {}_1z + x_1 \theta Z\hat{X}_1 + y_1 \theta Z\hat{Y}_1 + z_1 \theta Z\hat{Z}_1$.

e reciprocamente

(4) $x_1 = (x - {}_1x)\theta X\hat{X}_1 + (y - {}_1y)\theta Y\hat{X}_1 + (z - {}_1z)\theta Z\hat{X}_1$

(5) $y_1 = (x - {}_1x)\theta X\hat{Y}_1 + (y - {}_1y)\theta Y\hat{Y}_1 + (z - {}_1z)\theta Z\hat{Y}_1$

(6) $z_1 = (x - {}_1x)\theta X\hat{Z}_1 + (y - {}_1y)\theta Y\hat{Z}_1 + (z - {}_1z)\theta Z\hat{Z}_1$

Ciò posto la superficie del mobile sarà data in ciascun caso particolare da una equaz. a tre variabili riferita a tre ~~[illegible]~~ assi coord.i nell' interno di lui e sieno Gx_1, Gy_1, Gz_1, e la superf.e sarà data dalla

(7) $L = 0$. Sostituendo a vece di x_1, y_1, z_1 i loro valori dati dalle (4) (5) (6) la L diventerà una funzione di $x\ y\ z$ ed appresso la sostituzione la (7) presenterà la med.a superficie ma riferita agli assi AX, AY, AZ. rispetto ai quali si riferisce il moto.

Sieno x', y', z' le coord.e ve-

bili del punto di contatto della superf.e di I_1 riferita agli assi x_1, y_1, z_1. L'equazione del piano tangente pel c.d., vien data dalla

(8.) $\left(\frac{dI_1}{dz}\right)(z'-z)+\left(\frac{dI_1}{dy}\right)(y'-y)+\left(\frac{dI_1}{dx}\right)(x'-x)=0$, equazione del piano tangente la superf.e nel punto x, y, z. Supposto che vi sia punto di contatto della superficie e del piano in cui si muove, la (3) si muta nella

(9) $z_1+x_1\theta z^2 x_1+y_1\theta z^2 y_1+z_1\theta z^2 z_1=0$
L'equazione del piano (x, y) è $z'=0$, alla quale si debbe ridurre la (8) nelle fatte ipotesi; ma $z=0$, dunque nell'(8) esser debbe

(10) $\left(\frac{dI_1}{dy}\right)=0$,

(11) $\left(\frac{dI_1}{dx}\right)=0$. Senza sostituire alla I_1 i valori anzidetti di x_1, y_1, z_1 osservando che le coord.i della superf.e sono funzioni di x, y, z queste coord.e saranno variabili e di conseguenza si avranno le seguenti equazioni

(12) $\left(\frac{dI_1}{dx}\right)=\left(\frac{dI_1}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{dx}+\left(\frac{dI_1}{dy_1}\right)\frac{dy_1}{dx}+\left(\frac{dI_1}{dz_1}\right)\frac{dz_1}{dx}$,

(13) $\left(\frac{dI_1}{dy}\right)=\left(\frac{dI_1}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{dy}+\left(\frac{dI_1}{dy_1}\right)\frac{dy_1}{dy}+\left(\frac{dI_1}{dz_1}\right)\frac{dz_1}{dy}$. Gli angoli $\hat{X}X_1$, $\hat{Y}X_1$, ... sono costanti: prendendo adunque le derivate delle equa-

zioni (4) (5) (6) rispetto ad x ed y, avremo

(14) $\left(\frac{dx_1}{dx}\right) = \cos X\hat{X}_1$,

(15) $\left(\frac{dy_1}{dx}\right) = \cos X\hat{Y}_1$,

(16) $\left(\frac{dz_1}{dx}\right) = \cos X\hat{Z}_1$,

(17) $\left(\frac{dx_1}{dy}\right) = \cos Y\hat{X}_1$,

(18) $\left(\frac{dy_1}{dy}\right) = \cos Y\hat{Y}_1$,

(19) $\left(\frac{dz_1}{dy}\right) = \cos Y\hat{Z}_1$, per questi valori le (12) e (13) divengono surrogate dalle

(20) $\left(\frac{dI_1}{dx}\right) = \left(\frac{dI_1}{dx_1}\right)\cos X\hat{X}_1 + \left(\frac{dI_1}{dy_1}\right)\cos X\hat{Y}_1 + \left(\frac{dI_1}{dz_1}\right)\cos X\hat{Z}_1$,

(21) $\left(\frac{dI_1}{dy}\right) = \left(\frac{dI_1}{dx_1}\right)\cos Y\hat{X}_1 + \left(\frac{dI_1}{dy_1}\right)\cos Y\hat{Y}_1 + \left(\frac{dI_1}{dz_1}\right)\cos Y\hat{Z}_1$, e però a vece delle (10) (11) avremo le

(22) $\left(\frac{dI_1}{dx_1}\right)\cos X\hat{X}_1 + \left(\frac{dI_1}{dy_1}\right)\cos X\hat{Y}_1 + \left(\frac{dI_1}{dz_1}\right)\cos X\hat{Z}_1 = 0$,

(23) $\left(\frac{dI_1}{dx_1}\right)\cos Y\hat{X}_1 + \left(\frac{dI_1}{dy_1}\right)\cos Y\hat{Y}_1 + \left(\frac{dI_1}{dz_1}\right)\cos Y\hat{Z}_1 = 0$. Le (7) (9) (22) e (23) sussistono contemporaneamente per le coordinate (x_1, y_1, z_1) del punto di contatto m, e sono le equazioni che aggiungere si debbono alle equazioni del moto del solido

quando si considera libero per
avere ec. delle equazioni
in ciascun caso che venga
proposto.

Capitolo L.II.

Dell' urto di due solidi

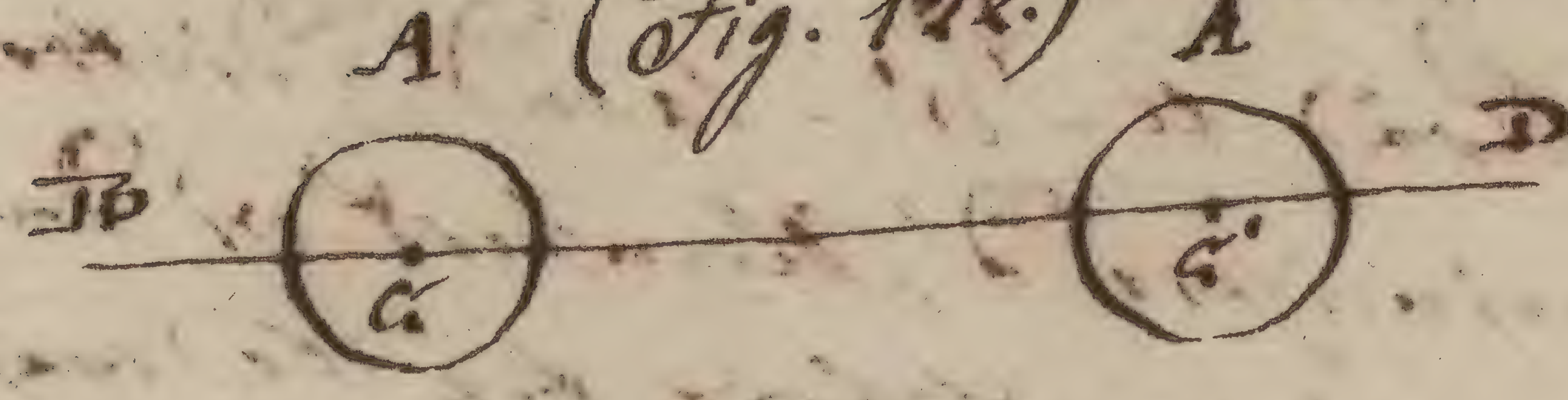
Lezione 18.

= §. 652. Tutti i corpi in Natura hanno più o meno di compressibilità, e quando una causa qualunque li ha compressi essi tendono quali più quali meno a riprendere la rispettiva forma. Così fatta tendenza nomasi elasticità. Un corpo è perfettamente elastico quando riacquista la pristina forma subito che cessa la compressione. L'elasticità non è in ragione della compressibilità. Ad es. l'aria e i gas sono elastici e compressibili. Ma vi sono dei corpi privi d'elasticità ed altri non compressibili. Daremo principio dai corpi privi d'elasticità ossia da' duri, ~~e~~ da' poi dagli elastici.

Consideriamo il caso più semplice il quale è che i due solidi sieno due sfere omogenee i centri delle quali si moveranno su la stessa retta, e ciascheduno di loro punti passi nel moto delle rette a questa parallele.

Tutto essendo simile intorno alla figurata retta, è patente che l'urto non potrà imprimere moto di rotazione alle due sfere. Onde

Appresso l'urto i loro punti descriveranno delle rette parallelle a quella che unisce i loro centri con una velocità comune che andiamo a determinare ——



(Fig. 122.)

Siano A, A' due sfere omogenee prive affatto d'elasticità e i loro centri si muovano sulla BD, e vadano da B verso D e che la velocità di A sia maggiore di quella di A'. La sfera A si dovrà in qualche punto abbattere colla A'. Ma quando due solidi s'incontrano essi si comprimono, e la compressione durerà finchè le due sfere abbiano una velocità comune: la qual cosa si opera in un istante tanto più breve quanto più sono meno compressibili, ossia quanto più sono duri. Egli è mestieri supporre un certo grado di compressibilità anche nei più duri, per modo chè urtandosi si comprimano durando in tale compressione alle volte per piccolissimo tempo. Dopo ciò le sfere ristituiranno la forma che hanno e seguiteranno a muoversi con una velocità comune, come se fosse un solido solo. ——

Le velocità di A, A' sieno v, v' avanti l'urto; m, m' le loro masse, u la velocità comune dopo l'urto. La velocità perduta di A sarà $v-u$, e quella guadagnata da A' sarà $u-v'$, laonde dietro il principio d'Alembert vi deve avere equilibrio fra le masse m, m' animate dalle velocità $v-u$, $u-v'$; ma per l'equilibrio le masse esser debbono in ragion reciproca delle velocità dalle quali sono animate, dunque si avrà

$m : m' :: u-v' : v-u$, e però

(1) $m(v-u) = m'(u-v')$ da cui la

(2) $u = \frac{mv+m'v'}{m+m'}$. Se le direzioni delle due sfere fossero opposte supposta la velocità di A positiva, quella di A', ossia v' sarà negativa, e le due sfere si verranno incontro e dalla (2) in tal caso si ha

(3) $u = \frac{mv-m'v'}{m+m'}$, e la direzione di questa velocità sarà nel senso della velocità di A se $mv > m'v'$; o di A' se $m'v' > mv$.

§.653. Giova osservare che il solo effetto di due solidi non elastici è di congiungere in una le due masse la quale ha la stessa velocità, che se le forze che agiscono sui due moti agissero sulla massa formata dalle due conservata la direzione delle forze.

Diffatti, sia F una forza che comunica la velocità v ad una massa m, e pel §. 567, comunicherà alla massa $m+m'$ la velocità

$$\frac{mv}{m+m'}.$$

Sia la forza F' che alla massa m' imprime la velocità v'; se agisse sulla $m+m'$, v'imprimerebbe la velocità

$\frac{m'v'}{m+m'}$; onde la velocità dovuta all'azione contemporanea delle forze sarà

$$\frac{mv}{m+m'}+\frac{m'v'}{m+m'}=\frac{mv+m'v'}{m+m'}.$$

Se le forze sono opposte si ha $\frac{mv-m'v'}{m+m'}$. Come è

§.654. Se una delle due masse m ed m', la m' ad es. sia in riposo prima dell'urto e sia grandissima rispetto

ad m, allora $v'=0$, e la velocità dopo l'urto sarà $\frac{mv}{m+m'}$ che sarà frazione piccolissima e però per nulla.

In natura nessun punto è fisso, ma essendovi delle masse indeterm.e grandi rispetto ai corpi in moto, ciò accade pei corpi che urtano la terra.

§. 655. Al §. 416. abbiamo detto, che la forza viva di un corpo in moto è il prodotto della massa di lui nel quad.o della velocità con cui si muove. Unendo insieme i due casi del moto delle due sfere, si avrà la

(4.) $(m+m')u = mv \pm m'v'$. Moltiplicata questa per $2u$ si ha

(5) $2(m+m')u^2 = 2u(mv \pm m'v')$

Formiamo la

(6) $mv^2 + m'v'^2 + (m+m')u^2 = mv^2 + m'v'^2 + (m+m')u^2$, identica.

Sottraendo la (5.) dalla (6) il residuo sarà

(7) $mv^2 + m'v'^2 - (m+m')u^2 = mv^2 + m'v'^2 - 2u(mv \pm m'v') + (m+m')u^2$

ovvero la

(8.) $mv^2 + m'v'^2 - (m+m')u^2 = m(v-u)^2 + m'(u \mp v')^2$; la quale mostra che la diminuzione della somma delle forze vive, equa-

glia la somma delle forze vive perdute o guadagnate dal mobile.

§.656. Conosciute le leggi dell'urto dei solidi al tutto privi d'elasticità agevole si è dedurne le leggi dell'urto dei solidi perfettamente elastici.

Prendiamo dapprima in considerazione ciò che succede quando un solido elastico viene ad urtare un piano duro perfettamente in direzione perpend. al piano stesso.

L'osservazione ci mette davanti che il corpo urtante si comprime contro il piano allargandosi la porzione di piano stesso su cui sta a contatto. In ciò il mobile perde grado grado la sua velocità, e quando questa è totalmente distrutta cessa la compressione; fin qui come ne' corpi duri. Da questo istante poi il solido comincia a riprendere la pristina forma: il diametro del solido perpendicolare al piano va grado a grado aumentandosi, diminuendosi il piano di contatto. Durante quest'operazione, la velocità perduta gli è restituita, ma in senso contrario e coi medesimi gradi con cui gli fu tolta. Di guisa che supposta perfetta la elasticità

del mobile egli vi prende una velocità eguale a quella che avea prima dell'urto. Riguardo dunque all'elasticità, essa gli restituisce la velocità che avea prima dell'urto. Trattandosi ad es. di un corpo che cade ed urta su di un piano duro, la compressione gli toglierebbe la velocità; dipoi l'elasticità gli restituirebbe una velocità capace di farlo salire all'altezza d'onde è disceso. Nel caso dell'elasticità imperfetta, la velocità riacquistata sarebbe minore della perduta, e però risalirebbe a minore altezza. Presentasi quindi un mezzo semplicissimo per confrontare i diversi gradi d'elasticità.

§. 651. Supponiamole 2 sfere perfettamente elastiche, e cerchiamo le velocità rispettive appresso l'urto scambievole ritenute m, v, m', v' le velocità avanti l'urto.

Poniamo primamente che le due sfere si movano per lo stesso verso e v > v': allorchè le due sfere si raggiungono, si premono mutuamente finchè perdono le velocità; allora A ha perduto v-u, ed A' ha guadagnato v'-u. Arrivate a

tale stato le due sfere non si comprimono davvantaggio; ma cessato l'urto, le cose non sono più le medesime, mentre le due sfere tendono a ricondurre i mobili alla primiera forma non rimanendo in tale stato che piccolissimo tempo.— La sfera A tornerà indietro colla velocità $v-u$, il che porta una perdita di velocità $v-u$; ma ne aveva perduto $v-u$, dunque la perdita totale della velocità di A sarà $2(v-u)$. Per analoga ragione la velocità guadagnata da A' sarà $2(u-v')$. ———

Siano V, V' le velocità di A ed A' dopo l'urto; per il detto si avranno le

(9) $V = v - 2(v-u) = 2u - v$

(10) $V' = v' + 2(u-v') = 2u - v'$; ma la velocità u sarà comune fra al principio dell'azione della elasticità, dunque sostituendo

(3) $u = \frac{mv+m'v'}{m+m'}$, sostituendo alle

(9) (10) avremo

(11) $V = 2\frac{mv+m'v'}{m+m'} - v = \ldots\ldots = \frac{2mv+2m'v'-mv-m'v}{m+m'}$,

(12) $V' = 2\frac{mv+m'v'}{m+m'} - v' = \ldots = \frac{2mv+2m'v'-mv'-m'v'}{m+m'}$, ovvero le

(13) $V = \frac{(m-m')v + 2m'v'}{m+m'}$,

(14) $V' = \frac{(m'-m)v' + 2mv}{m+m'}$. ———

Che $m=m'$, ne deriva
$V=v'$, e $V'=0$. Il che ci mostra che dopo l'urto ciascuna sfera si move colla velocità che aveva l'altra avanti l'urto.

Se poi i due mobili si movono in senso contrario, le (10) (13) e (14) si muteranno nelle

(15) $V' = 2u + v'$

(16) $V = \frac{(m-m')v - 2m'v'}{m+m'} = \frac{mv - m'(v+2v')}{m+m'}$

(17) $V' = \frac{(m-m')v' + 2mv}{m+m'} = \frac{m(v'+2v) - m'v'}{m+m'}$.

Se ~~m=m'~~, $v=v'$, le (16) e (17) si mutano nelle

(18) $V = \frac{m-3m'}{m+m'}v$,

(19) $V' = \frac{3m-m'}{m+m'}v$. Nel caso che sia $m' = \frac{1}{3}m$, restando le v, v' eguali, si ha
$V=0$, e $V'=2v$. E però la sfera A resterà immobile dopo l'urto, e la A' ritornerà indietro con una velocità doppia di quella che aveva ~~...~~ prima la A avanti l'urto. Dalle (16) (17) si mostra che la A si fermerà, continuerà la sua strada o tornerà indietro secondo chè sarà zero, positivo, o negativo il numeratore della (16).

Allorchè A' è in quiete, ossia $v'=0$ le (16) e (17) riduconsi alle

(20) $V = \frac{(m-m')v}{m+m'}$

(21) $V' = \frac{2mv}{m+m'}$; posto $m = m'$, si mutano nelle

$V = 0$, $V' = v$. Vale a dire la sfera urtante si ferma dopo l'urto e l'urtata si move con la velocità che l'urtante aveva prima dell'urto. —

Nel giuoco del Bigliardo se una palla in moto urti una a lei eguale in quiete si avrà il caso suespresso, e però la palla urtante dovrà fermarsi e la urtata dovrà dopo avere la velocità della prima.

Dal che consegue, che se più sfere eguali siano disposte su di un piano orizzontale con i loro centri sulla stessa retta, e si comunichi alla 1.a la velocità v, le intermedie staranno ferme e l'ultima si moverà colla velocità v. Se nello stesso tempo si comunichi alle 2 prime sfere la velocità v, non vi sarà urto; ma quando urtano le 2 seguenti queste si fermano e le altre due si movono, e così fino alle 2 ultime che si moveranno colle velocità delle due prime. —

Si dica lo stesso per un N.o qualunque di sfere urtanti ed urtate

Se la massa della sfera urtante sia maggiore della urtata, se nelle (20) (21) de' u, u' risultano positive e le due sfere andranno nel senso di m. Quando $m < m'$, sarà v negativo e v' positivo.

Ripetizione 19.
Lezione 20.

§. 658. Si è toccato del come si possano confrontare tra se i diversi gradi d'elasticità di diversi solidi. Se una sfera si lasci cadere da una certa altezza su di un piano durissimo ed immobile, e l'elasticità sia perfetta, la sfera dopo l'urto dovrà risalire all'altezza da cui è caduta; se la sfera non è perfettamente elastica salirà ad altezza minore. Si prenda per unità di misura l'altezza dell'elasticità perfetta e per n l'altezza per una sfera imperfettamente elastica, la n misurerà l'elasticità. Se due sfere sieno imperfettamente elastiche A.A' e la loro elasticità sia misurata da n; e però quando la elasticità non è perfetta ed è misurata da $n < 1$ la velocità perduta da A sarà quando è perfetta l'elasticità (a)

(a) $v - u + 1(v-u) = 2v - 2u$. Quando non è perfetta sarà $v - u + n(v-u) = (n+1)v - (n+1)u$;

ossia

(22) $V = v - (n+1)v + (n+1)u = (n+1)u - nv$.

La velocità guadagnata da A' è

$u - v' - nu - nu' = (n+1)v - (n+1)v'$ e però

(23) $V' = v' + (n+1)u - (n+1)v' = (n+1)u - nv'$

Ponendo nelle (22), (23), il valore di n dato dalla (3) si avrà

$$V=(n+1)\frac{mv+m'v'}{m+1}-nv),$$

$$V'=(n+1)\frac{mv+m'v'}{m+m'}-nv',$$ che riduconsi alle

$$(24)\quad V=\frac{mv+m'((n+1)v-nv')}{m+m'},$$

$$(25)\quad V'=\frac{m'v'+m((n+1)v-nv')}{m+m'}.$$

Facendo $n=0$, nelle (24), (25) si ottiene la velocità comune dei due corpi dopo l'urto, duri come facilmente si verifica. Supposto $n=1$, si hanno le velocità dopo l'urto dei due corpi considerati perfettamente elastici.

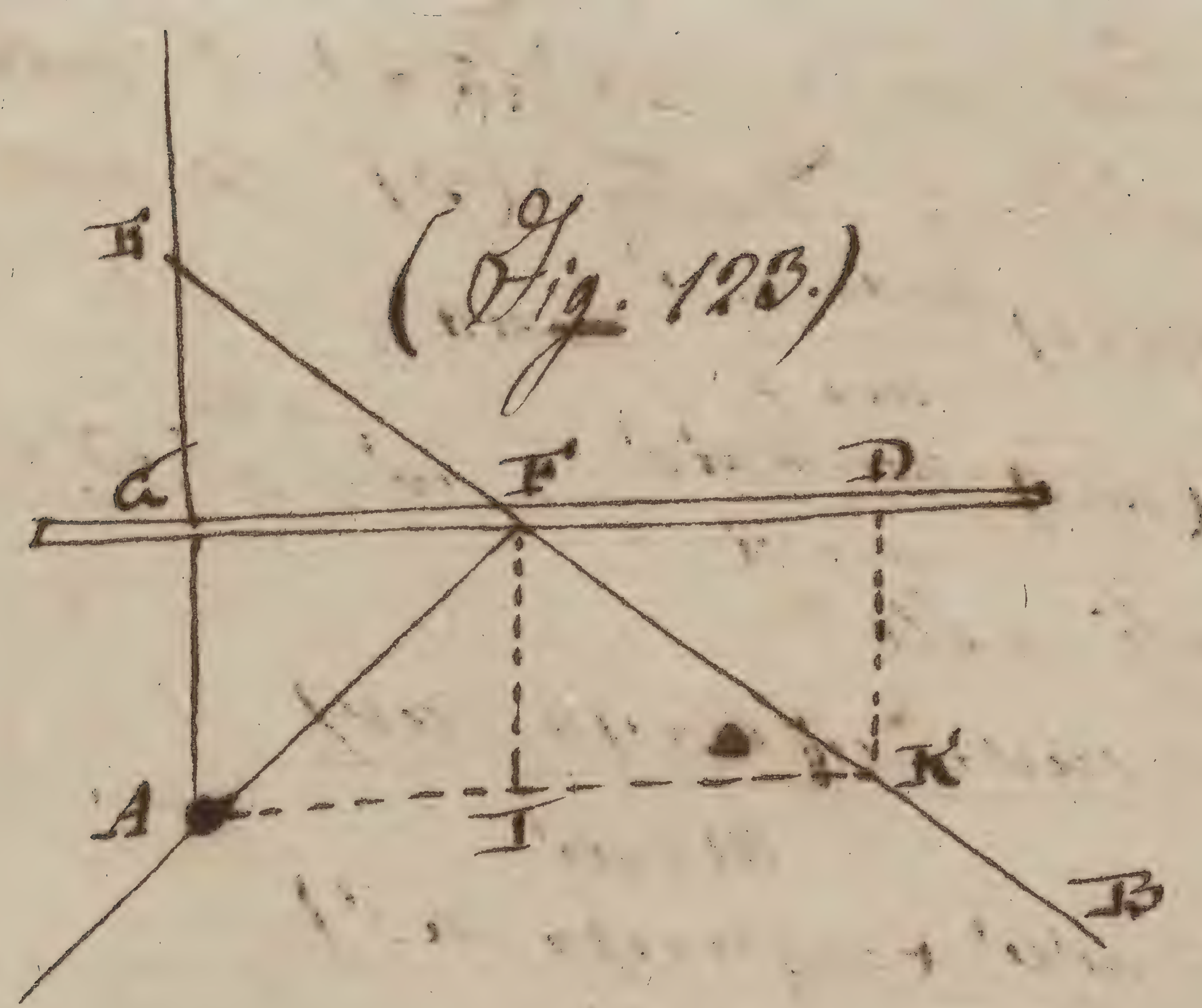
§. 659. Qualunque ipotesi si faccia sulle velocità v, v' danno luogo a dei teoremi che metteremo davanti. ponendiamo il caso che le due sfere abbiano la stessa direzione: ciò ss semplicità, mentre solo cambiarsi dee v' in $-v'$.

Sottratta la (10) dalla (9) il residuo è

(26) $V-V'=v-v'$; la quale mostra, che la differenza delle velocità dopo l'urto è eguale ed opposta alla diff.^za delle velocità avanti l'urto. La (26) ci mette ancora davanti che in tempi di tempi eguali i mobili sono alla med.^a distanza fra se.

§. 660. Si osservi la fig. (123).

Sia CD un piano fisso, A



(Fig. 123.)

una palla perfettamente elastica spinta contro di lui in direzione obbliqua con una velocità $v = AF$. Decomposta questa in due, l'una FI normale e l'altra AI parallela ad esso (prescindendo dell'attrito), la perpendicolo al piano se sola esistesse dovrebbe comunicare alla palla la velocità FI diritta da F verso I. Allorchè dunque la palla A è arrivata in F è soggetta all'azione di due forze $FD = FG$, FI; dunque la palla tornerà indietro nella direzione FB colla velocità FK. — Dal che rendesi aperto che quando una palla perfett.te elastica va ad urtare un piano immobile torna indietro facendo l'angolo d'incidenza eguale a quello di riflessione —

Moltiplicando rispett.te per m, m' i quadrati delle (13) e (14), e dappoi sommando si ha

$$mV^2 + m'V'^2 = \frac{m(m-m')^2v^2 - 4mm'vv'\cdot}{(m+m')^2}$$

$$\frac{(m-m') + 4m'^2mv'^2}{(m+m')^2} + \frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{m'(m-m')^2v'^2 - 4mm'vv'(m-m') + 4m^2m'v^2}{(m+m')^2}$$

$$= \frac{(mv^2+m'v'^2)(m+m')^2}{(m+m')^2}, \text{ ossia}$$

(27) $mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2$, la quale pone davanti la somma delle forze vive prima dell'urto eguagliare la somma delle forze vive dopo l'urto nei corpi elastici.

§. 661. L'urto di due sfere elastiche o dure, non altera per nulla il moto del centro di gravità del sistema da esse formato. —

Nelle rette descritte dalle due sfere, si prenda un punto fisso ad arbitrio, e siano δ, δ' le distanze variabili dei centri delle due sfere da cosiffatto punto, ed x la distanza da questo punto del centro di gravità del sistema delle sfere ~~ferme~~.

Ponendo mente che i pesi sono proporzionali alle masse, ad avere x, si ha

(28) $(m+m')x = m\delta + m'\delta'$; prendendone la derivata relativamente al tempo, si ha

(29) $(m+m')\frac{dx}{dt} = m\frac{d\delta}{dt} + m'\frac{d\delta'}{dt}$. —

Osserviamo che $\frac{d\delta}{dt}$, $\frac{d\delta'}{dt}$, sono le velocità dei due mobili alla fine del tempo dt; $\frac{dx}{dt}$ rappresenta la velocità del centro di gravità del sistema nello stesso tempo. Dunque si ottiene la velocità di cosiffatto centro se nella (29) si ponga

$\frac{d\delta}{dt} = v$, $\frac{d\delta'}{dt} = v'$. —

Per avere la velocità di cosiffatto centro dopo l'urto si dovrà porre

$\frac{d\delta}{dt} = V$, $\frac{d\delta'}{dt} = V'$. —

Poniamo che avanti l'urto sia $\frac{dx}{dt} = y$, e dopo l'urto sia $\frac{dx}{dt} = y_1$, ed avremo

(30) $y = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$,

(31) $y_1 = \frac{mV + m'V'}{m + m'}$. Osserviamo, che il valore di y, non è che quello di x dato dalla (3); dunque quando le sfere sono perfettamente dure il moto del centro di gravità dopo l'urto rimane lo stesso, avremo dunque $V = V' = u$. onde per la (31) $y_1 = u$, e per la (30) $y = y_1$.

Se le due sfere siano perfettamente elastiche si hanno le

(9) $V = 2u - v$;

(10) $V' = 2u - v'$, dunque la

(32) $y_1 = \frac{2mu - mv + 2m'u - m'v'}{m + m'} = \frac{2u(m + m')}{m + m'} - \frac{mv + m'v'}{m + m'} = 2u - y$: ma $y = u$, dunque $y_1 = y$, anche pei corpi elastici.

Dovremo dunque conchiudere, che per 2 sfere perfett. elastiche o perfettamente dure la velocità del centro di gravità da esse formato è lo stesso dappoiché e dopo l'urto.

§. 662. Il moto di un solido nello spazio è determinato, quando in ciaschedun istante si conosca

1°. La velocità e direzione del suo centro di gravità.

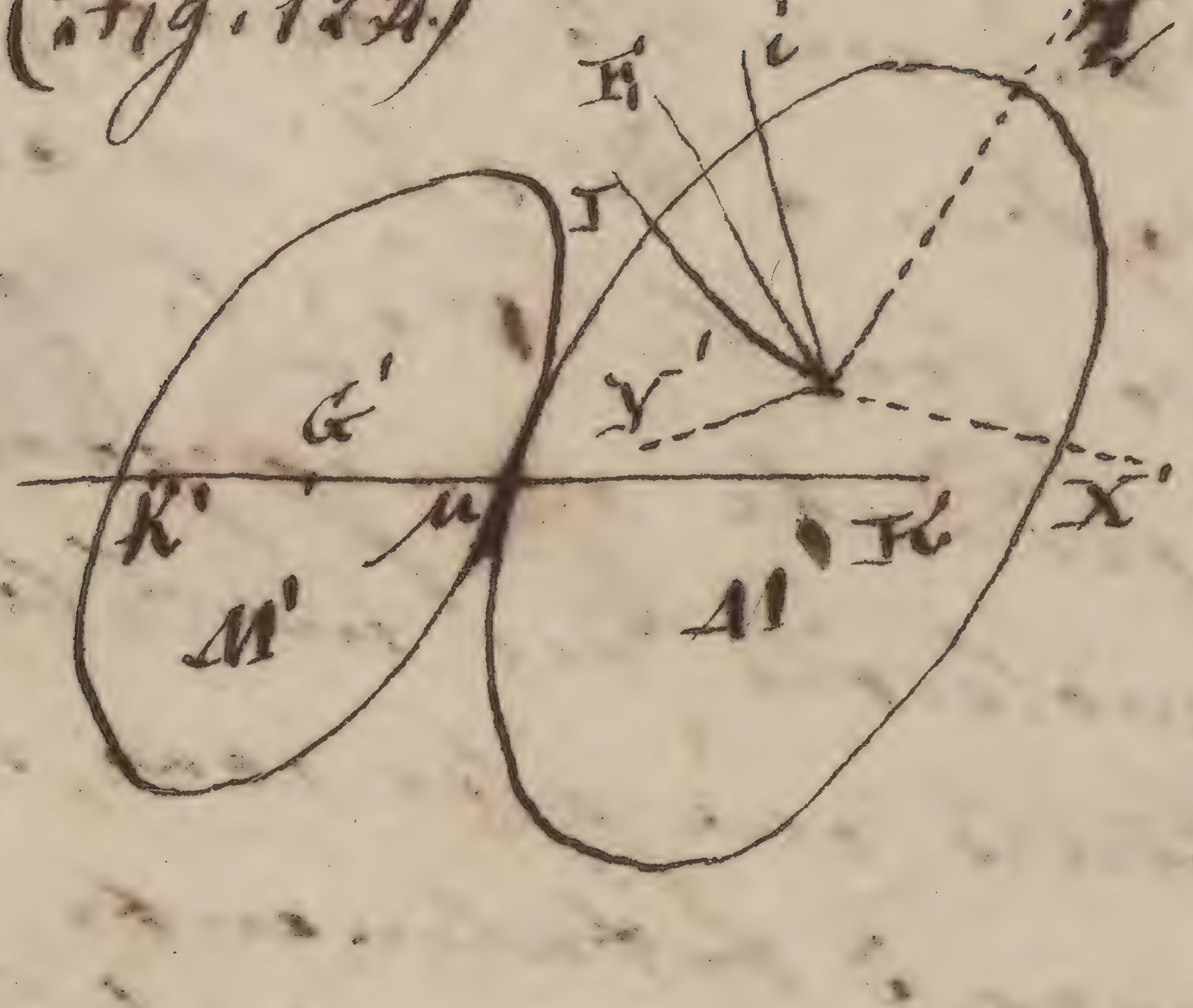
2°. La direzione dell'asse istantaneo di rotazione.

3°. La velocità angolare di rotazione intorno all'asse stesso.

L'effetto dell'urto mutuo di due solidi in moto, è in generale di mutare repente cosifatto movimento. Poniamo che essi siano consistenti al momento dell'urto. Per sciogliere il problema in cui istante, basta conoscere le variazioni subite dalle tre condizioni nell'urto dei due corpi.

Fatta astrazione dapprima dalla elasticità, cioè che i corpi siano perfettamente duri: sarà mestieri apprendere il principio di d'Alembert, che l'equilibrio abbia luogo fra le quantità di moto perdute o guadagnate nell'urto da tutte le molecole dei mobili.

(Fig. 124)



Siano (fig. 124) M, M', i due mobili, e poniamo che all'istante dell'urto le loro superficie si tocchino in un sol punto μ, e sia K'μK la normale comune alle due superficie. Nell'urto i due solidi s'appoggeranno l'uno all'altro nel loro punto di contatto μ, laonde, se vogliasi che delle forze qualunque applicate ai punti M, M' si facciano equilibrio mediante cotesto punto d'appoggio, sarà necessario che tutte le forze di M si compongano in una diritta secondo μK', e quelle di M' in-

una diretta, ed eguale diretta da M verso K. Le quantità di moto che l'urto fa perdere o guadagnare avranno una risultante unica diretta normalmente alle due superficie nel punto di contatto. L'intensione di questa forza sarà la stessa pei due mobili eguale ed opposta alla percossa dai due mobili risentita che si esercita sui due solidi M, M' secondo le direzioni MK M'K' figurata applicata all'uno ed all'altro solido una forza sconosciuta che rappresenti siffatta percossa, e che presenteremo per N, potremo considerare isolattamente ciascuno dei due mobili; laonde rispetto a ciascuno di essi vi avrà equilibrio fra la N e le quantità perdute o guadagnate dalle molecole del mobile. Si è veduto che esse sono sei se il corpo è totalmente libero e sono meno se è trattenuto da un'asse fisso.

Prendiamo in considerazione il caso che il mobile sia totalmente libero.

§.663. Pel centro di gravità G di M si protraggano tre assi ortogonali GX', GY', GZ' fissi nel corpo e mobili con lui nello spazio; sia v, la velocità di G, e GH la direzione di lei nell'istante

dell'urto; si faccia e = al coseno dell'angolo che fa HG con X',

$f = \cos HG\hat{Y}'$

$h = \cos HG\hat{Z}'$, e le componenti di v nella direzione dei tre assi GX', GY', GZ' saranno rispett.

ev, fv, hv.

Sia GI, la direzione dell'asse istantaneo di rotazione, ed ω la velocità angolare intorno a questo asse. In generale abbiamo

(33) $\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$, ritenendo p, q, r pel §. 629.

(34) $\cos IG\hat{X}' = \dfrac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$,

(35) $\cos IG\hat{Y}' = \dfrac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$

(36) $\cos IG\hat{Z}' = \dfrac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$, e però

$p = \omega . \cos IG\hat{X}'$.

$q = \omega . \cos IG\hat{Y}'$.

$r = \omega \cos IG\hat{Z}'$. Al momento dell'urto, poniamo

(37) $l = p = \omega \cos IG\hat{X}'$,

(38) $m = q = \omega . \cos IG\hat{Y}'$.

(39) $n = r = \omega . \cos IG\hat{Z}'$.

Siano x_1, y_1, z_1 le coord. di un punto qualunque del mobile paralleli agli assi GX', GY', GZ', e per il dato al §. 631. le componenti secondo gli assi medesimi delle velocità di questo punto sono

$mz_1 - ny_1$, $nx_1 - lz_1$, $ly_1 - mx_1$.

Il mobile avendo un moto di traslazione nello spazio e di rotazione intorno a G la velocità assoluta di ciascun punto è la risultante del moto di traslazione e rotazione. Ma ve, vf, vh, sono le componenti della velocità del centro di gravità, dunque le componenti secondo GX', GY', GZ' della velocità assoluta saranno rispettivamente

$ve - mx_1 - ny_1$, $vf + nz_1 - ly_1$,

$vh + ny_1 - mx_1$.

Poniamo che Gi sia la direzione dell'asse istantaneo; e che Gh sia la direzione del centro di gravità G immediatamente dopo l'urto. Notiamo per u, w' ciò che diventano v, w dopo l'urto. Siano

$x = \theta . Gh\hat{}X'$;

$y = \theta . Gh\hat{}Y'$;

$z = \theta . Gh\hat{}Z'$; ed

$w'\theta iG\hat{}X' = p$,

$w'\theta iG\hat{}Y' = q$.

$w'\theta iG\hat{}Z' = r$ e le componenti relative agli assi x', y', z' della velocità di un punto qualunque appresso l'urto saranno

$ux + qz_1 - vy_1$, $uy + rx_1 - pz_1$,

$uz + py - qz_1$.

Presentando per dm l'elemento della massa del solido il quale corrisponde alle coord. $(x_1\ y_1\ z_1)$ si avrà

$$(ve - ux + z_1(m-q) - y_1(m-r))\,dm,$$
$$(vf - uy + x_1(m-u) + z_1(l-p))\,dm,$$
$$(vh - uz + y_1(l-p) - x_1(m-q))\,dm.$$

che sono le componenti secondo gli assi GX', GY', GZ' delle quantità di moto perdute nell'urto da dm.

Lezione 21.

Siano α, β, γ le coord. del punto di contatto μ riferite ai medesimi assi, e sieno rispett. a, b, c i coseni degl'angoli acuti o ottusi che la normale μk fa con delle parallele a sifatti assi, protratte pel punto di contatto μ, i quali angoli determinano la N; e però le componenti di essa nelle direzioni GX_1, GY_1, GZ_1 saranno aN, bN, cN.

Dopo il detto agevole riesce di applicare alla N ed alle quantità di moto perdute da tutti i punti del solido M le sei equazioni d'equilibrio determinate nella statica, e sono

$$(40)\quad Na + \int(ve - ux + z_1(m-q) - y_1(m-r))\,dm = 0,$$
$$(41)\quad Nb + \int(vf - uy + x_1(m-r) - z_1(m-p))\,dm = 0$$
$$(42)\quad Nc + \int(vh - uz + y_1(m-p) - x_1(m-q))\,dm = 0$$
$$(43)\quad N(\beta a - \alpha b) + \int(ve - ux + z_1(m-q) - y_1(n-r))\,y_1\,dm - \int(vf - uy + x_1(m-r) - z_1(m-p))\,x_1\,dm = 0$$

(44) $N(\alpha c - \gamma a) + \int (va - uz + y_1(u-p) - x_1(u-q))$
$- \int (ve - ux + z_1(u-q) - y_1(u-r)) z_1 dm = 0$

(45) $N(\gamma b - \beta c) + \int (ob - uy + x_1(u-r) - z_1(u-p))$
$- \int (vq - uz) + y_1(u-p) - x_1(u-q)) y_1 dm = 0$

Gl'integrali contenuti in queste equazioni sono relativi ad x_1, y_1, z_1, ed estendere si debbono all'intera massa del solido. —

Chiamata per M la massa del solido si ha

(46) $M = \int dM$. Poichè G è origine delle coord.e si avrà

$\int x_1 dm = 0,$

$\int y_1 dm = 0,$

$\int z_1 dm = 0$. §. 565. Inoltre, se gli assi coord.i ortogonali sieno diametri principali del moto de' passivo per G, si avrà

$\int x_1 y_1 dm = 0,$

$\int x_1 z_1 dm = 0.$

$\int y_1 z_1 dm = 0$. §. 598, onde le (39) fino alle (44) riduconsi alle

(47) $Na - M(ux - ve) = 0,$

(48) $Nb - M(uy - of) = 0,$

(49) $Nc - M(uz - oh) = 0,$

(50) $N(\beta a - \alpha b) + A(r-u) = 0,$

(51) $N(\alpha c - \gamma a) + B(q-u) = 0,$

(52) $N(\gamma b - \beta c) + C(p-1) = 0$, posto

$\int(x_1^2+y_1^2)\,dm = A$,

$\int(x_1^2+z_1^2)\,dm = B$,

$\int(y_1^2+z_1^2)\,dm = C$: essendo A, B, C i momenti principali d'inerzia di M relativi a tre assi coordi. Z_1, Y_1, X_1 che passano pel centro di gravità.

Si otterranno poi sei equazioni analoghe a queste per l'equilibrio delle quantità perdute di moto dai punti di M' e per la forza, N' i presentiamo per le stesse lettere con un apice (') le quantità rispett.e e le equazioni saranno

(53) $N'a' - M'(u'x' - v'e') = 0$,

(54) $N'b' - M'(u'y' - v'f') = 0$,

(55) $N'c' - M'(u'z' - v'h') = 0$,

(56) $N'(pa' - \alpha b') + A'(r' - u') = 0$,

(57) $N'(\alpha c' - \gamma a') + B'(q' - u') = 0$,

(58) $N'(\gamma b' - pc') + C'(p' - 1') = 0$,

Si sono adunque trovate 12. equazioni e le incognite sono tredici, cioè $p, q, r, p', q', r', u, y, z'$ ec.

Dunque si dovrà concludere che queste equazioni non bastano per la determinazione delle incognite, poichè abbisogna una tredicesima equazione.

§. 662. La quistione sarebbe affatto determinata se i due solidi fossero perfettamente duri, e si prescindesse dalla compressione che ha luogo nell'urto. Ma avendo a ciò rispetto, per quanto piccola si supponga, essa è originata dal non avere i punti ne' quali i mobili si toccano le normali comuni alle due superficie, per cui i due mobili si appoggiano l'un contro l'altro e si comprimono finchè sia nulla la velocità ed allora il fenomeno dell'urto è compiuto. ——

A tutto rigore toccare si possono i mobili in più punti nel lasso di tempo che dura la compressione; ma facendo astrazione da tal tempuscolo si può supporre il contatto in un sol punto. Sarà dunque mestieri, ciò posto, che appressa l'urto la velocità di μ scomposta secondo $\mu\mu'$ sia la stessa e diretta nel medesimo senso, o si guardi come appartenente al solido M o al solido M'. Ma se il punto μ appartiene al solido M le sue coord.^{e} sono a, β, γ

e le componenti della sua velocità parallele agli assi GX, GY, GZ, ai quali si riferiscono le coord. α, β, γ, dopo l'urto sono $u\alpha+q\gamma-r\beta$, $uy+r\alpha-p\gamma$, $uz+p\beta-q\alpha$. §. 663, ponendo α, β, γ, a vece di x, y, z; ma a, b, c, sono i coseni degli angoli che la retta μk fa con delle parallele agli assi x', y', z' protratti per μ, dunque la velocità di μ secondo μk sarà

$$a(u\alpha+q\gamma-r\beta)+b(uy-r\alpha-p\gamma)+c(uz+p\beta-q\alpha) = u(ax+by+cz)+p(\beta c-\gamma b)+q(\gamma a-\alpha c)+r(\alpha b-\beta a).$$

Considerando il punto μ come appartenente al solido di cui la massa è M' la componente della sua velocità secondo $\mu k'$ immed. dopo l'urto verrà presentata da

$$u'(a'x'+b'y'+c'z')+p'(\beta'c'-\gamma'b')+q'(\gamma'a'-\alpha'c')+r'(\alpha'b'-\beta'a').$$

Laonde perchè la velocità normale di μ sia la stessa e della med. direzione a qualunque dei due mobili appartengono conviene che nulla sia la somma delle trovate velocità, la qual cosa da

$$(59)\quad aux+buy+cuz+p(\beta c-\gamma b)+q(\gamma a-\alpha c)+r(\alpha b-\beta a)+a'u'x'+b'u'y'+c'u'z'+p'(\beta' c'-\gamma' b')+q'(\gamma' a'-\alpha' c')+r'(\alpha' b'-\beta' a')=0.$$

E così si hanno le (13) equazioni necessarie all'uopo: inoltre $x^2+y^2+z^2=1$, e però $u^2x^2+u^2y^2+u^2z^2$

Capitolo L.III.

Delle proprietà generali del moto di un sistema di solidi

§. 665. Nella statica si è osservato, che le sei equazioni trovate per l'equilibrio di un solido interamente libero e sottoposto all'azione di date forze, sono comuni a tutti i sistemi di punti in equilibrio i quali non hanno verun punto fisso, e ne' quali i punti d'applicazione delle forze possono essere legati fra loro in un modo qualunque. —
Se trattasi di un sistema il quale abbia un punto fisso tre sole delle prefate equazioni debbono sussistere, ed una sola se due sieno. —
Se poi vi sieno tre o più punti fissi non collocati sulla medesima retta non converrà veruna equazione.
Combinate queste ~~equazioni~~ osservazioni col principio di d'Alembert ci proponiamo di fare equazioni pel moto di sistemi di punti nei quali essi punti sono meno di tre e faranno esse conoscere le proprietà del moto.

§. 666. Sia come nella enunciazione del Teor. d'Alembert, m, m', m'' le masse dei punti materiali, e p, p', p'' ec. le velocità perdute o guadagnate a capo di un'epoca qualunque del moto, e si è veduto che l'equilibrio ha luogo nel sistema se ai punti m, m', m'' ec. si applicano le forze mp, m'p', m''p'' nelle direzioni contrarie al moto. — Laonde se ora suppongasi fisso ocun punto le sei equazioni del moto dovranno sussistere per queste forze e per i coseni degli angoli da esse fatte e per le coordinate di m, m', m'' ec.

A formare queste equazioni, per A fig. (125) si prolungano tre assi ortogonali e siano x, y, z le coord. di m, ed α, β, γ gli angoli che la mp fa con gli stessi assi, dimodochè, mp α, mp β, mp γ siano le componenti di mp, parallele agli assi medesimi. Poniamo che Σ posto davanti ad una qual. quantità relativa ad m, indichi la somma di quantità analoghe pei punti m', m'', m''' ec. del sistema.

Dietro ciò si avrà che

$\Sigma mp\sigma\alpha$, $\Sigma mp\sigma\beta$, $\Sigma mp\sigma\gamma$ rappresenteranno le somme delle componenti parallele delle forze mp, $m'p'$, $m''p''$ ec. agli assi x, y, z; onde avremo le sei equazioni per l'equilibrio

(1) $\Sigma mp\sigma\alpha = 0$,

(2) $\Sigma mp\sigma\beta = 0$,

(3) $\Sigma mp\sigma\gamma = 0$,

(4) $\Sigma mp(z\sigma\beta - y\sigma\gamma) = 0$,

(5) $\Sigma mp(x\sigma\gamma - z\sigma\alpha) = 0$,

(6) $\Sigma mp(y\sigma\alpha - x\sigma\beta) = 0$.

Nel caso di un punto fisso le (1) (2) (3) non hanno luogo, e reggono soltanto le (4) (5) (6) per impedire il moto di rotazione. Nel caso di due punti fissi, si prenderà la retta che unisce i due punti per uno degli assi coord. che è asse di rotaz.e; e fra quelle delle ... si terrà conto solo della (6).

§. 66[illegible]. Poniamo al presente che sieno ridotte a 3 forze parallele agli assi coord. tutte le date forze che sollecitano m, e le rappresenteremo per X, Y, Z, ed avremo pel §. 621,

$Xdt - \frac{d^2x}{dt}$, $Ydt - \frac{d^2y}{dt}$,

$Zdt - \frac{d^2z}{dt}$, le componenti

parallele agli assi, della velocità perduata da m, alla fine di un tempo qualunque dt: dinoteranno sifatte quantità sono

$d\rho\alpha$, $d\rho\beta$, $d\rho\gamma$ ~~[illegible]~~. I quali sostituiti nelle (1)(2)(3) e diviso per dt, si ha

(7) $\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma m X$,

(8) $\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma m Y$,

(9) $\Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma m Z$.

Fatte le stesse sostituzioni nelle (4), (5) e (6) si hanno le

(4) $\Sigma m\rho(z\delta\beta - y\delta\gamma) = 0$,

(5) $\Sigma m\rho(x\delta\gamma - z\delta\alpha) = 0$,

(6) $\Sigma m\rho(y\delta\alpha - x\delta\beta) = 0$,

(10) $\Sigma m(zd^2y - yd^2z) = \Sigma m(zY - yZ)dt^2$,

(11) $\Sigma m(xd^2z - zd^2x) = \Sigma m(xZ - zX)dt^2$,

(12) $\Sigma m(yd^2x - xd^2y) = \Sigma m(yX - xY)dt^2$.

Le (10), (11), e (12) sono le equazioni del moto di un sistema invariabile intorno al supposto fisso, e che tengono la vece delle trovate al §. 626.

§. 508. I secondi membri delle (7) fino alla (12) sono nulli quando le forze continue date che agiscono sui punti del sistema, sono tali che si farebbero equilibrio nella ipotesi che il sistema fosse invariabile; ed in allora si hanno le

(13) $\Sigma m X = 0$

(14) $\Sigma m Y = 0$,

(15) $\Sigma m Z = 0$.

(16) $\Sigma m(xY-yX)=0$,

(17) $\Sigma m(zX-xZ)=0$,

(18) $\Sigma m(yZ-zY)=0$. Ma la supposizione che le distanze rispettive di tutti i punti del sistema diventino invariabili cambiano le coord. dei punti, dunque le (13) fino alla (15) sussistono tuttavia quando i punti del sistema dipendono d'una maniera qualunque.

§. 669. Se una porzione delle forze continue date si distruggono quando le distanze mutue diventano invariabili, i secondi membri delle (7) alla (12) non saranno nulli, ma saranno tali quali sarebbero se tali porzioni di forze non sussistessero. Nasce quindi, che in cosiffatta ~~formazione~~ non si avrà punto riguardo alla mutua attrazione dei punti del sistema, purchè suppongasi esistere in natura l'azione eguale alla reazione fra due punti materiali di massa uguale. E di vero considerato il sistema come di masse eguali l'azione di una di esse sull'altra sarà eguale ed opposta alla reazione della 2.ª sulla 1.ª e di vero

Lezione 92.

esse azioni si distruggeranno quando tale distanza diventi invariabile. Se tutte le distanze diventino invariabili i secondi membri delle (7) fino alla (12) saranno nulli se non si prenda in considerazione che l'attrazione.

§. 670. Siano $,x$, $,y$, $,z$, le coord. del centro di gravità dell'intero sistema delle masse m, m', m'' --- e sia M la loro somma, avremo le tre equazioni

(19) $M\,,x = \Sigma.mx,$

(20) $M\,,y = \Sigma.my,$

(21) $M\,,z = \Sigma.mz.$ Le derivate seconde prese relativamente al tempo, avremo

(22) $M\dfrac{d^2,x}{dt^2} = \Sigma.m\dfrac{d^2x}{dt^2},$

(23) $M\dfrac{d^2,y}{dt^2} = \Sigma.m\dfrac{d^2y}{dt^2},$

(24) $M\dfrac{d^2,z}{dt^2} = \Sigma.m\dfrac{d^2z}{dt^2},$ per cui le (7) (8) (9) cambiansi nelle

(25) $M\dfrac{d^2,x}{dt^2} = \Sigma.mX,$

(26) $M\dfrac{d^2,y}{dt^2} = \Sigma.mY,$

(27) $M\dfrac{d^2,z}{dt^2} = \Sigma.mZ.$ Queste equazioni che non contengono che le coord. del centro di gravità servono a determinare le coordinate stesse qualunque sia lo stato delle molecole del sistema figurandole massa unita in un punto solo sul quale agis-

(4) $\Sigma.mp(z\theta\beta - y\theta\gamma) = 0,$

(5) $\Sigma.mp(x\theta\gamma - z\theta\alpha) = 0$

(6) $\Sigma.mp(y\theta\alpha - x\theta\beta) = 0$

(7) $\Sigma.m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \Sigma.mX,$

(8) $\Sigma.m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \Sigma.mY,$

(9) $\Sigma.m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \Sigma.mZ,$

ero tutte le forze del sistema è patente che si ridurebbero a tre secondo gli assi, e che agirebbero su di un punto di cui la massa è M. In tal caso le (25)(26)(27) destinate a determinare il moto del centro del sistema altro non sono che quelle del moto di un punto materiale §. 165.

Dunque il centro di gravità di un solido nel quale non v'abbia alcun punto fisso si move nello spazio come se le masse di tutti i solidi di che il sistema si compone vi fossero riunite e le forze motrici fossero applicate a questo centro paralellamente alle loro direzioni e senza cambiare le loro intensioni.

Se il sistema contenesse dei punti che non fossero fissi, ma pure i loro movimenti fossero limitati o dal dover scorrere su linee o su superficie, la stessa verità ha luogo poichè a vece delle resistenze delle curve o superficie che sono eguali ed opposte alle pressioni su di esse esercitate, si possono applicare delle forze, per

cui il sistema si riduce ad esser libero e però ha luogo il teorema. Egli è aperto essere questo teorema un estensione di quello dimostrato al §. 64 relativo ad un sistema invariabile.

§. 671. Deriva quindi, che il moto del centro di gravità del sistema di punti materiali sarà rettilineo ed uniforme ogni qualvolta la mutua azione dei punti del sistema sarà la sola forza che li solleciti. In tal caso le (26) (26) e (27) riduconsi alle

(28) $\frac{d^2x}{dt^2}=0$,

(29) $\frac{d^2y}{dt^2}=0$,

(30) $\frac{d^2z}{dt^2}=0$ equazioni ~~del moto~~ rettilineo. Vidersi poi, che i secondi membri delle (25) (26) e (27) non variano, se alle forze continue che sollecitano il sistema si aggiungano altre forze che derivino da azioni reciproche dei punti del sistema derivanti dal loro legame, da mutue attrazioni o da molli interposte, e quindi concludere si debbe che il moto del centro di gravità non dipende dalle mutue azioni fra punti, e si mantiene tale, quale se queste non esistessero.

del centro di gravità del sistema si muove di moto uniforme quando non ubbidisca a forze continue che non siano una delle azioni. Della stessa guisa che un punto materiale non può cambiare il concepito moto senza il soccorso di una causa straniera, così un sistema di punti non impedito da alcun punto fisso non può alterare il moto del suo centro di gravità – Questo singolare risultamento nomasi *principio generale della conservazione del moto nel centro di gravità.*

§. 672. Ma vi ha di più ancora, se durante il moto del sistema due, o più punti materiali s'incontrino urtandosi scambievolmente, la percossa che ne deriva non cambierà affatto nulla la velocità del centro di gravità.

Prendendo le derivate delle (19) (20) (21) rispetto alla t variabile indipendente si ha

(19) $M.x = \Sigma mx$,

(20) $M.y = \Sigma my$,

(21) $M.z = \Sigma mz$,

$$M \frac{d.x}{dt} = \Sigma m \frac{dx}{dt},$$

$$M \frac{d.y}{dt} = \Sigma m \frac{dy}{dt}$$

$$M \frac{d.z}{dt} = \Sigma m \frac{dz}{dt}.$$

Le $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$ sono le componenti della velocità secondo gli assi del centro di gravità. A motivo del legame fra i punti del sistema, l'urto scambievole di una parte di punti, in generale cambierà le velocità di tutti i punti del sistema.

Siano a, b, c, le componenti secondo gl'assi coordi. della velocità del punto m, immediatamente prima dell'urto, e A, B, C siano le sue componenti dopo l'urto. — Avanti l'urto, avremo

(31) $\frac{dx}{dt} = a$,

(32) $\frac{dy}{dt} = b$,

(33) $\frac{dz}{dt} = c$. Appresso l'urto si avrà cambiato a, b, c in A, B, C e però

(34) $\frac{dx}{dt} = A$

(35) $\frac{dy}{dt} = B$

(36) $\frac{dz}{dt} = C$. L'equilibrio suppositivo debbe nel sistema fra le quantità di moto perdute da tutti i punti nell'urto.

Le componenti secondo i tre assi coordi. della velocità perduta da m, sono $a-A$, $b-B$, $c-C$: avremo quindi rispetto a m le tre quantità di moto $m(a-A)$, $m(b-B)$, $m(c-C)$.

Dunque per tutti i punti del sistema si avrà

$\Sigma_i ma - \Sigma_i mA$, $\Sigma_i mb - \Sigma_i mB$, $\Sigma_i mc - \Sigma_i mC$. Ma non avendosi nel sistema verun punto fisso, queste quantità debbon esser nulle nel caso d'equilibrio, dunque

$\Sigma_i ma = \Sigma_i mA$,

$\Sigma_i mb = \Sigma_i mB$,

$\Sigma_i mc = \Sigma_i mC$.

Il che prova davanti, essendo i valori di $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ i medesimi prima e dopo l'urto, e però la velocità del centro di gravità del sistema resta la med.ª in grandezza avanti e appresso l'urto. —

§. 673. Prendiamo in considerazione le (10) (11) (12) i primi membri delle quali sono i diff.i di $\Sigma_i m(zdy - ydz)$, $\Sigma_i m(xdz - zdx)$, $\Sigma_i m(ydx - xdy)$: ma $xdy - ydx$ prescindendo dal segno è doppio dell'area descritta intorno ad A nel lasso di tempo dt dal raggio vettore della projezione di m sul piano (x, y) come si è vid.º al §. 175. dunque $\Sigma_i m(xdy - ydx)$ è due tanti la somma delle aree descritte intorno ad A durante il tempuscolo dt dai raggi vettori delle projezioni sul piano (x, y)

(10) $\Sigma_i m(zd^2y - yd^2z) = \Sigma_i m(zY - yZ)dt^2$

(11) $\Sigma_i m(xd^2z - zd^2x) = \Sigma_i m(xZ - zX)dt^2$

(12) $\Sigma_i m(yd^2x - xd^2y) = \Sigma_i m(yX - xY)dt^2$

dei punti del sistema, le quali sono rispettivamente moltiplicate per le masse dei punti.

Poniamo che $\frac{1}{2}\lambda$ esprima la somma delle aree descritte da cotesti raggi in un tempo t, moltiplicate per le masse. Sarà λ una funzione di t che riducesi a zero quando t = ... $\Sigma m(xdy - ydx)$ rappresenta questa somma nel tempuscolo ... piccolo dt, dunque $\int \Sigma m(xdy + ydx) = \lambda$, e di conseguenza la

(37) $\Sigma m(xdy + ydx) = d\lambda$. —

Notate con $\frac{1}{2}\lambda_1$, $\frac{1}{2}\lambda_2$ le somme analoghe ad $\frac{1}{2}\lambda$ relative alle projezioni di m, m', m'' ... sui piani (x,z), (y,z), si avrà $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, quando $t = 0$.

Per un valore qualunque di t, avremo

(38) $\Sigma m(xdz - zdx) = d\lambda_1$,

(39) $\Sigma m(zdy - ydz) = d\lambda_2$. —

Presi adunque i differenziali si avranno le equazioni

(40) $\Sigma m(yd^2x - xd^2y) = d^2\lambda$,

(41) $\Sigma m(xd^2z - zd^2x) = d^2\lambda_1$,

(42) $\Sigma m(zd^2y - yd^2z) = d^2\lambda_2$. —

Quindi, a cagione delle (10)(11) e (12) avremo

(43) $d^2\lambda = \Sigma m(yX - XY)dt^2$;

(44) $d^2\lambda_1 = \Sigma m(xZ - zX)dt^2$;

(10) $\Sigma m(zd^2y - yd^2z) = \Sigma m(zY - yZ)dt^2$,
(11) $\Sigma m(xd^2z - zd^2x) = \Sigma m(xZ - zX)dt^2$,
(12) $\Sigma m(yd^2x - xd^2y) = \Sigma m(yX - XY)dt^2$

(45) $d''\lambda_2 = \Sigma_i m(zY - yZ)dt^2$.
Allorchè la mutua attrazione de' punti m, m', m'' è la sola forza continua a loro applicata, i secondi membri di queste sono nulli, e di conseguenza avremo

(46) $d''\lambda = 0$,

(47) $d''\lambda_1 = 0$,

(48) $d''\lambda_2 = 0$, che integrate danno

(49) $d\lambda = C\,dt$,

(50) $d\lambda_1 = C'\,dt$,

(51) $d\lambda_2 = C''\,dt$, ove C, C', C'' sono le costanti: integrando di nuovo si avrà

(52) $\lambda = Ct$

(53) $\lambda_1 = C_1 t$

(54) $\lambda_2 = C''t$. Non si aggiungono costanti poichè si è supposto λ, λ_1, λ_2, $= 0$ quando $t = 0$.
Concludesi adunque si dice che nel moto di un sistema di punti materiali legati fra loro in modo qualunque, i quali non sono sollecitati da alcuna forza continua ne da n'lun alcun fisso, la somma delle aree descritte intorno ad A, e che si sono notate con $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda_1$, $\frac{1}{2}\lambda_2$ sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle, e questo è principio generale che dicesi della conservazione delle aree

Davanti al §. 675 si è dimostrato per un punto tratto ad un punto fisso.

§. 676. Il punto A, e i piani di projezione che passano per A possono sceglierfi ad arbitrio. Il principio della conservazione delle aree sussisterà per tutti i punti dello spazio e per tutti i piani di projezione. Quando esiste un punto fisso nel sistema le (423) (424) e (425) non hanno luogo che prendendo questo punto per origine delle coord. ortogonali §. 666. e di conseguenza il principio delle aree non sussiste che prendendo il punto fisso pel centro da cui si conducono alle projezioni i raggi vettori. La direzione del piano di projezione passante pel punto fisso è tuttavia arbitraria. Se poi vi attivano due punti fissi una sola delle tre equazioni sussisterà e sarà la (423) se prendesi l'asse delle z la retta che li unisce: in tal caso sarà A = Ct solo, e il principio delle aree non avrà luogo se non si prenda il centro di projez.ne su questa retta e il piano a questa perpend.e

§. 675. Nel caso di un punto fisso ciascuno m, m', m'' ... può essere sollecitato da una forza costantemente diretta ovvero per il punto med.° e il principio delle aree avrà sempre luogo rispetto a un cosí fatto punto.

Infatti, posto che il punto sia l'origine delle coord.e e X, Y, Z, le forze parallele agli assi coord.i ortogonali che agiscono sopra m per dimostrato al §. 642 si avrà $X:Y:Z::x:y:z$, donde $yX-xY=0$, $xZ-zX=0$, $zY-yZ=0$: ma lo stesso avrà per tutti i punti materiali del sistema, e quindi i secondi membri delle (63) (64) (65) saranno nulli, e si avranno le equazioni trovate in q.ta supposizione come se la forza diretta verso il punto fisso non esistesse, risultam.e ottenuto al §. 675.

§. 676. L'area descritta nel tempo momentaneo di tempo dt dal raggio vettore della projezione di un mobile sopra un piano qualunque è patentemente la projezione descritta nello spazio dal raggio vettore:

In un tempo finito l'area descritta sul piano è la somma

delle aree indefinitamente picco-
le descritte nello spazio: per la
qual cosa $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda_1$, $\frac{1}{2}\lambda_2$ sono
le somme delle projezioni sui
piani coord.ti (x,y) (x,z), (y,z),
delle aree descritte intorno ad
A nel lasso di tempo dt dai raggi
vettori di m, m', m'' ec. molti-
plicati rispett.te per le masse di
cotesti mobili. Esisterà dunque
un piano passante per A rela-
tivamente al quale la somma
di cosiffatte projezioni sarà
la massima. Presentiamo
per $\frac{1}{2}I$, la massima somma
e per l, l', l'' gli angoli che
fa la perpend.e alzata dal punto A sul piano della mass.a
somma (che è il piano principale) cogli assi x, y, z, e
pel dimostrato momenti

(55) $I^2 = \lambda^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2$

(56) $I\theta l = \lambda$,

(57) $I\theta l' = \lambda_1$,

(58) $I\theta l'' = \lambda_2$; quindi, per (52), (53), (54), ne viene

(52) $\lambda = Ct$,
(53) $\lambda_1 = C't$,
(54) $\lambda_2 = C''t$

(59) $\theta l = \frac{C}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}$,

(60) $\theta l' = \frac{C'}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}$,

(61) $\theta l'' = \frac{C''}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}$. ——

ove non evvi 4. Dunque l, l', l'' saranno costanti in tutti i tempi del moto. Dal che concludere si debbe, che il piano principale di proje-zione conserva sempre la me-desima posizione durante il moto del sistema, ogniqual-volta i punti materiali di lui non vengono sottoposti che dalla mutua attrazione ed all'azione di una forza diretta verso il centro dell'area cioè verso A.

Questo piano principale di projezione è stato nomina-to da La-Place piano invariabile.

Quando la forza diretta verso A non esiste ed il si-stema non ha verun punto fisso, si può prender ad ar-bitrio il centro delle aree, e per ciascun punto preso nello spazio si avrà un corrispon-dente piano invariabile.

Lezione 23.

§. 677. Si può costruire in ciascheduno istan-te il piano invariabile relativo ad un determinato punto dello spazio, se in cosiffatto istante si conoscano le velocità e le coor-dinate di tutti i punti del sistema — Difatti, la posiz. di questo piano relativa ad A si è vid. che dipende da c, c', c''.

(52) $\lambda = ct$,
(53) $\lambda_1 = c't$,
(54) $\lambda_2 = c''t$.

Dipendentemente poi dalle (52) (53) e (54) differenziando si ottiene

(62) $c = \frac{d\lambda}{dt} = \Sigma m\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)$,

(63) $c' = \frac{d\lambda_1}{dt} = \Sigma m\left(x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right)$,

(64) $c'' = \frac{d\lambda_2}{dt} = \Sigma m\left(z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt}\right)$. — per le (37)(38) e (39)

Osserviamo che le velocità relative agli assi x, y, z, sono $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$: dunque i secondi membri non contengono che le velocità e le coord.^e Dunque potremo determinare le

I momenti sono doppj delle aree, e però il momento della projezione di m sopra un piano che passi per A, è la projezione del momento di m relativo ad A. —

Osserviamo che c è la somma dei momenti relativi ad A, ed è projettata sul piano $(x.y)$ delle quantità di moto da cui i punti m, m', m'' &c sono animati in un istante qualunque. La medesima significazione hanno c', c'' relativamente ai piani $(x.z), (y.z)$. —

Concluderemo adunque si detto che il piano invariabile coincide col piano principale dei momenti §. 128. In generale, considerazione del piano invariabile o del piano principale dei

momenti riesce utilissima nelle questioni di Dinamica. Avvegnachè prendendo questo per uno dei piani coordinati, due delle tre c, c', c" saranno nulle pel §. citato. La qual cosa renderà agevole l'uso delle equazioni nelle quali entrar debbono tali costanti. ——

§. 678. A confrontare tra se i piani invariabili relativi a due differenti punti nello spazio, siano α, β, γ le coord. riferite agli assi AX, AY, AZ, del nuovo punto A', e siano $c_,, c'_,, c''_,$ ciò che diventano c, c', c" quando l'origine da A si trasporta in A'. Dall'equazione che da $c_,$ si dovrà porre x-α, a vece di x, y-β a vece di y, e si avrà

(65) $c_, = \Sigma m\left((y-\beta)\frac{dx}{dt} - (x-\alpha)\frac{dy}{dt}\right)$; ponendo che M sia = m+m'+m"+ec. e siano $x_,, y_,, z_,$ le coord. del centro di gravità del sistema e prendendo le derivate rispetto al tempo considerato come variabile indipend. dalle (19) (20) avremo

(19) $M_, x = \Sigma mx$
(20) $M_, y = \Sigma my$

(66) $\Sigma m\frac{dx}{dt} = M\frac{d_,x}{dt}$;

(67) $\Sigma m\frac{dy}{dt} = M\frac{d_,y}{dt}$; la (65) equivale alla

(68) $c_, = \Sigma m\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) - \beta\Sigma m\frac{dx}{dt} + \alpha\Sigma m\frac{dy}{dt}$ = ——

$$= c - \beta\,\Sigma m \frac{dx}{dt} + \alpha\,\Sigma m \frac{dy}{dt}$$ (66)(67)

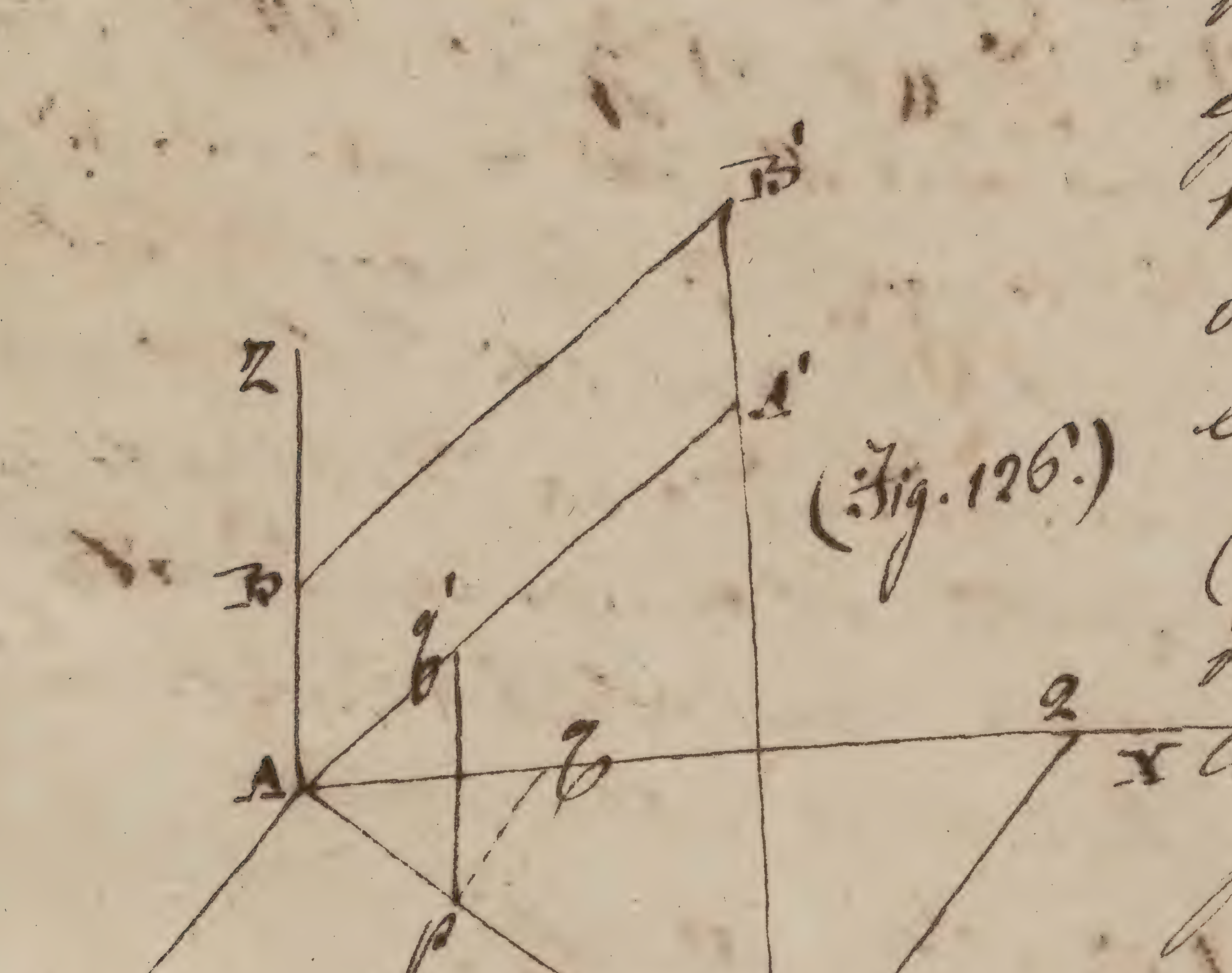
$$c + M\left(\alpha \frac{d_1 y}{dt} - \beta \frac{d_1 x}{dt}\right)$$

Si troverebbe similmente

(69) $C' = c' + M\left(\gamma \frac{d_1 x}{dt} - \alpha \frac{d_1 z}{dt}\right)$

(70) $C'' = c'' + M\left(\beta \frac{d_1 z}{dt} - \gamma \frac{d_1 y}{dt}\right)$.

Se abbiasi $\alpha \frac{d_1 y}{dt} - \beta \frac{d_1 x}{dt} = 0$; $\gamma \frac{d_1 x}{dt} - \alpha \frac{d_1 z}{dt} = 0$; $\beta \frac{d_1 z}{dt} - \gamma \frac{d_1 y}{dt} = 0$ sarà $C = c$, $C' = c'$, $C'' = c''$. — In tale ipotesi, i secondi membri delle equazioni che danno la posizione del piano invariabile (el, el', el'') si mantengono le stesse, e però i piani invariabili relativi a questi due punti sono fra sè paralelli. Nel moto considerato il centro di gravità si move uniformemente in linea retta, e però la velocità di lui esser debbe costante, e poi saranno tali le componenti di questa velocità secondo gli assi, ossia le $\frac{d_1 x}{dt}$, $\frac{d_1 y}{dt}$, $\frac{d_1 z}{dt}$. —



(Fig. 126.)

(Fig. 126.) Poniamo che la retta su cui si move il centro di gravità del sistema sia parallella alla AA'. — Da A' si conduce al piano (x, y) la perpend. A'P che si prolunghi ad incontrare in B', la BB' parallella ad AA'. Protratta da A a P al AP.

sarà AP la projezione sul piano (x, y) tanto di AA' che di BB'. Per ipotesi poi il centro di gravità si muove sopra BB'; e di conseguenza, la projezione del centro di gravità sul piano (x, y) si moverà di moto uniforme su di AP, e la velocità sua riuscirà proporzionale alla velocità del centro di gravità.

Dal che concludere si deve che le componenti secondo gli assi x, y delle velocità del centro di gravità, saranno proporzionali alle componenti della velocità della projezione del centro di gravità sul piano (x, y).

Protratte PQ parallela a AY le coord.te di A' saranno AQ = α, QP = β, = γ, se protraggasi pq parallela a PQ e sia $Aq = \frac{d.x}{dt}$, $qp = \frac{d.y}{dt}$, avremo la proporzione

$AQ : QP :: Aq : qp$, ovvero $\alpha : \beta :: \frac{d.x}{dt} : \frac{d.y}{dt}$,

e però $\alpha \cdot \frac{dy}{dt} - \beta \frac{d.x}{dt} = 0$. Similmente si troverebbe

$\gamma \frac{d.x}{dt} - \alpha \frac{dz}{dt} = 0$, $\beta \frac{d.z}{dt} - \gamma \frac{d.y}{dt} = 0$.

Dal che rendesi aperto, che i piani invariabili relativi a tutti i punti d'una retta paralelli alla retta che descrive il centro di gravità sono paralelli tra sè, e la direzione del piano invariabile non cambia che passando da una paralella all'altra. Onde, il piano relativo al centro di gravità conserva sempre la stessa direzione, ed è traspottato col moto del sistema conservandosi costantemente p[...]

§. 579. Il piano invariabile, si può altresì determinare in ciascun istante per mezzo delle velocità relative intorno al centro di gravità, senza conoscere le velocità assolute nello spazio. Infatti, poniamo che A' sia per un istante il centro di gravità del sistema, in tal caso $\alpha = x_1$, $\beta = y_1$ e la $\gamma = z_1$, onde

$$(65)\quad C = \Sigma m\left((y-\beta)\frac{dx}{dt} - (x-\alpha)\frac{dy}{dt}\right)$$

$$(71)\quad C = \Sigma m\left((y-y_1)\frac{dx}{dt} - (x-x_1)\frac{dy}{dt}\right):$$

ma dalle (19) e (20) abbiamo

$$(19)\quad M_1 x = \Sigma mx,$$

$$(20)\quad M_1 y = \Sigma my.$$

$\Sigma mx - M_1 x = 0,$

$\Sigma my - M_1 y = 0,$ dunque

$$(72)\quad \Sigma m(x-x_1)\frac{dy}{dt} = (\Sigma mx - M_1 x)\frac{dy}{dt} = 0$$

e

$$(73)\quad \Sigma m(y-y_1)\frac{dx}{dt} = (\Sigma my - M_1 y)\frac{dx}{dt} = 0$$

sottraendo queste due quantità che sono nulle dal 2.° membro della (71) il valore di C non verrà alterato, e

si avrà

(74) $G = \Sigma m\left((y - {}_{,}y)\left(\frac{dx}{dt} - \frac{d_{,}x}{dt}\right) - (x - {}_{,}x)\left(\frac{dy}{dt} - \frac{d_{,}y}{dt}\right)\right)$. Troverebbesi della stessa guisa,

(75) $G' = \Sigma m\left((x - {}_{,}x)\left(\frac{dz}{dt} - \frac{d_{,}z}{dt}\right) - (z - {}_{,}z)\left(\frac{dx}{dt} - \frac{d_{,}x}{dt}\right)\right)$,

(76) $G'' = \Sigma m\left((z - {}_{,}z)\left(\frac{dy}{dt} - \frac{d_{,}y}{dt}\right) - (y - {}_{,}y)\left(\frac{dz}{dt} - \frac{d_{,}z}{dt}\right)\right)$. Da queste è manifesto che i valori di G, G', G'' non dipendono che dalle velocità relative $\frac{dx}{dt} - \frac{d_{,}x}{dt}$, $\frac{dy}{dt} - \frac{d_{,}y}{dt}$, $\frac{dz}{dt} - \frac{d_{,}z}{dt}$, e dalle coord. $x - {}_{,}x$, $y - {}_{,}y$, $z - {}_{,}z$, l'origine delle quali è al centro di gravità del sistema. —

§. 680. Sia che il sistema giri intorno ad un punto fisso, sia che muovasi liberamente nello spazio, la posizione del piano invariabile relativa ad un punto invariabile o variabile, non sarà cambiata dall'urto di uno o di più solidi del sistema. Perciò converrà dimostrare che c, c', c'' rimangono le stesse dopo l'urto perchè danno la posiz. di esso piano. Poniamo che a, b, c rappresentino le velocità $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ prima dell'urto, e che

dello a se stesso.

A, B, C le velocità dopo l'urto; perciò le quantità di moto perdute saranno $\Sigma m(a-A)$, $\Sigma m(b-B)$, $\Sigma m(c-C)$. Pel principio di d'Alembert queste quantità di moto debbono essere in equilibrio; dunque si avranno le

(77) $\Sigma m(y(a-A)-x(b-B))=0,$

(78) $\Sigma m(x(c-C)-z(a-A))=0,$

(79) $\Sigma m(z(b-B)-y(c-C))=0,$

dalle quali deducesi

(80) $\Sigma m(ya-xb)=\Sigma m(yA-xB),$

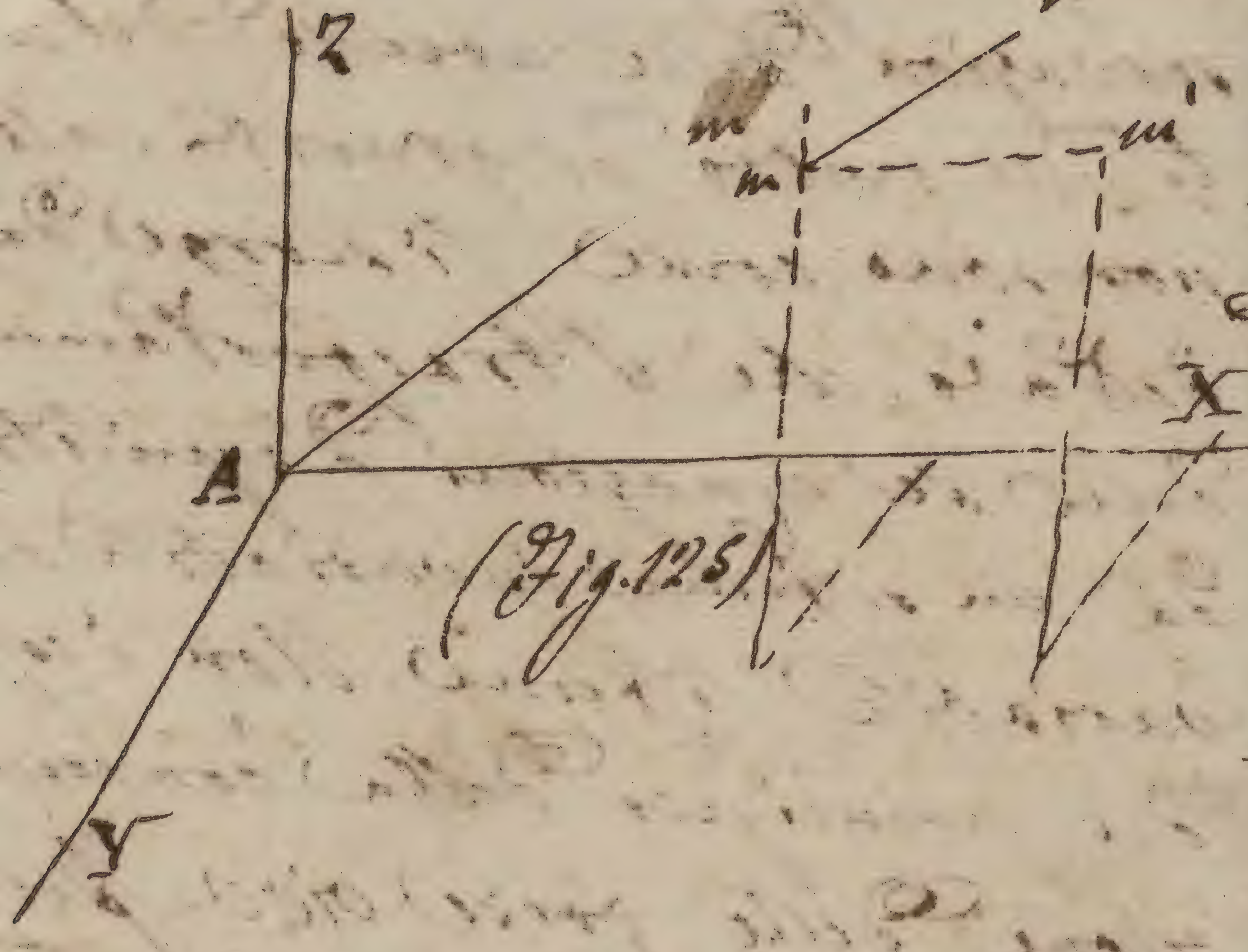
(81) $\Sigma m(xc-za)=\Sigma m(xC-zA),$

(82) $\Sigma m(zb-yc)=\Sigma m(zB-yC).$

Dipendentemente dai quali valori si vede, che c, c', c'' sono i medesimi immediatamente avanti e dopo l'urto. Vi hanno poi le (52) (53) (54) che danno le A in funzione di c, c', c''; dunque esse non vengono alterate nell'urto. Il perchè le aree sono proporzionali al tempo impiegato a descriverle, quantunque in questo lasso di tempo le velocità dei mobili siano state soggette a cambiamenti dall'urto prodotto. Conviene però osservare, che l'urto di un corpo estraneo al sistema cambierà in generale il valore delle aree, e

§. 681. I principj generali della conservazion delle aree e del moto del centro di gravità, altro non sono come si scorge dal dettato, che il trasportamento delle sei equazioni d'equilibrio da un sistema invariabile al variabile sistema. Non è così del principio della conservazione delle forze vive. Per dimostrare questo principio avremo ricorso alle velocità virtuali principio già dimostrato.

Sieno p, p', p'' ---- $\&$. le velocità perdute dai punti materiali del sistema $m. m'$; m'' --- $\&$ a cagione dei loro mutui legami, e saranno $mp. m'p', m''p''$ le quantità di moto perdute. Ad applicare il principio delle velocità virtuali, poniamo che s'imprima arbitrariamente ai punti $m. m'. m''$ --- $\&$ un movimento indeterm.te piccolo, ma fra quelli che il sistema può prendere. Suppongasi che a cagione di questo piccolissimo movimento i punti del sistema si allontanino indeterminatamente poco dalle loro pristine posizioni.



si osservi la (fig. 125). Considerato il punto m, e pel movimento impresso passi da $\underline{m}$ in $\underline{n}$, dimodocchè mn sia indeterminatamente piccolo. Siano δx, δy, δz, le projezioni sugli assi AX, AY, AZ, dello spazio $\underline{mn}$ indeterminatamente piccolo e la velocità virtuale di lui nel moto sarà rapp.^{ta} da mn.
Posto che α, β, γ, siano gli angoli che la forza mp, fa cogli assi coord.^{ti} AX, AY, AZ, le componenti di mp secondo gli assi med.^{i} saranno $mp\cos\alpha$, $mp\cos\beta$, $mp\cos\gamma$, e per conseguenza, il prodotto di mp projettata su gli assi coord.^{ti} e moltiplicata per la velocità di m, sarà $mp\cos\alpha\,\delta x$, $mp\cos\beta\,\delta y$, $mp\cos\gamma\,\delta z$ pel veduto al §. 210.
Fatte le somme dei prodotti a questo simili per tutti i punti del sistema, la equazione generale delle velocità virtuali sarà la

(83) $\Sigma(mp\cos\alpha\,\delta x + mp\cos\beta\,\delta y + mp\cos\gamma$

la quale ha luogo ugualmente allorchè i mobili m, m', m'' ... vanno soggetti per una cagione qualunque ad un cambiamento repentino delle loro velocità, vale a dire quando p, p', p'' si pongono finite, e

quando la legge di continuità non è interrotta in questi punti ossia quando questi punti sono indefinitamente piccoli.—

La (83) sussiste per tutti i dislocamenti che si possono fare sul sistema senza turbare le condizioni che legano i punti fra loro, e che ne costringono una parte a muoversi sopra una superficie o su date linee.

In ogni caso, la (83) originerà tante equazioni particolari, quanti sono i moti di cui è suscettivo il sistema e però il moto del sistema verrà determinato da cosiffatte equazioni.—

Lezione 24ª

(15.)

§. 682. Sieno x, y, z, x', y', z' - - - - ec. le coord.e rispettive dei punti m, m' — ec. nel med.o istante: è permesso di supporre che le condi.i del sistema sieno presentate da equazioni fra così fatte coord.e Talvolta le equazioni di cond.e contener possono il tempo t, la qual cosa ha luogo ad es. quando uno dei mobili debba trovarsi su di una superficie che movasi secondo una data legge. L'equazi.e di questa superf.e conterrà le coord.i e il tempo t; per maggiore generalità porremo essere

(84) $F(t, x, y, z, x', y', z' - - - - -) = 0$

una delle equazioni di cond.e del sistema. Perchè il moto arbitrario impresso al sistema nell'istante in cui si considera l'equilibrio delle forze $mp, m'p', m''p''$ — ec. sia concepi.o, sarà necessario che le coord.e dei mobili verificano la (84). Notate per $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y', \delta z'$ - ec. le projezioni delle velocità virtuali di m, m', m'' — ec. sugli assi coord.i AX, AY, AZ, dovrà la (78) sussistere tuttavia postovi $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, $x'+\delta x'$, $y'+\delta y'$, $z'+\delta z'$ - - - ec. a vece di x, y, z, x', y', z' - ec. Posto adunque $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y', \delta z'$ - ec. indeterminatamente piccole,

dovrà essere la prima derivata separatamente eguale a zero pel dimostrato al C. S.: sussisterà quindi debbe la

(85) $\mathfrak{F}'(x)\delta x + \mathfrak{F}'(y)\delta y + \mathfrak{F}'(z)\delta z + \mathfrak{F}'(x')\delta x' + \mathfrak{F}'(y')\delta y' + \mathfrak{F}'(z')\delta z' + \&c = 0$. Ma le coord.e dei mobili sono funzioni del tempo, che soddisfanno alla (85) per tutti i valori di t: dunque il diff.e completo della (84) rispetto a t e risguardando x, y, z, x', y', z' &c come funzione di t, sarà eguale a zero, di guisa che si avrà

(86) $Tdt + \mathfrak{F}'(x)dx + \mathfrak{F}'(y)dy + \mathfrak{F}'(z)dz + \mathfrak{F}'(x')dx' + \mathfrak{F}'(y')dy' + \mathfrak{F}'(z')dz' = 0$

Paragonata la (85) colla (86) si vede, che a questa soddisfassi ogni volta che $Tdt = 0$, prendendo $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$, $\delta x' = dx'$ - &c.

Da ciò conseguita, che se non abbiavi veruna equaz. di cond.e la quale contenga esplicitamente il tempo, supporre si possono le velocità dei mobili secondo gli assi eguali ai diff.i delle coord. medesime, che sono gli spazietti percorsi nel tempuscolo dt. Così fatta ipotesi include, che s'imprima al sistema quel

movimento che ha realmente luogo nell' istante considerato, e che non può più aver luogo se una delle equaz.i di cond.ne contenga esplicitamente il tempo.

§. 683. Nella fatta suppos.e la (83) mutasi nella

(87) $\Sigma(mp\theta\alpha dx + mp\theta\beta dy + mp\theta\gamma dz) = 0$: ma abbiamo

(88) $p\theta\alpha = X dt - \frac{d^2x}{dt}$,

(89) $p\theta\beta = Y dt - \frac{d^2y}{dt}$,

(90) $p\theta\gamma = Z dt - \frac{d^2z}{dt}$. §. 667. Dunque fatte le sostituzioni nella (87) si avrà

$\Sigma\left(m\left(X dx dt - \frac{d^2x}{dt}dx\right) + m\left(Y dy dt - \frac{d^2y}{dt}dy\right) + m\left(Z dz dt - \frac{d^2z}{dt}dz\right)\right) = 0$, d'onde la

(91) $\Sigma m\left(\frac{dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma m(X dx + Y dy + Z dz)$. ——

Sia $\underline{v}$ la velocità del punto $\underline{m}$, ed osservando che $v = \frac{ds}{dt}$, si ha

(92) $v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$, d'onde

(93) $d.v^2 = \frac{2dx d^2x + 2dy d^2y + 2dz d^2z}{dt^2}$ e per conseguenza la

(94) $d.\Sigma m v^2 = 2\Sigma m(X dx + Y dy + Z dz)$ che è immediatamente integrabile allorchè il 2.° membro è un differenziale esatto delle coord.e de' mobili essendo t indipend.e Poniamo la

(95) $\Sigma m(X dx + Y dy + Z dz) =$

$d.Q(x, y, z, x', y', z' - - -)$

In questa supposizione la (94) sarà integrabile e il suo integrale sarà

(96) $\Sigma m v^2 = C + 2Q(x, y, z, x', y', z' --)$

La costante C determinare si debbe dietro un valore di $\Sigma m v^2$ in una posizione determinata del sistema.

Si è veduto al §. 173, che $X dx + Y dy + Z dz$ è diff.^le esatto allorchè i mobili sono sollecitati da forze dirette verso centri fissi, l'intensioni delle quali siene funzioni delle distanze dai punti fissi. Ma $\Sigma m(X dx + Y dy + Z dz)$ non è che una somma di differenziali simili al citato, dunque in q.ta ipotesi $\Sigma m(X dx + Y dy + Z dz)$ è un diff.^le esatto.

§. 564. Inoltre $\Sigma m(X dx + Y dy + Z dz)$ è pure differenziale esatto, avendo rispetto alla mutua attrazione dei mobili, perchè le forze continue dovute a quest'attrazione siene proporzionali alle masse dei punti attraenti, ed espresse in funzione qualunque delle loro scambievoli distanze.

Difatti, sia f la distanza fra m ed m', e sia F una funzione di f: sarà $m'F$ la forza continua di m, proveniente dall'attrazione di m': ed mF sarà la forza continua di m' proveniente dall'attrazione di m. La forza $m'F$, essendo diretta secondo la retta che unisce i due punti m, m' da m verso m', le sue componenti secondo gli assi medesimi pel ord.° al §. 473. saranno

$$m'F\frac{x'-x}{f},\quad m'F\frac{y'-y}{f},\quad m'F\frac{z'-z}{f}.$$

essendo x, y, z, x', y', z' le coord. di m ed m'. Considerate adunque cosiffatte forze, avremo la

(97) $$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{m'F}{f}\left((x'-x)dx + (y'-y)dy + (z'-z)dz\right).$$

Della stessa guisa, notate con X', Y', Z' le componenti parallele agli assi X, Y, Z del punto m', si avrà la

(98) $$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' = \frac{mF}{f}\left((x-x')dx' + (y-y')dy' + (z-z')dz'\right).$$

Moltiplicate le (97) e (98) rispettivamente per m e per m', la somma dei prodotti sarà

(99) $$m(Xdx+Ydy+Zdz) + m'(X'dx'+Y'dy'+Z'dz') = \frac{mm'F}{f}\left((x'-x)(dx-dx') + (y'-y)(dy-dy') + (z'-z)(dz-dz')\right):$$

ma

(100.) $f^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$; dunque

(101.) $f\,df = (x-x')(dx-dx') + (y-y')(dy-dy') + (z-z')(dz-dz')$, per cui la (99.) mutasi nella

(102.) $m(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + m'(X'dx' + Y'dy' + Z'dz') = -mm'\,\mathfrak{F}\,df$.

Ma per ipotesi $\mathfrak{F}$ è diff.^{le} di f. dunque il 2.° membro è diff.^{le} esatto.

Deriva quindi, che la (96) ha luogo nel moto di ogni sistema di punti materiali sottoposti alle loro mutue attrazioni, o ad altre attrazioni dirette verso centri fissi purchè le forze contisi? une dirette ai centri fissi siano proporzionali alle masse dei punti attraenti ed espresse in funzione delle distanze dei punti fissi.

I punti del sistema possono essere tra se legati o coi punti fissi in un modo qualunque. Ognuno dei mobili può muoversi su di una superf.^{e} in un modo qualunque. La somma delle forze vive che è Σmv^2 sarà data se conosceansi le coordinate di punti materiali —

L'aumento o diminuz. della somma delle forze vive passando dall'una all'altra posizione non dipende dalla linea descritta dal mobile. L'aumento sarà nullo e la somma delle forze vive sarà la stessa allorchè il sistema torna nella prima posiz. Dalla (96) si vede che la somma delle forze vive si conserva la stessa quando il sistema non è sollecitato che da forze istantanee in tal caso la (96) si riduce alla

(103) $\Sigma m v^2 = C.$

Rendesi quindi aperto che il teorema dimostrato al §. 553. dove si prendeva in consideraz. un punto isolato si estende al moto di un sistema qual. di punti. Cosfatto principio dicesi della conservazione delle forze vive.

§ 685. Il detto relativo alle attrazioni dei punti del sistema si applica alla repulsione di molle interposti, ponendo mente, che la molla tesa fra due punti mobili od uno fisso e l'altro mobile non può essere che una funz. della distanza dei due punti.

Dunque concluderemo si deduce

Ciò posto, si può concludere che la somma delle forze vive non è alterata dall'urto di corpi elastici fra loro, o contro corpi fissi: ciò si è provato per due sfere omogenee.

Infatti, si può considerare il sistema di due solidi elastici, che urtino contro ostacoli fissi come formanti un composto di punti materiali fra i quali siano interposte delle molle non materiali, le quali si contraggono allorchè i mobili vengono compressi. La somma delle forze vive è variabile durante l'urto. Ad ottenere il valore in un istante qualunque della somma delle forze vive mediante la (96) sarà d'uopo conoscere la legge secondo la quale agiscono le forze delle molle. Se l'elasticità sia perfetta, ed i solidi riprendano la sua figura dal proced.te decor. conseguita, che la somma delle forze vive si troverà alla fine dell'urto nel med.o stato che al cominciam.o onde la somma di così fatte forze ha il med.o valore 1.a e dopo l'urto.

§. 686. Allorchè i moti del sistema vengono modificati da attriti resistenze di mezzi, e in generale da resistenze nelle quali entri la velocità, la funz. $\Sigma m(Xdx + Ydy + Zdz)$ che conterrà questa variabile non sarà più diff.le esatta. I mobili che non sono sollecitati che da forze istantanee e da cosiffatte resistenze vanno grado grado perdendo le forze vive, di maniera che la somma di queste forze diminuisce fino ad annichilarsi. Il principio della conservaz.e delle forze vive domanda inoltre continuità nei moti del sistema. Ciascun cangiamento repentino produce una diminuzione nella somma delle forze vive per cui col tempo si può ridurre a nulla. Egli è perciò che in una Macchina togliere di mezzo si deve gli attriti ed ostacoli.

§. 687. Abbiamo calcolata la perdita delle forze vive nell'urto di due sfere non elastiche, ma attingere si può ai medesimi risultamenti in un modo più semplice e generale, mediante l'equazione

All'uopo siano come precedentemente §. 672, a, b, c le componenti parallelle agli assi coordinati ortogonali AX, AY, AZ delle velocità del punto m del sistema avanti l'urto, ed A, B, C rappresentino le stesse componenti appresso l'urto. Le componenti delle velocità perdute secondo gli assi saranno a−A, b−B, c−C, e però all'istante del cambiamento repentino avremo le equazioni (97) $p\alpha = a-A$; (98) $p\beta = b-B$; (99) $p\gamma = c-C$. §681. Immediatamente dappoi l'urto, le projezioni di m sugli assi x, y, z passano rispettivamente degli spazietti $A\,dt$, $B\,dt$, $C\,dt$, nel tempuscolo dt piccolissimo. Si ha poi $\frac{dx}{dt} = A$, $\frac{dy}{dt} = B$, $\frac{dz}{dt} = C$, onde

(104) $dx = A\,dt$,

(105) $dy = B\,dt$,

(106) $dz = C\,dt$. Fatte adunque le sostituzioni e diviso per dt si avrà

(107) $\Sigma m\big((a-A)A + (b-B)B + (c-C)C\big) = 0$, a cui si può dare la forma

(108) $\frac{1}{2}\Sigma\big(m(a^2-A^2)-(a-A)^2\big) + m\big(b^2-B^2)-(b-B)^2\big) + m\big(c^2-C^2)-(c-C)^2\big) = 0$.

siano v e V le velocità di m, prima e dopo dell'urto, e u la velocità perduta nell'urto, e si avrà

(109) $a^2+b^2+c^2=v^2$

(110) $A^2+B^2+C^2=V^2$

(111) $(a-A)^2+(b-B)^2+(c-C)^2=u^2$, per i quali valori la (108) divisa per $\frac{1}{2}$ diventa

(112) $\Sigma m v^2-\Sigma m V^2=\Sigma m u^2$, la quale mette davanti che la perdita delle velocità virtuali che viene da $\Sigma m v^2-\Sigma m V^2$ rappresentate, eguaglia la somma delle forze vive che avrebbero luogo se ciascun punto del sistema avesse la velocità perduta nell'urto.

Lezione 25.

Quando il sistema componesi di punti materiali liberi, tutti i punti che si muovono sopra linee o superficie date, e soggette alla legge di continuità, la velocità perduta in ciascun istante da ciascun punto a cagione dei loro mutui legami è una quantità infinitesima piccola. Dal che conseguita essere una quantità infinitesima di 2.º ord.e la somma delle forze vive perdute in un istante. Poichè se u è infi-

nitesime di 1.° ord. a° lo i ó i 2.°
ord. La qual somma delle
forze vive ripetuta un n.
indeterm.te grande, non ne ri-
sulterà che una somma in-
definitam.te piccola di forze
vive perdute. E' questa la
ragione per cui si conserva
la somma delle forze vive
purchè il sistema non sia
sollecitato da forze contin.

§. 688. La

(95) $\Sigma m v^2 = C + 2\varphi(x, y, z, x', y', z', \text{---} z)$ mostra, che $\Sigma m v^2$ i
somma delle forze vive, è
un minimo o un massimo
se massimo, o minimo sia
$\varphi(x, y, z, x', y', z' \text{--} z)$ poi-
chè C è quantità costante.

Perchè abbia luogo massimo
o minimo, bisognerà che sia

la

$d.\varphi(x, y, z, x', y', z' \text{---} z) =$
$\Sigma m(Xdx + Ydy + Zdz) = 0$.
Questa equazione ha luogo
se il sistema si trovi in una
posizione nella quale rima-
rebbe in equilibrio in virtù
delle forze continue che lo
sollecitano se vi fosse collo-
cato direttam.te senza imprimer-
vi velocità veruna.

Difatti, essendo in questa
immaginata posizione il

sistema in equilibrio, dipend.^e dalle velocità virtuali si dovrebbe avere
$\Sigma m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$, ove $\delta x, \delta y, \delta z$, sono le variazioni delle coord.^e x, y, z di un pro. venienti da un dislocamento arbitrario, ma però compatibile colle condiz. del sistema.

L'equazione che da il valore della somma delle forze vive, suppone che in veruna delle equazioni di condiz. sia contenuto esplicitamente il tempo t: il che suppone che $Xdx + Ydy + Zdz$ sia diff. esatto. In queste ipotesi si è veduto al §. 682. che prendendo si può $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$: allora si verifica la cond.^e del mass.^o e del minimo, ossia Σmv, risulta massimo o minimo, ogni volta ~~ogni volta~~ che il sistema passa durante il suo moto in una posiz.^e d'equilibrio. Così ad es. allorchè un cilindro a base ellittica, che si considera pesante ed omogeneo, che ruzzola sopra un piano orizzontale, la somma delle forze vive di tutti i suoi punti è massima o minima quando uno di quattro vertici della base è sul piano.

avvegnacchè, in siffatte posizioni il cilindro rimarrebbe in equilibrio se i punti di lui fossero privi di ~~ciasc~~ velocità. —

In generale, nel moto di un sistema le posizioni d'equilibrio corrispondono agli istanti ne' quali il centro di gravità del sistema è più alto o più basso d. 221. E di conseguenze, la somma delle forze vive è massima o minima allorchè il centro di gravità dal punto più alto discende o comincia ad innalzarsi. Precisamente ha luogo il minimo quando cessa d'alzarsi e comincia a discendere, ed il massimo quando cessa di discendere e comincia ad innalzarsi.

Difatti, prendiamo l'asse delle z verticale e diretto secondo la gravità g costante. Sia M la somma delle masse di tutti i punti materiali componenti il sistema, e z_1 sia il valore di z corrispond.e al centro di gravità del sistema. Per tali supposizioni si ha $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$, quindi $d.\Sigma mv^2 = 2\Sigma mg\,dz$, che integrata da $\Sigma mv^2 = 2g\Sigma mz + C$. Ma $\Sigma mz = mz + m'z' + m''z'' + \&c = M z_1$. —

Dunque $\Sigma m v^2 = 2gM_{,}z + C$.
ma M, g, C sono quantità
costanti, dunque $\Sigma m v^2$ sarà
massimo o minimo secondo
che lo sarà z, vale a dire
secondo che il centro di gra-
vità sarà basso o alto.

§. 649. Si è già osservato, che $\Sigma m v^2$
sarà un massimo o un mini-
mo, secondo che sarà
$\Sigma m (x, y, z, x', y', z' - - -)$ mas-
simo o minimo. E però suppo-
sto che il sistema solleci-
tato da forze continue date
si metta in una delle sue
posizioni di equilibrio sen-
za imprimervi velocità di
sorta, il valore di
$\varphi(x, y, z, x', y', z' - - -)$ che
a questa posizione corrispon-
de esser debbe mass. o min.
rispetto a tutte le posizio-
ni vicine che può prendere
il sistema senza rompere
le condiz. che legano tra se le
parti di lui.

Difatti, la variazione
della $\varphi(x, y, z, x', y', z' - -)$
è presentata da $\Sigma m (X\delta x +$
$Y\delta y + Z\delta z)$: ma se la prima
è una posizion d'equilibrio,
questa quantità sarà nulla
per tutti i dislocamenti com-
patibili colle condi. del sistema

Dunque la $Q(x, y, z$ — —) si massima o minima. Per converso si vede non essere che nelle posizioni d'equilibrio che la Q possa essere massima o minima.

§. 690. La posizione poi sarà d'equilibrio stabile o istantaneo secondocchè la $Q(x, y, z$ — —) è mass. o min.

All'uopo figuriamo turbato l'equilibrio imprimendo delle velocità indeterminatamente piccole a tutti i punti del sistema. Appresso un tempo qualunque t, sieno u, u', u'' ec. le velocità dei punti materiali m, m', m'' ec. e $\Sigma m u^2$ sia la somma delle forze vive.

Nel med.° istante sieno $a+p$, $b+q$, $c+r$, — — $a'+p'$, $b'+q'$, $c'+r'$ — — ec. le coord.e dei punti m, m', m'' ec.: le costanti a, b, c, a', b', c' sono le coord.e nelle posiz.i d'equilibrio, e le p, q, r, p', q', r' sono indeterm.e piccole.

Per cosffatti valori avremo
$\Sigma m u^2 = C + 2Q(a+p, b+q, c+r, a'+p', b'+q', c'+r'$ — — ec.$)$

Sviluppati per mezzo del teorema del Taylor questa funzione Q, la somma dei termini che contengono

p, q, r, p', q', r' alla prima dimensione esser debbe nulla perchè $Q(a+p \,--\, z)$ è un massimo per ipotesi.

Perchè poi abbia luogo un massimo, oltre a questa cond.e è necessario, che i termini che contengono p, q, r, p', q', r' sia nullo per qualunque valore che si attribuisca a queste quantità. Ma trattando di mass. e min. delle funzioni a più variabili si è veduto che la somma degli aumenti ridurre si può a quadrati ciascuno dei quali sia moltiplicato per un coefficiente. perchè sia negativa tal somma indipendentemente dai loro valori bisogna che nel mass.e i coeff.i siano negativi.

Dopo avere sviluppato, e fatto $Q(a, b, c, a', b', c' \,-\, z) = A$ ss semplificato, ne verrà
$\Sigma mu^2 = C + 2A - 2(hs^2 + h's'^2 + h''s''^2)$ + R, essendo R la somma dei termini a dimensioni maggiori della 2.a

Si metta $C + 2A = C'$, e avverrà
$\Sigma mu^2 = C' - 2(hs^2 + h's'^2 + h''s''^2 \,-\, z) + R$
Nella posizione dell'equilibrio, abbiamo $p = 0, q = 0, r = 0, p' = 0$
$q' = 0, r' = 0$, poichè allora

le coord.ᵉ sono a. b. c. Le quantità s. s', s'', sono moltiplicate pei quad.ⁱ e prodotti degli aumenti; ma se gli aumenti sono zero, anche s, s', s'' &c sono zero, e però si avrà nella posiz.ᵉ d'equilibrio perchè $x=0$

$\Sigma mu^2 = C' + R$: ma gli aumenti $p', q', r', p'', q'', r''$ &c sono indeterminatamente piccoli, la qual cosa essere non può se u, u', u'' non sono indeterminatamente piccole. Dunque detti v, v', v'' i valori indeterm.ⁱ piccoli di u, u', u'' nella cond.ᵉ d'equilibrio, si avrà

$\Sigma mv^2 = C' + R$, che serve a determinare $C' = \Sigma mv^2 - R$

Onde il valore determinato di Σmu^2 verrà dato dalla

$\Sigma mu^2 = \Sigma mv^2 - 2(hs^2 + h's'^2 + h''s''^2 \&c) + R$, ossia

$$mu^2 + m'u'^2 + m''u''^2 + \text{——} \&c =$$
$$mv^2 + m'v'^2 + m''v''^2 + \text{——} \&c -$$
$$2hs^2 - 2h's'^2 - 2h''s''^2 - \text{——} \&c + R.$$

Osserviamo che il 1.º membro di quest'equaz.ᵉ esser deve sempre positivo, perchè è la somma di quadrati di quantità reali, ciascuna moltiplicata per una massa ossia quantità positiva ——

Poniamo la quantità indeterminatamente piccola

$mv^{2}+m'v'^{2}+m''v''^{2}+ \text{---} \; \&c = T,$

e si avrà

$mu^{2}+m'u'^{2}+m''u''^{2}+ \text{---} \; \&c =$

$T - 2hs^{2} - 2h's'^{2} - 2h''s''^{2} - \&c + R$

Per ipotesi R contiene p, q, r p', q', r' &c a dimensioni maggiori delle 2e: però ognuno dei termini $2hs^{2}$, $2h's'^{2}$ &c sono maggiori di R. Or si supponga uno delle infrascritte equazioni

$T = 2hs^{2},$

$T = 2h's'^{2}$

$T = 2h''s''^{2}$

— — —, allora si avrebbe

$mu^{2}+m'u'^{2}+m''u''^{2} \&c < 0$, il che è assurdo perchè dev'essere quantità positiva. A più forte ragione se fosse $2hs^{2} > T$, o $2h's'^{2} > T$, dunque debbe essere

$2hs^{2} < T$, $2h's'^{2} < T$ - &c

ossia

$s < \pm\sqrt{\frac{T}{2h}}$, $s' < \pm\sqrt{\frac{T}{2h'}}$, $s'' < \pm\sqrt{\frac{T}{2h''}}$

— — &c: ma T è indeterminatamente piccola, dunque tali saranno s, s', s'' &c la qual cosa essere non può se p, q, r, p', q', r' &c non si mantengono per tutto il moto indeterminatamente piccole

al che è necessario che il sistema non faccia che delle piccolissime oscillazioni intorno al punto di equilibrio, nel qual caso l'equilibrio è stabile. -

§. 691. Al minimo di $Q(x, y, z \ldots)$ avremo la

$\Sigma m u^2 = \Sigma m v^2 + 2 h s^2 + 2 h' s'^2 + \ldots R$

ma qui nulla vi ha che mostri che il crescere di s, s', s'' porti un assurdo; perchè il 1.º membro sarà positivo aumentando s oltre ogni limite. Non si può dunque asserire che un tale accrescimento abbia luogo realmente, ma che è possibile.

Determinando p, q, r, p', q', r' in funzione del tempo La-Grange dimostrò che difatto queste quantità crescono senza limite per quantunque piccole siano le velocità iniziali dei mobili, e quindi conclude, che al minimo di Q corrisponde una posizione instabile. Troppo lunga sarebbe la dimostrazione di La-Grange. Laonde se le funzioni di h, h', h'' fossero nulle converrebbe ricorrere ai termini di p, q, r

di 2 dimensioni che nel l. d.
si è vedº non è sempre fatti-
bile.

Dimostrato che la Q è
un Mass. o un minimo se-
condo che le posizione di equi-
librio è stabile o istantanea
ne consegue che la somma
delle forze vive di un sistema
in moto è massª allorchè
il sistema passa per una
posiz. di equilibrio stabile
ed è minima allorchè passa
per un'equilibrio istantaneo.

§. 692. Toccheremo infine dell'
esposizione delle proprietà
generali del moto ponen-
do davanti che il princi-
pio della minima azione
dimostrato per un punto
materiale §. 597 ha
luogo per un sistema di
solidi. Ecco l'enunz. del
teor. minima azione
nel moto di un sistema di
solidi pel quale ha luogo
la somma delle forze vive
se si moltiplichi la veloci-
tà dei mobili per la sua
massa e per l'elemento
della sua trajettoria e si
prenda la somma di questi
fatti prod. relativi a tutti
i mobili, e dappoi si inte-
gri fra due termini dati, il

La 26. Ripett.ne
27

valore che se ne ottiene è mas-
simo o minimo. ———

Sia m la massa di uno dei punti materiali componenti il sistema, v la velocità del punto, ds l'elemento di sua trajettoria e si avrà $\Sigma mvds$ preso fra dati limiti, massimo o minimo. —

Si ha poi

(113) $\delta\int\Sigma mvds = \int\Sigma m\delta.vds$: inoltre, $\Sigma m\delta.vds = \Sigma mv\delta.ds + \Sigma m\delta vds$: ma

(114) $v = \frac{ds}{dt}$, e però $ds = vdt$.

dunque, (113) $\delta vds = v\delta vdt = \frac{dt}{2}\delta.v^2$, e

(116) $\Sigma m\delta vds = \frac{dt}{2}\Sigma m\delta.v^2$. —

Surrogato al segno diff.le quello delle variazioni l'equaz.e trovata al §. 680, che è la (94) si muta nella

(117) $\delta\Sigma mv^2 = \Sigma m\delta.v^2 = 2\Sigma m.(Xdx + Ydy + Zdz)$. ———

Se nella equazione $\Sigma(mp\cos\alpha\delta x + mp\cos\beta\delta y + mp\cos\gamma\delta z) = 0$, si ponga $Xdt - \frac{d^2x}{dt}$, $Ydt - \frac{d^2y}{dt}$, $Zdt - \frac{d^2z}{dt}$, avece di $p\cos\alpha$, $p\cos\beta$, $p\cos\gamma$, ne viene la equazione ———

(118) $dt\,\Sigma m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) =$
$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt}\delta x + \frac{d^2y}{dt}\delta y + \frac{d^2z}{dt}\delta z\right)$,
ovveramente

(119) $\Sigma m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) =$
$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$.

Dalla equazione (117) si ha
$\frac{1}{2}\Sigma m\delta.v^2 = \Sigma m(X\delta x + Y\delta y +$
$Z\delta z)$, il quale valore so-
stituito nella (110) produce

(120) $\Sigma m\delta v ds = dt\,\Sigma m(X\delta x +$
$Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt}\delta x +\right.$
$\left.\frac{d^2y}{dt}\delta y + \frac{d^2z}{dt}\delta z\right)$. Al §. 557.
si è trovata la
$\delta ds = \frac{dx}{ds}.d.\delta x + \frac{dy}{ds}d.\delta y$
$+ \frac{dz}{ds}d.\delta z$, e quindi

(121) $v\delta.ds = \frac{dx}{dt}d.\delta x + \frac{dy}{dt}d.\delta y$
$+ \frac{dz}{dt}d\delta z$, e poi

(122) $\Sigma mv\delta.ds = \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}d.\delta x +\right.$
$\left.\frac{dy}{dt}d.\delta y + \frac{dz}{dt}d.\delta z\right)$, onde

(123) $\Sigma m\delta.vds = \Sigma mv\delta.ds +$
$\Sigma m\delta v\delta s = \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}d.\delta x +\right.$
$\left.\frac{dy}{dt}d.\delta y + \frac{dz}{dt}d.\delta z\right) + \ldots$
$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt}.\delta x + \frac{d^2y}{dt}.\delta y +\right.$
$\left.\frac{d^2z}{dt}\delta z\right) = \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y\right.$
$\left.+ \frac{dz}{dt}\delta z\right)$, di cui l'integrale

(124) $\int \Sigma m\,\delta\cdot v\,ds = \delta\int\Sigma m.v\,ds$

$= \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)$

Ma i limiti dell'integrale sono dati, dunque le variazioni delle coord.e esser dovranno nulle ai dati limiti.

Concludere adunque si debbe che la variazione di $\int\Sigma m v ds$ è nulla fra dati limiti. Ma ciò essendo $\int\Sigma m v dt$ è massimo o minimo fra i limiti medesimi dunque si è dimostrato quanto &.

Dall'essere $ds = v dt$, ne nasce la

(125) $\int\Sigma m v ds = \int\Sigma m v^2 dt$: ma $\int m v^2 dt$ è la somma delle forze vive per tutta la durata del moto, e però $\Sigma\int m v^2 dt$ è la somma delle forze vive di tutti i punti del sistema nel lasso dello stesso tempo, per la qual cosa il principio della minima azione riducesi a dire che la somma delle forze vive è Mass. o minim. Quindi il principio della minima azione appellare si può principio della massima o minima somma forze vive.

Questo principio si adatta tanto al moto che all'equilibrio. – Quando i mobili non sono sollecitati da nessuna forza continua la somma delle forze vive in ciascun istante è sempre la med.e ed è costante ma essendo v costante si ha

$\int v \Sigma m ds = P s$ essendo P costante.

Dunque l'integrale è proporzionale allo spazio che sarà il minimo fra i due limiti fra i quali non può esser. si massi. determinato, e però avrà luogo il minimo di $\int \Sigma m v ds$ nella stessa ipotesi, ed un minimo la somma delle forze vive ———

Fine della Meccanica li 7. Xmbre 1832.